

## 비모수적 베이지안 추정량을 이용한 생존함수의 추정

이인석, 조길호, 이우동<sup>1)</sup>

**요약** 본 연구는 누적위험률함수에 대한 베이지안 추정량을 이용하여 생존함수의 추정량을 제안하고, counting process 이론과 martingale 이론을 이용하여 대표본 하에서 제안된 추정량의 일양적 일치성과 점근적 정규성을 밝힌다. 또한 모의실험을 통하여 추정량들의 효율성을 편의와 평균제곱오차의 측면에서 비교하고자 한다.

### 1. 서론

수명자료(lifetime data)는 제약 조건이나 실험 환경에 의하여 불완전한 자료의 형태로 관측되는 경우가 많으며, 임의중단자료(randomly censored data)는 이러한 불완전한 자료의 한 형태이다. 임의중단자료를 이용한 생존함수(survival function)의 추정 문제는 많은 학자들에 의해 연구되어 왔으며, 대부분 모수적 방법에 의한 것이었다. 그러나 최근에는 수명자료에 특정한 분포를 가정하지 않는 비모수적 방법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 생존함수의 비모수적 추정은 추정 방법에 따라 고전적 접근법과 베이지안적 접근법으로 분류할 수 있다.

임의중단자료를 이용한 생존함수의 고전적 추정량중 널리 알려진 추정량으로는 Kaplan과 Meier(1958)에 의해 제안된 Kaplan-Meier 추정량(K-M 추정량)과 Nelson(1972)과 Aalen(1978)에 의해 제안된 누적위험률함수(cumulative hazard function)에 대한 Nelson-Aalen 추정량이 있으며, 생존함수와 누적위험률함수의 관계에 의하여 생존함수의 추정량(N-A 추정량)이 제안될 수 있다. 베이지안 추정량으로는 Susarla와 Van Ryzin(1976)이 제안한 Susarla-Van Ryzin 추정량(S-V 추정량)과

1) 대구직할시 북구 산격동 경북대학교 자연과학대학 통계학과

Hjort(1991)에 의해 제안된 누적위험률함수에 대한 베이지안 추정량이 있으며, 이를 이용한 생존함수의 추정량(H 추정량)을 제안할 수 있다.

K-M 추정량, N-A 추정량, 그리고 S-V 추정량들의 대표본 성질은 여러 연구자에 의해 밝혀졌으나, H 추정량의 점근적 성질은 Hjort의 연구에서 앞으로 해결하여야 할 문제로 제시되었다. 따라서 본 연구에서는 H 추정량의 점근적 성질을 조사하며, 모의 실험을 통하여 추정량들의 효율성을 편의와 평균제곱오차의 측면에서 비교하고자 한다.

## 2. Hjort의 누적위험률함수를 이용한 생존함수의 추정

수명자료  $T_1, T_2, \dots, T_n$ 을 연속인 분포함수  $F$ 를 갖는 모집단으로 부터 추출한 음이 아닌 확률표본이라 하고,  $f$ 를 확률밀도함수(probability density function), 생존함수를  $S(t) = \Pr\{T_i > t\}$ 라 하자.  $C_1, C_2, \dots, C_n$ 은 생존함수  $G(t)$ 를 갖는 임의중단 확률표본이고,  $T_i$ 와  $C_i$ 는 독립이라 가정한다. 또한,  $X_i = \min(T_i, C_i)$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ )라 두자.  $X_i$ 들의 분포함수를  $H$ 라 하면,  $1-H(t) = S(t)G(t)$ 가 성립한다. 분포함수  $F$ 에 대한 위험률함수  $\lambda(t)$ 는

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

이고, 누적위험률함수  $\Lambda(t)$ 는

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \int_0^t \frac{f(s)}{1-F(s)} ds \\ &= \int_0^t \lambda(s) ds \\ &= -\log(S(t)) \end{aligned}$$

인 관계가 성립한다. 따라서 생존함수와 누적위험률함수의 관계는

$$S(t) = e^{-\Lambda(t)}$$

이다. 따라서  $\Lambda(t)$ 의 추정량을 이용하여 생존함수  $S(t)$ 의 추정량을 얻을 수 있다.

임의중단 자료는  $(X_1, \delta_1), (X_2, \delta_2), \dots, (X_n, \delta_n)$ 과 같이 얻어지며, 여기서

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{if } T_i < C_i \\ 0, & \text{if } T_i \geq C_i \end{cases}$$

는 관찰값들이 중단된 자료인지 혹은 완전히 관측된 자료인지를 나타내는 중단지시자

(censoring indicator)이다. 그리고 확률표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 의 순서통계량을  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ 이라 하고, 순서통계량  $X_{(i)}$ 의 중단지시자를  $\delta_{(i)}$ 라 두자.

Kaplan과 Meier가 제안한 K-M 추정량은 다음과 같다.

$$\hat{S}_{KM}(t) = \begin{cases} \prod_{i: X_{(i)} \leq t} \left\{ \frac{n-i}{n-i+1} \right\}^{\delta_{(i)}}, & \text{for } t \leq X_{(n)} \\ 0 & \text{if } \delta_{(n)} = 0, \text{ for } t > X_{(n)} \\ \text{undefined} & \text{if } \delta_{(n)} = 1, \text{ for } t > X_{(n)} \end{cases}$$

Breslow와 Crowley(1974)는 K-M 추정량의 극한분포가 정규분포임을 증명하였고, Peterson(1977)은 K-M 추정량을 두개의 부생존함수(subsurvival function)로 표현하였으며, Gill(1980)은 K-M 추정량의 점근적 성질을 밝혔다.

Nelson과 Aalen에 의해 제안된 누적위험률함수에 대한 경험적 추정량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}(t) &= \int_0^t \frac{dN(s)}{Y(s)} \\ &= \sum_{i: X_{(i)} \leq t} \frac{\delta_{(i)}}{n-i+1} \end{aligned}$$

여기서,  $N(t)$ 는  $t$ 보다 작거나 같은 임의중단 되지 않은 관찰치의 갯수이며,  $Y(t)$ 는  $t$ 보다 작거나 같은 관찰치의 갯수이다. 즉,

$$N(t) = \sum_{i=1}^n I_{\{X_{(i)} \leq t, \delta_{(i)} = 1\}}$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n I_{\{X_{(i)} \geq t\}}$$

Nelson과 Aalen의 추정량을 이용한 생존함수의 추정량은 분포함수와 누적위험률함수의 관계를 이용하여 다음과 같이 제안할 수 있다.

$$\hat{S}_{NA}(t) = e^{-\hat{\Lambda}(t)}$$

N-A 추정량의 점근적 성질은 counting process 이론을 이용하여 Aalen(1978)과 Anderson과 Borgan(1985)등에 의해 밝혀졌다.

비모수적 베이지안 추정량으로는 손실함수를 제공손실오차로 가정했을때, Susarla와 Van Ryzin이 제안한 생존함수의 S-V 추정량과 Hjort가 제안한 누적위험률함수의 추정량이 있다. S-V 추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{S}_{SV}(t) = \frac{\alpha(t, \infty) + N^+(t)}{n + \alpha(R^+)} \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{N^+(X_i) + \alpha(X_i, \infty) + 1}{N^+(X_i) + \alpha(X_i, \infty)} \right\}^{I_{\{X_i > t, \delta_i = 0\}}}$$

여기서

$$N^+(t) = \sum_{i=1}^n I_{\{X_{(i)} \geq t\}} = Y(t)$$

이고,  $\alpha$ 는  $R^+$ 상에서 임의의 유한한 측도이며  $S(t)$ 의 사전 정보이다. S-V 추정량의 점근 분포가 정규분포임은 Susarla와 Van Ryzin(1976)에 의해 증명되었다.

그리고 Hjort에 의해 제안된 추정량은

$$\widehat{\lambda}(t) = \int_0^t \frac{c(s)d\Lambda_0(s) + dN(s)}{c(s) + Y(s)}$$

이다. 여기서,  $N(s)$ 와  $Y(s)$ 는 N-A 추정량에 정의된 실험적 과정이며,  $c(s)$ 와  $\Lambda_0(s)$ 는 각각  $s$ 시간에서의 위험(risk)의 수와 누적위험률함수에 대한 사전 정보이다. 이 추정량을 이용하여 생존함수의 추정량을 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$\widehat{S}(t) = e^{-\widehat{\lambda}(t)}$$

Hjort는 만약  $c(s)$ 와  $\Lambda_0(s)$ 가 0으로 수렴한다면  $\widehat{\lambda}$ 이  $\lambda$ 으로 수렴한다는 사실을 밝혔고,  $c(s)$ 는 음이 아닌 조각연속(piecewise continuous)인 함수로 가정했다. 그리고 위의 추정량에 대한 점근적 성질은 그의 논문에서 연구 과제로 제시하였다.

지금부터  $\widehat{S}(t)$ 의 점근적 성질을 알아 보고자 한다. 먼저 아래와 같은 counting process를 정의 하자.

$$N(t) = \sum_{i=1}^n I_{\{X_{(i)} \leq t, \delta_{(i)} = 1\}}$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n I_{\{X_{(i)} \geq t\}}$$

$$M(t) = N(t) - A(t), \quad A(t) = \int_0^t Y(s)d\Lambda(s),$$

하고, filtration을 아래와 같이 정의하면,

$$F_t = \sigma\{N(s), Y(s); s \leq t\},$$

counting process  $N(t)$ 는  $[0, T]$ ,  $F(T) < 1$ 상에서 compensator  $A(t)$ 를 갖는 local

square integrable martingale이다.(Fleming와 Harrington(1991)) 그리고

$$\Lambda^*(t) = \int_0^t \frac{c(s)d\Lambda_0(s) + Y(s)d\Lambda(s)}{c(s) + Y(s)}$$

라고 정의하면

$$(\tilde{\Lambda}(t) - \Lambda^*(t)) = \int_0^t \frac{1}{c(s) + Y(s)} dM(s)$$

이며

$$(\Lambda^*(t) - \Lambda(t)) = \int_0^t \frac{c(s)}{c(s) + Y(s)} d(\Lambda_0(s) - \Lambda(s))$$

이다.  $\int \frac{1}{c(s) + Y(s)} dM(s)$ 는 Fleming과 Harrington(1991)의 정리 2.4.4.를 이용하여 만약  $\inf_{0 \leq s \leq T} c(s) \neq 0$  라는 조건과  $c(s)$ 는  $T$ 가  $F(T) < 1$ 이 되는  $[0, T]$  구간 상에서 유계이고 예측가능(predictable)이라면  $[0, T]$  상에서 제곱적분 가능한 martingale임을 밝혔고,  $\tilde{\Lambda}(t)$ 의 편의가 자료의 갯수  $n$ 이 무한대일때 0(점근적 불편성)이 됨을 아래와 같은 조건에서 밝혔다.

정리 2.1. 자료의 갯수  $n$ 이 무한대로 갈때

- (i)  $Y(s) \rightarrow^p \infty$ ;
- (ii)  $\inf_{0 \leq s \leq T} c(s) \neq 0$ ;
- (iii)  $c(s)$ 는  $[0, T]$  구간 상에서 유계이고 예측가능;
- (iv)  $\sup_{0 \leq s \leq T} |\Lambda(s) - \Lambda_0(s)| < \infty$ 가 만족 된다면,

$$E(\tilde{\Lambda}(t) - \Lambda(t)) = E(\Lambda^*(t) - \Lambda(t)) \rightarrow 0.$$

정리 2.1를 이용하여 H 추정량은 점근적 불편 추정량(asymptotically unbiased estimator)임을 보일 수 있다.

앞으로  $D[0, T]$  는 Skorohod metric을 가지고, 오른쪽으로 부터 연속이고 왼쪽 극한을 가지는 구간  $[0, T]$  상에서 정의된 모든 실험수의 집합이라고 두자 (Billingsley(1968)). 그리고, Lengart의 부등식을 이용하여  $\tilde{S}(t)$ 가 일양적 일치성을 가지는 추정량임을 밝혔다.

정리 2.2. 자료의 갯수  $n$ 이 무한대로 갈때

- (i)  $Y(s) \rightarrow^p \infty$ ;  
 (ii)  $c(s)$ 는  $[0, T]$  구간 상에서 유계이고 예측가능이라면,  

$$\sup_{0 \leq s \leq T} |\tilde{S}(s) - S(s)| \rightarrow^p 0.$$

$\tilde{S}(t)$ 의 점근분포는 Gill(1980)에 의해 증명된 martingale 중심극한정리를 이용하여 아래와 같이 얻는다.

정리 2.3. 자료의 갯수  $n$ 이 무한대로 갈때

- (i)  $Y(s) \rightarrow^p \infty$ ;  
 (ii) 사전분포의 모수  $c(s)$ 가  
 i)  $\frac{c(s)}{Y(s)} \rightarrow^p 0$ ;  
 ii)  $\inf_{0 \leq s \leq T} c(s) \neq 0$ ;  
 iii)  $c(s)$ 는  $[0, T]$  구간 상에서 유계이고 예측가능이라면,  $D[0, T]$ 에서  

$$\sqrt{n}(\tilde{S}(t) - S(t)) \rightarrow^D Z^*(t).$$

여기서,  $Z^*$ 는 평균이 0이고 공분산함수가

$$\text{Cov}(Z^*(s), Z^*(t)) = S(s)S(t) \int_0^{\min(s,t)} \frac{dF(u)}{(1-H(u))S(u)}, \quad 0 \leq s, t \leq T$$

인 가우시안 확률과정(Gaussian process)이다. 또 위의 정리 2.3의 내용은  $t$ 가 주어질 때마다  $\sqrt{n}(\tilde{S}(t) - S(t))$ 의 분포가 정규분포한다는 결론이다. 위의 정리의 결과는 K-M, N-A, S-V 추정량들의 점근적 성질과 같다.  $\tilde{S}(t)$ 의 점근적 분산은 정리 2.3에 의하여

$$\frac{1}{n} (S(t))^2 \int_0^t \frac{dF(s)}{(1-H(s))S(s)}$$

이고 분산의 일치추정량  $\widehat{AVar}(\tilde{S}(t)) = (\tilde{S}(t))^2 \sum_{i: X_{(i)} \leq t} \frac{\delta_{(i)}}{(n-i+1)(n-i)}$ 으로 하면,

주어진  $t$ 에서 생존함수  $S(t)$ 의  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간을 다음과 같이 구할 수 있다.

정리 2.4. 만약 분포함수  $F$ 가 연속이고,  $T > 0$ ,  $H(T) < 1$  이라면, 모든  $t \in [0, T]$  와  $0 < \alpha < 1$ 에 대해서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(\tilde{S}(t) - l \leq S(t) \leq \tilde{S}(t) + l) = 1 - \alpha.$$

여기서  $l = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{A \text{Var}(\tilde{S}(t))}$ 이고,  $z_{\alpha}$ 는 표준정규분포의 확률이  $100\alpha$ 되는 백분위수이다.

### 3. 모의실험

모의실험을 통하여 K-M, N-A, S-V 추정량과 H 추정량의 소표본 성질을 알아본다.

수명함수의 분포는 수명자료의 분포로 널리 알려진 와이블분포( $Weib(\alpha, \beta)$ )로 가정하였고, 와이블분포의 모수  $\beta$ 를 조정하여 위험률함수가 증가, 일정, 감소인 경우를 각각 고려하였다. 임의중단 분포는 일양분포와 지수분포를 고려했으며, 모수는 자료의 중단 비율이 근사적으로 각각 10%와 30%가 되도록 하였다. 위의 모의실험에 대한 계획을 정리하면 표 1-1과 같다.

위의 모의실험의 결과 주어진 수명분포에 대해 각 중단분포들의 조합을 고려하였으나 각 조합마다 유사한 경향을 가졌다. 따라서 \*표한 조합에 대한 결과를 아래의 표 1-2에 보였다. 표 1-2에서 "Emp"는 자료가 임의중단 되지않은 경우의 경험적 생존함수(empirical survival function)로  $S_{Emp}$ 라한다면,

$$S_{Emp}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(X_i > t)}$$

이다. "bias"는 각 추정량에 대한 편의, "mse"는 평균제곱오차, 그리고 "sdmse"는 1000번 반복에서의 mse에 대한 표준오차를 나타낸다.

사전분포의 모수로는 H 추정량에서는  $c(s) = 1$ 과 2로  $\Lambda_0(t) = 0.1t$ 로 가정했고 S-V 추정량에서는  $\alpha([0, t]) = e^{-\Lambda_0(t)} = e^{0.1t}$ 로 가정하였다. 그리고 자료의 갯수는 10과 50, 실험반복은 1000번으로 하였다.

그림1-1과 그림1-2는 자료의 수가 10, 수명분포는 와이블분포, 중단분포는 일양분포, 중단비율은 10%와 30%일때, 추정량들의 편의와 평균제곱오차를 그림으로 그려본 것이다.

표 1-1 생존함수  $S(t)$ 에 대한 모의실험 계획

수명분포	중단분포 1	중단분포 2
Weibull(1,0.5)	Exp(0.028) Exp(0.262)	Unif(18.612)* Unif(3.930)*
Weibull(1,1)	Exp(0.111)* Exp(0.429)*	Unif(9.999) Unif(3.197)
Weibull(1,1.5)	Exp(0.119)* Exp(0.432)*	Unif(9.024) Unif(3.002)

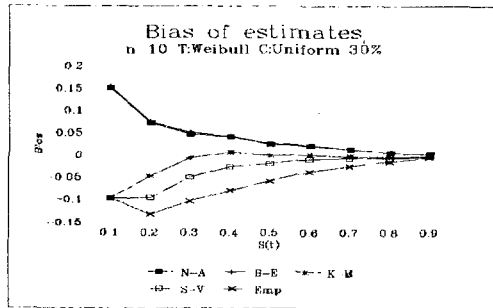
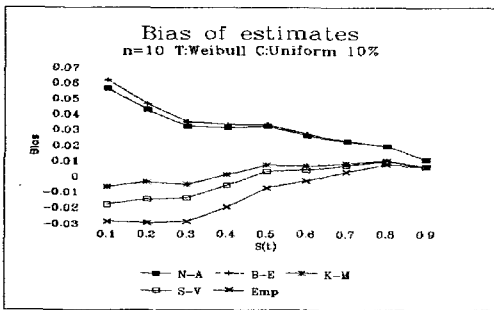


그림 1-1. 추정량들의 편의

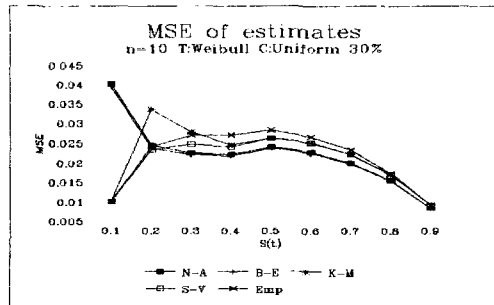
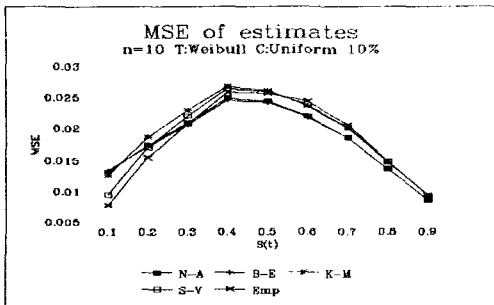


그림 1-2. 추정량들의 평균제곱오차

표1-2로 부터 다음과 같이 모의실험의 결과를 요약할 수 있다.

(1) H 추정량은 표본의 수가 작을 때 편의가 다른 추정량보다 크고, 그 편의는 자료의 수가 50일때 S-V 추정량이나 N-A 추정량보다는 적었고, 중단분포나 중단비율에



관계없이 K-M 추정량의 편의는 적었다.

(2) 평균제곱오차의 측면에서는 수명분포의 중간이나 처음 부분에서 다른 추정량들보다 우수하였고 N-A 추정량이 비교될만 했다. 그리고 중단비율이 높아 질수록 K-M 추정량이나 S-V 추정량의 평균제곱오차는 N-A 추정량이나 H 추정량보다 우수하였다.

(3)  $c(s)/Y(s)$ 의 값이 작을때 (사건의 정보가 충분할 때) H 추정량은 N-A 추정량과 비슷했으며,  $c(s)/Y(s)$ 가 클때(사건의 정보가 충분치 못할때)는 H 추정량의 편의는 컸다.

위의 모의실험 결과를 볼때, 편이나 평균제곱오차의 측면에서 H 추정량의 사용이 다른 추정량을 사용하는 것보다 자료의 갯수가 너무 적지 않다면 더 바람직하다는 것을 알 수 있었다.





표 1-2 (계속)

Sample size: 10

Life time: Wei( 1.000, 1.000)

Censoring: Exp( .111)

Censoring: Exp( .429)

Censoring rate: .10640

Censoring rate: .30900

S(0)		K-M	N-A	S-V	B-E	EMP	K-M	N-A	S-V	B-E	EMP
0.1	bias	.0397	.0352	.0008	-.0112	-.0242	.0365	.1032	-.0260	-.0449	-.0336
	mse	.0138	.0141	.0124	.0094	.0073	.0235	.0240	.0167	.0101	.0076
	sdmse	.0008	.0008	.0005	.0002	.0001	.0016	.0016	.0007	.0001	.0000
0.2	bias	.0404	.0447	-.0079	-.0200	-.0394	.0762	.0807	-.0033	-.0499	-.0376
	mse	.0176	.0175	.0192	.0174	.0155	.0286	.0282	.0328	.0220	.0190
	sdmse	.0009	.0009	.0007	.0005	.0004	.0021	.0020	.0015	.0005	.0003
0.3	bias	.0310	.0340	-.0075	-.0200	-.0456	.0397	.0625	.0033	-.0462	-.1164
	mse	.0214	.0210	.0233	.0217	.0198	.0297	.0289	.0351	.0271	.0279
	sdmse	.0011	.0011	.0011	.0008	.0006	.0016	.0015	.0017	.0011	.0009
0.4	bias	.0300	.0319	-.0016	-.0131	-.0420	.0440	.0456	.0026	-.0445	-.1238
	mse	.0254	.0251	.0276	.0260	.0244	.0301	.0293	.0355	.0313	.0364
	sdmse	.0015	.0015	.0017	.0013	.0010	.0015	.0014	.0022	.0017	.0018
0.5	bias	.0313	.0324	.0030	-.0038	-.0318	.0287	.0294	-.0013	-.0409	-.1270
	mse	.0255	.0252	.0275	.0264	.0261	.0288	.0281	.0328	.0311	.0403
	sdmse	.0015	.0014	.0017	.0015	.0013	.0015	.0014	.0021	.0020	.0024
0.6	bias	.0260	.0266	.0032	-.0023	-.0296	.0236	.0235	.0017	-.0314	-.1166
	mse	.0229	.0226	.0248	.0240	.0242	.0246	.0241	.0271	.0264	.0379
	sdmse	.0009	.0009	.0012	.0011	.0011	.0011	.0011	.0015	.0015	.0022
0.7	bias	.0227	.0229	.0032	.0015	-.0216	.0124	.0120	-.0037	-.0276	-.1018
	mse	.0192	.0190	.0208	.0205	.0220	.0212	.0210	.0235	.0239	.0348
	sdmse	.0006	.0006	.0008	.0008	.0010	.0007	.0007	.0009	.0010	.0019
0.8	bias	.0186	.0185	.0031	.0047	-.0128	.0043	.0039	-.0062	-.0228	-.0306
	mse	.0138	.0138	.0150	.0149	.0164	.0153	.0157	.0176	.0181	.0275
	sdmse	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0004	.0004	.0006	.0007	.0015
0.9	bias	.0107	.0106	.0031	.0035	-.0070	.0016	.0013	-.0035	-.0116	-.0434
	mse	.0084	.0084	.0032	.0032	.0102	.0084	.0083	.0033	.0036	.0149
	sdmse	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0006



표 1-2 (계속)

Sample size: 10

Life time: Wei( 1.000, 1.500)

Censoring: Exp( .119)

Censoring: Exp( .432)

Censoring rate: .10280

Censoring rate: .30500

$S(d)$		K-M	N-A	S-V	B-E	EMP	K-M	N-A	S-V	B-E	EMP
0.1	bias	.0577	.0534	.0009	-.0084	-.0204	.0889	.0859	-.0176	-.0837	-.0544
	mse	.0133	.0137	.0119	.0085	.0076	.0199	.0206	.0153	.0104	.0073
	sdmse	.0007	.0007	.0004	.0002	.0001	.0012	.0012	.0005	.0002	.0000
0.2	bias	.0408	.0452	-.0063	-.0167	-.0854	.0725	.0776	-.0022	-.0870	-.0858
	mse	.0176	.0175	.0188	.0172	.0155	.0273	.0271	.0805	.0215	.0177
	sdmse	.0009	.0009	.0007	.0006	.0004	.0018	.0018	.0013	.0005	.0008
0.3	bias	.0816	.0846	-.0071	-.0191	-.0456	.0804	.0635	.0049	-.0886	-.1106
	mse	.0215	.0212	.0234	.0218	.0198	.0808	.0296	.0852	.0276	.0274
	sdmse	.0012	.0011	.0011	.0009	.0006	.0016	.0015	.0017	.0011	.0009
0.4	bias	.0804	.0823	-.0017	-.0140	-.0462	.0455	.0472	.0089	-.0433	-.1308
	mse	.0259	.0255	.0282	.0266	.0247	.0816	.0807	.0865	.0819	.0871
	sdmse	.0016	.0016	.0017	.0014	.0010	.0015	.0014	.0022	.0018	.0018
0.5	bias	.0815	.0826	.0058	-.0058	-.0402	.0291	.0298	-.0080	-.0467	-.1426
	mse	.0257	.0253	.0277	.0263	.0256	.0298	.0285	.0837	.0821	.0440
	sdmse	.0015	.0015	.0017	.0014	.0012	.0015	.0014	.0022	.0021	.0026
0.6	bias	.0252	.0257	.0049	-.0054	-.0890	.0235	.0233	-.0001	-.0401	-.1430
	mse	.0230	.0228	.0250	.0243	.0257	.0251	.0246	.0279	.0279	.0446
	sdmse	.0010	.0009	.0012	.0011	.0012	.0012	.0011	.0015	.0016	.0028
0.7	bias	.0216	.0217	.0057	-.0026	-.0862	.0130	.0124	-.0041	-.0879	-.1384
	mse	.0190	.0189	.0207	.0208	.0228	.0222	.0218	.0248	.0252	.0440
	sdmse	.0006	.0006	.0008	.0008	.0010	.0008	.0007	.0010	.0012	.0028
0.8	bias	.0179	.0177	.0082	.0009	-.0272	.0083	.0025	-.0079	-.0838	-.1228
	mse	.0139	.0138	.0151	.0152	.0186	.0170	.0169	.0191	.0199	.0875
	sdmse	.0008	.0008	.0004	.0004	.0007	.0005	.0005	.0007	.0009	.0025
0.9	bias	.0108	.0101	.0057	.0006	-.0206	.0000	-.0008	-.0055	-.0226	-.0884
	mse	.0085	.0085	.0088	.0088	.0116	.0091	.0091	.0102	.0107	.0236
	sdmse	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0002	.0002	.0003	.0003	.0011



## 참 고 문 헌

1. Aalen, O. O. (1978), Nonparametric Inference for a Family of Counting Processes, *The Annals of Statistics*, 6, 701-726.
2. Anderson, P. K. and Borgan, O. (1985), Counting Processes Models for Life History data ; A Review, *Scandinavian Journal of Statistics*, 12, 97-158.
3. Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
4. Breslow, N. E. and Crowley, J. (1974), A Large Sample Study of the Life Table and Product Limit Estimators under Random Censorship, *The Annals of Statistics*, 2, 435-453.
5. Fleming, T. R. and Harrington, D. P. (1991), *Counting Processes and Survival Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
6. Gill, R. D. (1980), *Censoring and Stochastic Integrals*. Mathematical Centre Tracts 124, Mathematisch Centrum, Amsterdam.
7. Hjort, N. L. (1991), Nonparametric Bayes Estimators based on Beta Processes in Models for Life History Data, *The Annals of Statistics*, 3, 1259-1294.
8. Kaplan, E. L. and Meier, P. (1958), Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, *Journal of the American Statistical Association*, 53, 457-481.
9. Nelson, W.B. (1972), Theory and Application of Hazard Plotting for Censored Failure Data, *Technometrics*, 14, 945-996.
10. Peterson, A. V. Jr. (1977), Expressing the Kaplan-Meier Estimator as a Function of Empirical Survival Functions, *Journal of the American Statistical Association*, 72, 854-858.
11. Susarla, V. and Van Ryzin, J. (1976), Nonparametric Bayes Estimation of Survival Curves from Incomplete Observations, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 897-902.
12. Susarla, V. and Van Ryzin, J. (1976), Large Sample Theory for a Bayesian Nonparametric Survival Curve Estimator based on Censored Samples, *The Annals of Statistics*, 6, 755-768