종속 생산공정에 대한 Bayesian 샘플링 검사방식의 경제적 설계+

신완선 · 김대중
성균관대학교 산업공학과

Economic Design of Bayesian Acceptance Sampling Plans for Dependent Production Process

Wan Seon Shin · Dae Joong Kim
Dept. of Industrial Engineering, Sung Kyun Kwan University

Abstract

This article studies the design of Bayesian single attribute acceptance sampling plans under dependent production processes. An economic model is constructed by extending the mathematical model developed for non-Bayesian cases for Bayesian cases. The mathematical structure of the model is analyzed and it is used to prove that optimization of the model can be achieved by applying the solution method developed for non-Bayesian models directly. The effect of dependence patterns and the types of prior distributions on the design of sampling plans is also investigated through a computational study.

1. 서론

최근 생산시스템의 자동화가 이루어짐에 따라 기존의 품질관리기법들도 자동화된 생산시스템에 효율적으로 적용될 수 있도록 개선되어지거나 새로운 방법이 모색되어 지고 있다. 자동화된 생산시스템이 생산제품의 품질에 미치는 영향중의 하나는 품질특성치의 종속성이다. 기존의 방법들은 제품들 사이에 얼마간의 종속성이 있을지라도 제품을 랜덤하게 샘플링한다는 가정하에 품질의 독립성을 가정하고 있다. 그러나, 자동화된 생산라인

+ 본 연구는 한국과학재단의 핵심전문연구의 일부지원에 의해 수행되었음.

에서는 제품을 한 장소에서 랜덤하게 섞어서 뽑기가 어려울 뿐 아니라, 공정이 안정되고 품질관리의 방법이 다양해서 품질의 미세한 변화와 각 제품품질의 특성치간에 종속성의 패턴을 쉽게 파악할 수 있으므로 무리하게 독립성을 가정할 필요성이 줄어들고 있다. 최근에 발표된 종속성을 고려한 논문들은 종속성이 있는 제품들의 특성을 무시한 샘플링 기법은 잘못된 결과를 초래할 수 있다는 것을 여러면에서 증명해 주고 있다.

샘플링 검사방식에 대한 경제적 모델은 품질과 검사과정 중에 발생하는 총 비용을 정량적 평가지표로 나타내어서 모델을 최적화하는 샘플링검사를 설계하는 사후 품질관리 기법이다. 경제적 모델은 Hald(1960) 이후 활발히 연구되기 시작해서 지금까지도 다양하게 사용되고 있다.

일차 계수샘플링(attribute sampling)과 경제적 모델에 대해 지금까지의 연구를 요약하면 다음 〈표 1〉과 같다.

〈 표 1 〉 샘플링 검사에 관한 연구내용별 분류

	독립(independent)	종속(dependent)
Non-Bayesian	· 일차 계수 및 목적식(비용) – Hald(1960) · 경제적 모델에 대해 조사 – Whetherill과 Chiu(1975) · 계량 및 계수의 혼합 형태 – Ailor(1975) · 효용함수를 이용한 Bicriterion 모델 – Moskowitz et al.(1982) · Bicriterion(비용과 품질) – Ravindran et al.(1986) · Bicriterion – 검사 오류를 고려 – Shin과 Lingayat(1992) · Multiattribute(경제적 모델) – Schmidt와 Bennett(1972)	· Two-state-Polya process형태의 종속성 – Sarkadi와 Vincze(1974) · Markov process형태의 종속성 – Bhat, Lal과 Karunaratne(1990) · 연속 샘플링검사(Markov 종속성) – Sampathkumar(1984) · 시계열 형태의 종속(ARMA(1, 1)) – 시뮬레이션을 이용하여 모델 분석 – Nelson(1994) · 경제적 모델을 세워 종속의 패턴 분석 – 유와 황(1993)
Bayesian	· Bayesian algorithm을 이용한 최적 샘플링 기법 – Moskowitz와 Berry(1976) · 효용함수이용(Multiobjective인 경우) – Evans와 Alexander(1987) · Goal programming을 이용 – Ravindran et al.(1986) · Bayesian Multiattribute sampling plan – Moskowtz et al.(1984) · Multiattibute의 단계적 검사모델 – Tang(1976)	연구가 되어 있지 않음

위의 표를 살펴보면 Non-Bayesian이면서 독립인 경우는 오래전 부터 많은 연구가 되어 있으며, 종속인 경우는 최근에 연구가 이루어지고 있다. 제품의 품질이 종속일 때 경제적 모델을 고려한 논문이 최근 유와 황(1993)에 의해 제시되었다. 그러나 그들은 Non-Bayesian경우만 고려했고 종속의 패턴도 ARMA(1, 1)와 Markov Process만을 다루었

다. Bayesian 경우는 모델이 비교적 복잡하여서 품질이 독립인 경우는 연구가 되어 있지만 종속인 경우는 아직 연구된 것이 없다.

본 연구의 목적은 제품 품질의 종속성을 고려한 샘플링 검사방식의 설계를 위해서 아직 연구되어 있지 못한 Bayesian 종속인 경우에 대한 경제적 모델을 세우고, 모델을 분석하며, 그리고 롯트의 평균기대검사비용(Average Lot Inspection Cost : ALIC)과 평균출검품질(Average Outgoing Quality : AOQ)이 종속성의 패턴과 사전분포(prior distribution)에 의해 어떻게 영향을 받는지를 비교 분석하는 것이다.

2. 일차 계수샘플링을 위한 수리모델의 설정

여기에서 고려하는 일차 계수샘플링 검사는 다음과 같은 방법으로 시행된다. 제품 생산라인에서 롯트의 크기가 N이라고 하고 이 롯트로 부터 n개의 샘플을 뽑았다고 하자 샘플 중에서 나온 불량품의 수가 합격판정갯수 c보다 크면 롯트를 기각하고 그렇지 않은 경우에는 롯트를 채택한다. 기각된 롯트는 전수점수를 실시하고 이때 나온 불량품은 양품으로 대체시킨다 Bayesian 종속인 경우에 대해서 경제적 모델을 세우는 데 사용되는 기호들을 정의하면 다음과 같다.

N	: 롯트의 크기
n	: 샘플의 크기
c	: 합격판정갯수
f_i	: i번째 제품의 불량률
f	: 로트 불량률의 합 ($f = \sum_{i=1}^{N} f_i$)
y	: 샘플에서 나온 불량갯수
$ALIC$	: 롯트의 평균기대검사비용
$NCHK$	: 최적해를 찾기위해 비교하는 (n, c)의 횟수
AOQ	: 평균출검품질
Q	: AOQ의 상한값 (= 9%)
n_{max}	: 샘플크기의 최대값 (= 50)
c_s	: 단위 표본당 검사비용
c_r	: 수리 및 교체비용
c_p	: 페널티 비용 – 롯트가 기각될 경우 부과되는 벌과금

Bayesian 접근법에서 수리적인 모델은 제품의 품질이 독립인 경우와는 달리 종속성과 사전분포의 형태에 의해 불량률 f_i가 변하기 때문에 모델을 세우기가 그리 쉬운 작업이 아니다. 개개의 제품이 Bayesian을 따른다고 하면 모델이 너무 복잡하여 현실성이 없다 따라서 본 연구에서는 로트 불량률의 합이 Bayesian을 따른다는 가정하에 모델을 전개한다.

롯트 불량률($f=\sum_{i=1}^{N} f_i$)이 사전분포 $v(f)$를 따른다고 하자. 여기서 f가 주어지면 샘플속에서 발견될 수 있는 불량품 수의 분포는 $P_n(y \mid f)$이고 이것은 시뮬레이션에 의해 얻을 수 있다. 이것을 이용하여 불량품 수의 marginal 분포를 구해보면 다음과 같다.

$$P_n(y) = \sum_f v(f) P_n(y \mid f) \tag{1}$$

식(1)을 가지고 불량률에 대한 사후분포(Posterior distribution)를 구해보면 식(2)와 같이 된다.

$$P_n(f \mid y) = v(f) P_n(y \mid f) / P_n(y) \tag{2}$$

위의 식(1)과 (2)를 이용하여 연구에 필요한 두가지 함수, 롯트의 평균기대검사비용($ALIC$)과 평균출검품질(AOQ)을 구해보면 다음과 같다. 이 모델은 기존의 모델과 최근 발표된 유와 황(1993)의 연구를 고려해서 Bayesian 종속인 경우로 확장시킨 것이다.

롯트 평균기대검사비용($ALIC$)
종속성을 고려한 모델의 평균기대검사비용은 다음 식(3)과 같이 얻을 수 있다.

$$ALIC = nc_s + (1-P_a)c_p + \sum_{y=0}^{c} P_n(y) y c_r + (N-n)c_s \sum_{y=c+1}^{n} P_n(y) + \sum_{y=c+1}^{n} P_n(y) \sum_f P(f \mid y) \sum_{i=1}^{N} f_i c_r \tag{3}$$

여기서

nc_s = 샘플검사비용

$(1-P_a)c_p$ = 롯트가 기각되었을 때 발생하는 페널티 비용

$\sum_{y=0}^{c} P_n(y) y c_r$ = 샘플에서 발견된 불량품의 교체비용 또는 수리비용

$(N-n)c_s \sum_{y=c+1}^{n} P_n(y)$ = 롯트가 기각되었을 때 샘플외의 나머지 제품의 검사비용

$\sum_{y=c+1}^{n} P_n(y) \sum_f P_n(f \mid y) \sum_{i=1}^{N} f_i c_r$ = 롯트가 기각되었을 때 샘플이외의 제품에 대한 검사에서 발견된 불량품의 교체 또는 수리비용이다

f_i는 f가 주어졌을 때 f으로 부터 얻을 수 있는 i번째 제품의 불량률이다.

평균출검품질(AOQ)
샘플링 검사에서는 불합격된 롯트에 대해서 전수검사를 실시하여 불량품과 양품을 선별한 다음 불량품을 양품으로 대체시킨 후 그 롯트를 내보낸다. 이러한 경우에 롯트가 검사 전의 불량률과 검사 후의 불량률이 달라지게 되는데, 이때 검사 후의 롯트의 평균불량률을 평균출검품질이라고 한다. 이것을 Bayesian 종속인 경우에 고려하면 다음과 같은 AOQ함수를 얻을 수 있다.

$$AOQ = \frac{\sum_{y=0}^{t} P_n(y)\{\sum_{f} P_n(f \mid y) \sum_{i=n+1}^{N} f_i'}{N} \tag{4}$$

일반적으로 샘플링 검사방식을 설계할 때에는 AOQ의 최대값인 평균출검품질한계(Average Outgoing Quality Limit : AOQL)를 사전에 정하여, 검사 후 롯트의 품질이 최악의 경우에도 AOQL보다 나쁘지 않도록 조정한다.

3. 수리모델 분석 및 해법

샘플링 검사의 설계, 즉 최적 샘플크기와 합격판정갯수를 구하기 위해서 위의 식(3)과 (4)의 함수를 이용하여 아래와 같은 수리적 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{최소화} \quad ALIC \\ &\text{제약식} \quad AOQ \le Q \\ &\qquad\qquad 0 \le c \le n \le n_{max} \end{aligned} \tag{5}$$

위의 식(5)는 가능해인 n과 c가 양의 정수이므로 정수 계획법이 되고 확률함수가 관련되므로 기존의 방법으로는 쉽게 해를 구하기 어렵다. 본 연구에서는 $ALIC$와 AOQ가 n과 c의 변화에 따라 어떻게 변하는 지를 알아보고 이러한 특징들을 이용하여 해법을 개발하고자 한다. 물론 모든 n과 c를 조사하면 해를 찾을 수 있긴 하지만, Bayesian 경우에서도 Non-Bayesian 경우 처럼 $ALIC$와 AOQ의 특징이 n과 c의 변화에 따라 구조가 계단형으로 나타남을 보임으로 Ravindran et al.(1986), Shin과 Lingayat(1992), 그리고 Nelson(1994)이 보인 특징들을 이용하고자 한다. Non-Bayesian 종속인 경우의 경제적 모델에 대해서 유와 황(1993)의 연구에서 밝힌 모델의 구조적 특성과 크게 다를 것이 없음이 밝혀진다.

[정리 1] 샘플의 크기가 n이고, 합격판정갯수가 c일 때, 합격확률 P_a는 다음과 같은 특징을 갖는다.

(i) P_a는 n이 증가할 때 감소한다.

(ii) P_a는 c가 증가할 때 증가한다.

(증명은 APPENDIX A에 되어 있음)

[정리 2] 평균기대검사비용 ALIC함수는 다음과 같은 특징을 갖는다.

(i) $ALIC$는 n이 증가할 때 단조증가 한다.

(ii) $ALIC$는 c가 증가할 때 단조감소 한다.

(증명은 APPENDIX A에 되어 있음)

[정리 3] 평균출검품질 AOQ함수는 다음과 같은 특성을 갖는다.

(i) AOQ는 n이 증가할 때 단조감소 한다.
(ii) AOQ는 c가 증가할 때 단조증가 한다.
(증명은 APPENDIX A에 되어 있음)

Bayesian 경우의 비용함수와 품질함수가 위의 정리들을 만족하므로 이들 함수의 구조적 특징때문에 다음의 따름정리를 이끌어 낼 수 있다.

[따름정리 1] AOQ는 $n \geq \bar{n}$이고 $c \leq \bar{c}$인 경우에 대해서는 $AOQ(\bar{n}, \bar{c}) \leq Q$이면 항상 $AOQ(n, c) \leq Q$가 된다.
[따름정리 2] 최적해는 항상 가능해 구역의 corner point들 중에 존재한다.
(증명은 유와 황(1993)의 논문을 참조하기 바람)

[따름정리]의 결과로 부터 만일 임의의 $(\bar{n}, \bar{c})$가 가능해라고 한다면 $\bar{n}$보다 큰 n에 대해서 혹은 $\bar{c}$보다 작은 c에 대해서는 반드시 가능해가 된다. 이것은 해를 찾는 과정에서 모든 n과 c에 대해서 조사할 필요없이 가능한 해를 따라가면 가능영역(feasible region)이 계단형태로 나타나기 때문에 계단의 가장자리인 corner point들을 비교하면 효과적으로 해를 찾을 수 있다.

위의 정리들은 Bayesian 종속인 경우에 대해서도 Ravindran et al.(1986), Shin과 Lingayat(1992), 그리고 유와 황(1993)의 모델에서와 같은 특징을 나타낸다는 것을 보여준다. 마찬가지로 위의 문제를 해결하는 해법은 유와 황(1993)의 해법과 동일한 형태가 되므로 해법의 과정과 예제는 유와 황(1993)의 연구에서 볼 수 있기때문에 이 논문에서는 생략한다.

4. 실험분석

여기서는 종속성의 패턴과 Bayesian 패턴에 샘플링 검사 계획에 미치는 영향을 살피기 위해서 다양한 수치실험을 실시해 본다.

품질 종속성의 패턴으로 다음의 4가지 형태를 고려한다:

(1) 시계열 ARMA(1, 1) 형태의 종속
(2) Markov Process 형태의 종속
(3) 증가형태의 종속
(4) 감소형태의 종속

ARMA(1, 1)와 Markov모델은 유와 황(1993)에 의해 구체적으로 비교되었다. 증가형태와 감소형태도 기계의 마모율이나 직업환경에 의해 불량률이 증가하는 경우, 또는 공정이 진행됨에 따라 점차 안정되어 가면서 불량률이 감소하는 경우와 같이 실제로 일어날 수 있는 종속의 패턴으로 볼 수 있다.

증가패턴은 평균 불량률을 일정하게 유지하면서 초기 불량률에서 일양하게 증가하는 모델을 가정했다. 이 경우에 i번째 제품의 불량률은

$$f_i = \alpha f_{i-1}$$

가 된다. 여기서 초기 불량률 f_1이 주어졌다면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_i = \alpha^{i-1} f_1$$

양변에 합을 취한 후 롯트크기로 나누면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i}{N} = \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1} f_1 \qquad (6)$$

위의 식(6)에서 초기 불량률(f_1)이 주어지면 Bisection 최적화 방법을 사용하여 $\alpha(\geq 1)$를 구하고 이것을 이용하여 불량률이 증가하는 모델을 세울 수 있다. 감소형태인 경우도 이와 마찬가지 방법으로 초기불량률(f_1)이 주어지면 $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$를 결정한다.

Bayesian 패턴이 모델에 어떠한 영향을 미치는 지를 알아보기 위해 〈표 2〉와 같은 사전 분포를 고려한다 (Moskowitz와 Berry(1976)).

〈표 2〉 롯트 불량률에 대한 사전분포(Prior distribution)

분포 / 불량률	Left-skewed	Normally shaped	Right-skewed	Bimodal
0.07	0.01	0.0625	0.64	0.06250
0.08	0.03	0.1250	0.11	0.25000
0.09	0.05	0.1875	0.09	0.15625
0.1	0.07	0.2500	0.07	0.06250
0.11	0.09	0.1875	0.05	0.15625
0.12	0.11	0.1250	0.03	0.25000
0.13	0.64	0.0625	0.01	0.06250

본 연구에서는 다음과 같은 기본 문제를 이용해서 샘플링 검사와 비용함수에 미치는 영향을 살펴본다. 비교의 공정을 위해서 4가지 형태 모두에 대해서 롯트 총 불량률은 같게 조정하였다.

〈예제〉 최소화 $ALIC$

제약식 $AOQ \leq 0.09$

$0 \leq c \leq n \leq n_{\max}$

$c_s = 10,\ c_r = 300,\ c_p = 10000$

$n_{\max} = 50,\ N = 300$

이 실험연구를 위해서 앞에서 언급한 구조적 특성에 근거해서 유와 황(1993)에 의해 제

시된 해법을 c-프로그램 언어를 이용하여 프로그래밍했고, IBM 486 호환기종을 이용해서 시뮬레이션을 1000번 실행한 결과가 〈표 3~6〉에 나타나 있다.

이 수치 실험연구에서 얻은 분석결과는 다음과 같다:

4.1 사전분포가 모델에 미치는 영향:

Left-skewed된 경우 분포의 평균불량률이 0.1209로 불량률이 클 확률이 높기 때문에 샘플의 크기를 증가시켜 불량으로 인한 손실을 줄이려고 하고 있다. 사전분포가 right-skewed된 경우는 평균불량률이 0.07로 낮아지므로 불량이 나올 가능성이 적고 *AOQ*값도 작아지므로 샘플의 크기가 작게 나타난다. Normally shaped나 bimodal 분포는 skewed된 분포와는 달리 분포가 평균불량률을 기준으로 좌우대칭임으로 샘플의 크기가 비슷하게 나타나지만, normally shaped와 bimodal에 의한 사전분포가 미치는 영향이 bimodal의 경우가 normally shaped에 비교해서 분산이 크므로 실제 응용시에는 산포가 큰 결과를 나타낼 것이다.

4.2 종속성의 패턴이 미치는 영향:

〈표 3〉은 ARMA(1, 1) process에 대한 사전분포와 종속성을 동시에 고려한 것이다. 표에 의하면 종속성의 정도를 나타내는 θ와 ϕ 가 변함에 따라 *ALIC*의 차이가 많이 남을 볼 수 있다. 사전분포에 대해서는 left-skewed된 분포가 큰 샘플크기에 의해 비용이 가장 많이 나타나고 있다.

Markov process도 θ와 ϕ 가 변함에 따라 비용차이가 많이 나며 크게는 290정도 차이가 나는 것도 있어서 종속성이 모델에 미치는 영향이 크다는 것을 알 수 있다. 자세한 결과는 〈표 4〉에 나타나 있다.

증가패턴은 증가율(즉, 초기치의 정도)에 의해 불량률이 결정되기 때문에 종속성보다는 초기 불량률에 크게 영향을 받는다. 〈표 5〉는 초기 불량률을 변화시키면서 결과를 구한 것인데 종속성의 관점에서 보면 초기치가 적을수록(즉, 기울기가 클수록) 종속성이 크다고 볼 수 있다. 예상대로 초기 불량률이 커지면 *ALIC*가 큰 폭으로 감소하는 특징을 나타내고, right-skewed 분포에서는 초기불량률이 커지면 증가패턴의 영향으로 미세하게 *ALIC*가 증가함을 알 수 있다.

감소패턴에서는 증가패턴과 반대의 특성을 나타내며 초기 불량률에 의해 *ALIC*가 큰 차이를 보이고 있어 감소모델을 설정할 때 초기 불량률이 모델에 미치는 영향이 크다는 것을 알 수 있다. 〈표 6〉은 초기 불량률이 감소할 때 얻은 수치 결과를 나타낸 것이다.

4.3 종속성과 Bayesian 형태가 해법에 미치는 영향:

본 연구에서 최적해(n, c)를 결정하기 위해 사용된 해법은 모든 가능해를 비교해야만 하는 열거법(complete enumeration)과는 달리 적은 수의 (n, c)를 비교해서 해를 찾는다. 비교횟수는 종속성의 패턴이나 사전분포 형태에 의존하기 보다는 제한식($AOQ \leq Q$)의 정도에 의존한다는 것을 알 수 있다. 즉 right-skewed인 경우 횟수가 적은데 이것은 사전분포에 의한 영향이기 보다는 제한조건을 만족하는 해가 적어도 발생하므로(최적 *AOQ* 값을 참조하기 바람), Q가 다른 값으로 대치되면 다른 경우와 마찬가지로 될 수 있다.

〈표 3〉 $AOQ \le 9(\%)$를 만족하는 ARMA(1, 1) process의 최적해

종속성	사전분포	Left-skewed	Normally shaped	Right-skewed	Bimodal
$\theta=0.0$ $\phi=0.0$	n	48	31	1	28
	c	8	10	1	11
	ALIC	4579.25	1298.50	35.80	1105.30
	AOQ	8.9507	8.9869	7.8319	8.9970
	NCHK	59	81	51	78
$\theta=0.0$ $\phi=0.25$	n	47	33	1	28
	c	8	11	1	10
	ALIC	4870.78	1338.90	47.50	1157.80
	AOQ	8.9037	8.9890	7.8335	8.9897
	NCHK	59	83	51	78
$\theta=0.0$ $\phi=0.5$	n	46	29	1	31
	c	8	10	1	9
	ALIC	4796.86	1217.00	49.30	1263.10
	AOQ	8.8910	8.9923	7.8956	8.9630
	NCHK	59	79	51	81
$\theta=0.25$ $\phi=0.0$	n	47	31	1	34
	c	8	10	1	10
	ALIC	4862.84	1265.20	41.50	1419.40
	AOQ	8.9227	8.9813	8.0073	8.9837
	NCHK	59	81	51	84
$\theta=0.25$ $\phi=0.25$	n	46	29	1	30
	c	8	8	1	11
	ALIC	4704.28	1188.12	48.40	1293.40
	AOQ	8.9837	8.9923	7.9146	8.9953
	NCHK	59	80	51	81
$\theta=0.25$ $\phi=0.5$	n	50	29	1	28
	c	9	9	1	10
	ALIC	4268.89	1196.60	53.80	1151.50
	AOQ	8.9523	8.9983	7.9319	8.9870
	NCHK	59	79	51	78

〈 표 4 〉 $AOQ \leq 9(\%)$를 만족하는 Markov Process의 최적해

종속성 \ 사전분포		Left-skewed	Normally shaped	Right-skewed	Bimodal
$\theta=0.0$ $\phi=0.0$	n	46	27	1	31
	c	8	9	1	10
	ALIC	4760.14	1089.29	36.99	1252.60
	AOQ	8.9847	8.9899	7.8237	8.9930
	NCHK	59	77	51	81
$\theta=0.0$ $\phi=0.25$	n	46	30	1	30
	c	8	10	1	10
	ALIC	4608.40	1202.99	32.80	1202.10
	AOQ	8.9753	8.9787	7.9810	8.9857
	NCHK	59	80	51	80
$\theta=0.0$ $\phi=0.50$	n	48	30	1	31
	c	8	8	1	10
	ALIC	4719.39	1199.80	32.80	1268.59
	AOQ	8.9420	8.9916	7.9399	8.9963
	NCHK	59	81	51	82
$\theta=0.25$ $\phi=0.0$	n	50	32	1	28
	c	9	9	1	9
	ALIC	4600.20	1275.79	32.50	1106.80
	AOQ	8.9537	8.9763	8.0233	8.9893
	NCHK	60	82	51	78
$\theta=0.25$ $\phi=0.25$	n	46	31	1	30
	c	8	12	1	8
	ALIC	4896.82	1255.89	33.10	1155.90
	AOQ	8.9400	8.9863	7.8719	8.9837
	NCHK	59	81	51	80
$\theta=0.25$ $\phi=0.5$	n	46	24	1	30
	c	8	7	1	9
	ALIC	4694.32	957.990	33.40	1220.50
	AOQ	8.9473	8.9989	7.8089	8.9930
	NCHK	59	74	51	81

〈표 5〉 $AOQ \leq 9(\%)$를 만족하는 증가형태의 최적해

종속성 \ 사전분포		Left-skewed	Normally shaped	Right-skewed	Bimodal
$f_1=0.01$	n	21	37	1	35
	c	0	1	1	1
	ALIC	6290.86	2297.27	14.20	2448.15
	AOQ	8.9487	8.9807	7.8403	8.9890
	NCHK	51	52	51	52
$f_1=0.03$	n	40	41	1	49
	c	2	3	1	4
	ALIC	6110.80	2019.27	16.30	1922.41
	AOQ	8.7877	8.9813	7.8587	8.9947
	NCHK	53	54	51	55
$f_1=0.05$	n	46	50	1	50
	c	4	7	1	7
	ALIC	5727.34	1569.99	21.70	1488.30
	AOQ	8.9056	8.9867	7.9083	8.9713
	NCHK	55	58	51	58
$f_1=0.07$	n	49	42	1	40
	c	6	9	1	9
	ALIC	5313.68	1429.46	26.50	1335.99
	AOQ	8.9953	8.9950	7.8437	8.9993
	NCHK	57	94	51	92
$f_1=0.09$	n	46	34	1	32
	c	7	10	1	10
	ALIC	5186.91	1275.10	27.70	1141.70
	AOQ	8.9777	8.9827	7.7853	8.9857
	NCHK	58	84	51	82

〈 표 6 〉 $AOQ \leq 9(\%)$를 만족하는 감소형태의 최적해

종속성 \ 사전분포		Left-skewed	Normally shaped	Right-skewed	Bimodal
$f_1=0.2$	n	44	17	1	15
	c	18	9	1	9
	ALIC	3356.59	1128.79	62.80	1040.40
	AOQ	8.9403	8.9513	7.8557	8.9873
	NCHK	94	67	51	65
$f_1=0.18$	n	47	17	1	19
	c	18	10	1	12
	ALIC	3309.13	1080.50	56.20	1177.30
	AOQ	8.9947	8.9880	7.8147	8.9907
	NCHK	98	67	51	69
$f_1=0.16$	n	49	18	1	18
	c	14	9	1	8
	ALIC	3579.03	976.20	42.40	1003.50
	AOQ	8.9860	8.9587	7.9267	8.9747
	NCHK	65	68	51	68
$f_1=0.14$	n	50	22	1	21
	c	12	9	1	10
	ALIC	3914.80	1163.20	39.40	1038.90
	AOQ	8.9667	8.9500	7.7527	8.9903
	NCHK	63	72	51	71
$f_1=0.12$	n	49	28	1	27
	c	10	10	1	15
	ALIC	4338.31	1268.50	41.50	1182.89
	AOQ	8.9238	8.9840	7.8560	8.9780
	NCHK	61	78	51	77

4.4 시뮬레이션 프로그래밍이 해법에 미치는 영향:

본 연구는 합격확률 P_a를 시뮬레이션을 이용해서 계산하고 $ALIC$와 AOQ도 같은 방법으로 계산한다. 이 경우에 주어진 (n, c)에 대해서 여러 롯트의 특성을 이용해서 P_a, $ALIC$와 AOQ를 추정하면 분석된 수리모델의 특성이 random error에 의해서 어긋날 수도 있다(즉, 정리들이 사실이 아닐 수도 있다). 이것은 특히 시뮬레이션 횟수가 적은 경우에 더욱 그러하므로 PC를 이용할 때는 같은 롯트에 대해서 모든 (n, c)를 고려하고 그 뒤 순차적으로 롯트를 바꾸어서 처리해야만 한다. 과정은 결국 해법이 모든 (n, c)에 대한 $ALIC$와 AOQ값을 계산해야 하므로 비 효율적이다. 현재 우리들은 이 문제를 해결하는 방법을 개발 중에 있다.

5. 결론

생산시스템의 자동화 추세에 따라 기존의 품질관리 기법들도 변화하고 개선되어야 함은 당연하다. 본 연구에서는 그간에 종속에 대한 연구가 Bayesian모델은 복잡하다는 이유로 Non-Bayesian에 치중되어 있었던 것을 Bayesian까지 확장하여 전개 하였다.

Bayesian 모델에서 사전분포와 종속의 형태를 변화시켜 보면서 결과를 분석하였는데 사전분포에 의해 $ALIC$와 AOQ가 큰 차이가 있음을 보였고 종속의 패턴에 대해서는 ARMA(1, 1)와 Markov process에서 θ와 ϕ 가 변함에 따라(즉, 종속성의 정도에 따라) $ALIC$와 AOQ가 큰 차이를 보였다. 또한 증가패턴과 감소패턴인 경우에는 초기 불량률에 크게 영향 받음을 알 수 있었다. 지금까지의 연구를 종합해 볼 때, Bayesian 종속인 경우도 Non-Bayesian 종속의 경우와 모델의 특성은 크게 다른 것이 없지만 결과가 종속성과 사전분포에 영향을 받으므로 이런 점을 현장에서 고려해야 된다고 판단된다.

추후 연구과제로는 경제적 모델이 가정에 따라 항상 수학적 규명을 하면서도 시뮬레이션 등을 이용해서 최적 샘플링 검사방식을 설계하므로, 통합 방법을 연구해서 가정에 의존하지 않고 총괄적으로 쓰일 수 있도록 해법의 개발이 필요하다.

참고문헌

[1] 유정상, 황의철(1993), "Markov 종속 생산공정에서의 경제적 샘플링 검사방식", 품질관리학회지, 21권. 1호, pp. 65−77.

[2] Ailor, R. H., Schmidt, J. W. and Bennet, G. K.(1975), "The Design of Economic Acceptance Sampling Plans for a Mixture of Variables and Attributes," *AIIE Transactions*, Vol. 7, pp. 270−278.

[3] Bhat, U. N., Lal, R. and Karunaratne, M.(1990), "A Sequential Inspection Plan for Markov Dependent Production Processes," *IIE Transactions*, Vol. 22, pp. 56−64.

[4] Evans, G. W. and Alexander, S. M.(1987), "Multiobjective Decision Analysis

for Acceptance Sampling Plans," *IIE Transactions*, Vol. 19, No. 3, pp. 308 − 316.

[5] Hald, A.(1960), "The Compound Hypergeometric Distribution and a System of Single Sampling Inspection Plans Based on Prior Distributions and Costs," *Technometrics*, Vol. 2, No. 3, pp. 275 − 340.

[6] Moskowitz, H. and Berry, W.(1976), "A Bayesian Algorithm for Determining Optimal Single Sample Acceptance Plans for Product Attributes," *Management Science*, Vol. 22, pp. 12 − 38.

[7] Moskowitz, H. and Robert, P.(1984), "Effect of Risk Aversion on Single Sampling Attribute Inspection Plans," *Management Science*, Vol. 30, No. 10, pp. 1226 − 1237.

[8] Moskowitz, H., Plante, R., Ravindran, A. and Tang, K.(1984), "Multiattribute Bayesian Acceptance Sampling Plans for Screening and Scrapping Rejected Lots," *AIIE Transactions*, Vol. 16, No. 2, pp. 185 − 192.

[9] Moskowitz, H., Ravindran, A., Klein, G. and Eswaran, P. K.(1982), "A Bicriterion Model for Acceptance Sampling," *TIMS/Studies in the Management Sceinces*, Vol. 19, pp. 305 − 322.

[10] Nelson, B.(1994), "Estimating Acceptance Sampling Plans for Dependent Production Processes," *IIE Transactions*, Forthcoming.

[11] Ravindran, A., Shin, W. S., Arthur, J. and Moskowitz, H.(1986), "Nonlinear Integer Goal Programming Models for Acceptance Sampling," *Computers & Operations Research*, Vol. 13, No. 6, pp. 611 − 622.

[12] Sampathkumar, V. S.(1984), "A Tightened m-Level Continuous Sampling Plan for Markov Dependent Production Processes," *IIE Transactions*, Vol. 16, pp. 257 − 261.

[13] Sarkadi, K. and Vincze, I.(1974), *Mathematical Methods of Statistical Quality Control*, Academic Press, N. Y..

[14] Schmidt, J. W. and Bennet, G. K.(1972), "Economic Multiattribute Acceptance Samplin" *AIIE Transactions*, Vol. 4, pp. 184 − 199.

[15] Shin, W. S. and Lingayat, S.(1992), "Design of Acceptance Sampling Plans under Varying Inspection Error," *IIE Transactions*, Vol. 24, No. 2, pp. 111 − 120.

[16] Tang, K., Plante, R. and Moskowitz, H.(1987), "Stepwize Inspection in Bayesian Multiattribute Acceptance Sampling," *Naval Research Logistics*, Vol. 34, pp. 469 − 485.

[17] Wetherill, G. B. and Chiu, W. K.(1975), "A Review of Acceptance Sampling Schemes with Emphasis on the Economic Aspect," *Int. Statist. REv.*, Vol. 43, No. 2, pp. 191 − 210.

APPENDIX A

합격확률 P_a가 n과 c에 의해 어떻게 변하는가 보기 위해 다음과 같은 기호로 나타내기로 하자.

$$r_{n,c} = Pr[y \geq c+1] = \sum_{y=c+1}^{n} P_n(y) = \sum_{y=c+1}^{n} \{\sum_f v(f) P_n(y \mid f)\} \qquad (\text{기각확률})$$

$$P_a = \delta_{n,c} = Pr[y \leq c] = \sum_{y=0}^{c} P_n(y) = \sum_{y=0}^{c} \{\sum_f v(f) P_n(y \mid f)\} \qquad (\text{합격확률})$$

즉, $r_{n,c} = 1-\delta_{n,c}$이다.

[따름정리 3] (Nelson(1994) 참조)

$n+1$개의 샘플 중에 나올 수 있는 불량품의 수는 n개의 샘플 중에 나올 수 있는 불량품의 수보다 항상 크다. 즉,

$$r_{n+1,c} \geq r_{n,c}, \qquad 0 \leq c \leq n \leq N-1$$

[정리 1의 증명]

(i)의 증명

$$\begin{aligned}\Delta r &= r_{n+1,c} - r_{n,c} \\ &= \sum_{y=c+1}^{n+1} \{\sum_f v(f) P_{n+1}(y \mid f)\} - \sum_{y=c+1}^{n} \{\sum_f v(f) P_n(y \mid f)\} \\ &= \sum_f v(f) \{\sum_{y=c+1}^{n+1} P_{n+1}(y \mid f) - \sum_{y=c+1}^{n} P_n(y \mid f)\}\end{aligned}$$

f가 주어진 경우 [따름정리 3]에 의해 $(\sum_{y=c+1}^{n+1} P_{n+1}(y \mid f) - \sum_{y=c+1}^{n} P_n(y \mid f)) \geq 0$ 이므로 $\Delta r \geq 0$ 이다. Q.E.D.

(ii)의 증명

$$\begin{aligned}\Delta\delta &= \delta_{n,c+1} - \delta_{n,c} = \sum_{y=0}^{c+1} P_n(y) - \sum_{y=0}^{c} P_n(y) \\ &= P_n(c+1) \geq 0\end{aligned}$$

따라서, $\Delta\delta \geq 0$ 이다. Q.E.D.

[정리 2의 증명]

(i)의 증명

$n+1$과 n에 대한 함수값의 차이를 $\Delta ALIC(n)$이라 하면,

$$\begin{aligned}\Delta ALIC(n) &= \Delta ALIC(n+1, c) - \Delta ALIC(n, c) \\ &= (n+1)c_s + r_{n+1,c} c_p + \sum_{y=0}^{c} P_{n+1}(y) y c_r \\ &\quad + (N-n-1)C_s \sum_{y=c+1}^{n+1} P_{n+1}(y) + \sum_{y=c+1}^{n+1} P_{n+1}(y) \{\sum_f P_{n+1}(f \mid y) \sum_{i=1}^{N} f_i\}\end{aligned}$$

$$-(nc_s+(r_{n,c}c_p+\sum_{y=0}^{c}P_n(y)yc_r+(N-n)c_s\sum_{y=c+1}^{n}P_n(y)$$
$$+\sum_{y=c+1}^{n}P_n(y)\{\sum_f P_n(f\mid y)\sum_{i=1}^{N}f_i\})$$
$$=c_s+(r_{n+1,c}-r_{n,c})c_p$$
$$+c_r\{\sum_{y=0}^{c}P_{n+1}(y)y-\sum_{y=0}^{c}P_n(y)y\}+c_s(N-n-1)(r_{n+1,c}-r_{n,c})-c_s r_{n,c}$$
$$+c_r\{\sum_{y=c+1}^{n+1}\sum_f P_{n-1}(y)P_{n+1}(f\mid y)\sum_{i=1}^{N}f_i'-\sum_{y=c+1}^{n}\sum_f P_n(f\mid y)\sum_{i=1}^{N}f_i'\}$$

$\Rightarrow P_n(y)\cdot P_n(f\mid y)=v(f)\cdot P_n(y\mid f)$ 이므로

$$=(1-r_{n,c})c_s \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$
$$+(r_{n+1,c}-r_{n,c})c_p \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (e)$$
$$+c_r\{\sum_{y=0}^{c}P_{n+1}(y)y-\sum_{y=0}^{c}P_n(y)y\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (f)$$
$$+c_s(N-n-1)(r_{n+1,c}-r_{n,c}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (g)$$
$$+c_r\{\sum_{y=c+1}^{n+1}\sum_f v(f)P_n(y\mid f)\sum_{i=1}^{N}f_i'-\sum_{y=c+1}^{n}\sum_f v(f)P_n(y\mid f)\sum_{i=1}^{N}f_i'\cdots (h)$$

식 (d), (f), (g)은 모두 0보다 크거나 같다. 여기서 식(h)만 다시 정리하면

$c_r\sum_f v(f)\sum_{i=1}^{N}f_i\{\sum_{i=1}^{n+1}P_{n+1}(y\mid f)-\sum_{y=c+1}^{n}P_n(y\mid f)\}\ge 0$ 이기 때문에 $\Delta ALIC(n)\ge$ 0 이다. Q.E.D.

(ii)의 증명

$c+1$과 c에 대한 함수값의 차이를 $\Delta ALIC(c)$이라 하면,

$$\Delta ALIC(c)=ALIC(n,c+1)-ALIC(n,c)$$
$$=nc_s+r_{n,c+1}c_p+\sum_{y=0}^{c}P_n(y)yc_r+(N-n)C_s\sum_{y=c+2}^{n}P_n(y)$$
$$+\sum_{y=c+2}^{n}P_n(y)\{\sum_f P_n(f\mid y)\sum_{i=1}^{N}f_i\}$$
$$-(nc_s+r_{n,c}c_p+\sum_{y=0}^{c}P_n(y)yc_s+(N-n)c_s\sum_{y=c+1}^{n}P_n(y)$$
$$+\sum_{y=c+1}^{c}P_n(y)\{\sum_f P_n(f\mid y)\sum_{i=1}^{N}f_i\})$$
$$=P_n(c+1)(c+1)c_r-(N-n)c_sP_n(c+1)+(r_{n,c+1}-r_{n,c})c_p$$
$$+\sum_f v(f)\sum_{i=1}^{N}f_i'\{\sum_{y=c+2}^{n}P_n(f\mid y)-\sum_{y=c+1}^{n}P_n(f\mid y)\}c_r$$
$$=P_n(c+1)(c+1)c_r-(N-n)c_sP_n(c+1)$$
$$+\sum_f v(f)\sum_{i=1}^{N}f_i'P_n(c+1\mid f)c_r$$
$$=(r_{n,c+1}-r_{n,c})c_p$$
$$+P_n(c+1)c_r\{(c+1)-\sum_f v(f)\sum_{i=1}^{N}f_i'\}-(N-n)c_sP_n(c+1)$$

[정리 1]과 $(c+1)-\sum_{f} v(f)\sum_{i=1}^{N} f_i' \le 0$에 의하여 $\Delta ALIC(c) \le 0$ 이다. Q.E.D

[정리 3의 증명]

(i)의 증명

n이 증가하는 경우를 고려하면,

$$
\begin{aligned}
\Delta AOQ(n) &= AOQ(n+1, c)-AOQ(n, c)\\
&= \frac{\sum_{y=0}^{c} P_{n+1}(y)\sum_{f} P_{n+1}(f\mid y)\sum_{i=n+2}^{N} f_i'}{N}-\frac{\sum_{y=0}^{c} P_n(y)\sum_{f} P_n(f\mid y)\sum_{i=n+1}^{N} f_i'}{N}\\
&= \frac{\sum_{y=0}^{c}\sum_{f} P_{n+1}(y)P_{n+1}(f\mid y)\sum_{i=n+2}^{N} f_i'}{N}-\frac{\sum_{y=0}^{c}\sum_{f} P_n(y)P_n(f\mid y)\sum_{i=n+2}^{N}(f_i'+f_{n+1}')}{N}\\
&= \frac{\sum_{y=0}^{c}\sum_{f} v(f)P_{n+1}(y\mid f)\sum_{i=n+2}^{N} f_i'}{N}-\frac{\sum_{y=0}^{c}\sum_{f} v(f)P_n(y\mid f)\sum_{i=n+2}^{N} f_i'}{N}\\
&\quad -\frac{\sum_{y=0}^{c}\sum_{f} v(f)P_n(y\mid f)f_{n+1}'}{N}\\
&= \frac{\sum_{f} v(f)\sum_{i=n+2}^{N} f_i'\{\sum_{y=0}^{c} P_{n+1}(y\mid f)-\sum_{y=0}^{c} P_n(y\mid f)\}}{N}\\
&\quad -\frac{\sum_{y=0}^{c}\sum_{f} v(f)P_n(y\mid f)f_i'}{N}
\end{aligned}
$$

여기서 $\sum_{y=0}^{c} P_{n+1}(y\mid f)-\sum_{y=0}^{c} P_n(y\mid f) \le 0$ 이므로 $\Delta AOQ(n) \le 0$ 이다. Q.E.D.

(ii)의 증명

$$
\begin{aligned}
\Delta AOQ(c) &= AOQ(n, c+1)-AOQ(n, c)\\
&= \frac{\sum_{y=0}^{c+1} P_n(y)\{\sum_{f} P_n(f\mid y)\sum_{i=n+1}^{N} f_i'\}}{N}-\frac{\sum_{y=0}^{c} P_n(y)\{\sum_{f} P_n(f\mid y)\sum_{i=n+1}^{N} f_i'\}}{N}\\
&= \frac{\sum_{y=0}^{c+1}\sum_{f} P_{n+1}(y)P_{n+1}(f\mid y)\sum_{i=n+1}^{N} f_i'}{N}-\frac{\sum_{y=0}^{c}\sum_{f} P_n(y)P_n(f\mid y)\sum_{i=n+1}^{N} f_i'}{N}\\
&= \frac{\sum_{y=0}^{c+1}\sum_{f} v(f)P_n(y\mid f)\sum_{i=n+1}^{N} f_i'}{N}-\frac{\sum_{y=0}^{c}\sum_{f} v(f)P_n(y\mid f)\sum_{i=n+1}^{N} f_i'}{N}\\
&= \frac{\sum_{f} v(f)\sum_{i=n+1}^{N} f_i'\{\sum_{y=0}^{c+1} P_n(y\mid f)-\sum_{y=0}^{c} P_n(y\mid f)\}}{N}
\end{aligned}
$$

여기서 $\sum_{y=0}^{c+1} P_n(y\mid f)-\sum_{y=0}^{c} P_n(y\mid f)=P_n(c+1\mid f) \ge 0$ 이므로 $\Delta AOQ(c) \ge 0$ 이다.

Q.E.D.