株價指數 先物去來를 이용한 期待效用極大化 헤징行態에 關한 硏究

李 敝 圭*

I. 序 論

일반적으로 株價指數 先物去來를 비롯한 金融先物去來의 헤징에 관한 기존의 연구들은 不確實性下에서 最適 투자행위의 여러가지 基準(criterion) 중에서 平均-分散分析(the mean-variance analysis)을 많이 사용하고 있다. 平均-分散分析은 방법론 상의 단순성과 함께 個人均衡條件과 市場均衡條件을 통일적인 체계 내에서 도출할 수 있기 때문에 폭넓게 사용되어 왔지만 매우 한정된 조건하에서만 적용될 수 있다.

Hanson & Ladd(1991)는 確率分의 두 모멘트인 평균과 분산만으로 期待效用函數를 구체화하는 것은 다음의 充分條件 중의 하나를 만족시킬 때에만 期待效用理論의 결과와 일치한다고 하였다.

<條件①> 投資者의 效用函數가 2次函數(quadratic) 형태일 때: J. Tobin(1958,1963)

<條件②> 投資者가 오목한(concave) 效用函數(즉, 위험회피적)를 갖고, 確率分가 正規分(normal distribution)일 때: P.A.Samuelson(1967,1970)

<條件③> 投資者의 수익이 單一確率變數(single random variable)의 單調線形函數 (monotonic linear function)일 때(이것을 the location-scale條件이라고도 한다): J.Meyer(1987)

그러나 2次函數 형태의 效用函數는 소득이 증가할수록 오히려 危險資産에 대한 投資金額이 감소하는 絶對危險回避度가 증가(IARA)하는 특성과, 소득이

*한국투자신탁 조사연구실

어떤 주어진 수준 이상으로 증가하면 負의 限界效用(negative marginal utility)을 나타낸다. 때문에 2次效用函數의 이같은 결함은 그 동안 많은 지적을 받아왔다. 또한 기존의 先物去來와 관련된 헤징에 대한 많은 연구들, 특히 平均-分散基準을 채택하는 연구들은 대부분 현물 및 선물 收益率의 正規結合分布(normally joint distribution) 假定을 적용한다. 그러나 실제로 많은 실증연구들은 資産市場에서 收益率의 分布가 正規分布가 아니고, 특히 單一期間 收益率의 경우 非對稱的(asymmetric)인 分布를 이루고 있음을 제시하고 있다. 그리고 金融先物 특히 株價指數 先物去來를 이용한 헤징연구에 있어서 방법론상의 차이점에도 불구하고 거의 모든 연구들의 공통점은 현물포트폴리오의 수량을 固定된 것으로 가정하고, 헤저는 이에 따라서 最適 선물포지션만을 결정한다는 것이다. 이와 같은 접근법은 비록 분석방법론적으로는 간결성을 제시하지만, 株價指數 先物去來을 이용한 헤지는 다른 金融先物去來보다 交叉헤지(cross hedge)적인 성격이 강하다는 것을 간과하고 있다. 즉 先物價格의 변동이 정확하게 현물주식포트폴리오의 價格變動과 일치하지 않는 베이시스危險이 발생하고, 결과적으로 헤징포지션의 수익이 어느 정도의 범위 내에서 변동하게 된다. 다시말하면 이것은 株價指數 先物去來를 이용한 헤징의 경우 교차헤지(cross hedging)적인 성격이 강해서 거의 모든 경우에 差益去來 기회가 존재한다는 것으로, 보다 적극적인 헤저는 예상되는 差益去來의 기회에 따라서 현물포지션의 數量을 변화시킬 것이다. 따라서 株價指數 先物去來를 이용한 헤징의 경우 差益去來를 포함한 投機的 屬性이 보다 강하게 내재되어야만 한다.[1)]

본 연구의 목적은 이와 같은 기존 연구들의 강한 사전적인 가정이 보다 완화된 株價指數 先物去來를 이용한 헤징行態 分析에 있다. 즉 價格變動 危險과

1) 기존의 일부 연구들은 商品先物(commodity futures)에 價格不確實性과 함께 數量不確實性을 동시에 도입하기도 하였다. 그러나 이들 연구들은 平均-分散基準을 적용하기 위해서 正規分布를 假定하거나 效用函數에 대한 事前的인 특별한 制約을 설정하고 있다.

먼저 McKinnon(1967)은 價格 및 數量(生産)不確實性 사이의 確率的인 相關關係가 先物去來를 이용한 헤지行態에 결정적인 요소라고 하였다. 이후 Rolfo(1980), Anderson & Danthine(1980,1983), Antonovitz & Roe(1986) 등은 모두 價格과 數量의 結合確率分布가 正規分布라고 假定했다. 반면에 Bray(1981), Newbery(1988), Karp(1988), Lapan & Moschini (1994) 등은 絶對危險回避度가 일정(CARA)한 형태라는 구체적인 制約을 가해서 價格 및 數量(生産)不確實性下의 헤지문제를 전개하였다.

함께 數量變動 危險의 도입, 效用函數에 대한 假定의 緩和 및 헤징포지션의 收益率에 대한 確率分布의 假定을 제거하여, 期待效用極大化를 위한 株價指數先物去來의 最適 헤징행태를 분석하고자 한다. 또한 동일한 模型體系 내에서 純粹 헤징, 投機的 및 差益去來의 행태를 동시에 도출할 수 있는 헤징행태를 분석하고자 한다.

II. 헤징行態의 分析

1. 利潤函數의 導出

株價指數先物去來를 이용하여 현물주식포트폴리오의 위험을 제거하고자 하는 헤저의 목적은 다음과 같은 단일기간말 利潤(one period-end profits)의 期待效用極大化에 있다고 가정한다.

$$\tilde{R} = [\ p - \tilde{p}]\ \ \tilde{X} + [\ F - \tilde{F}]\ \tilde{H} - C(\overline{X}) \qquad (1.1)$$

여기서, 윗첨자 ~와 -는 각각 確率變數와 期待値를 의미한다.

p, F : 각각 기초의 현물주식포트폴리오의 가격과 先物指數

(단, $E(p) = \overline{p}$, $E(F) = \overline{F}$)

$\tilde{p}$, $\tilde{F}$: 각각 기말의 현물포트폴리오의 가격과 先物指數

$\tilde{X}$, $\tilde{H}$: 각각 헤징기간 동안 保有하는 현물 주식포트폴리오와 指數先物포지션의 數量

$C(\overline{X})$: 현물주식포트폴리오의 保有費用과 추가적인 收入을 포함하는 오목한(concave) 형태이다. 즉, $C'(\overline{X}) > 0$, $C''(\overline{X}) > 0$

식(1.1)의 헤저의 利潤函數에 現物株式去來와 先物去來에 따른 위험을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 現物株式去來에는 體系的 危險과 非體系的 危險이 발

생하고, 이것은 현물 주식포트폴리오의 價格變動과 現物市場指數의 변동 사이의 관계로 나타낼 수 있다.

$$[\, p - \hat{p}] = \beta(I - \hat{I}) + \Phi_1 \tag{1.2}$$

여기서, I, $\hat{I}$: 각각 기초와 기말의 기말의 現物指數 (단, $E(\hat{I}) = \bar{I}$),

β, Φ_1 : 體系的 危險과 非體系的 危險

또한 差益去來 기회가 존재하지 않을 때의 현물가격과 선물가격의 관계 (fundamental no - arbitrage relation)를 이용해서 다음과 같이 베이시스危險을 모형에 도입한다.

$$F - \hat{F} = I - \hat{I} + \Phi_2 \tag{1.3}$$

여기서, Φ_2 : 베이시스危險

따라서 식(1.2),(1.3)을 식(1.1)에 대입해서 다음과 같은 수익과 위험이 함께 내재된 利潤函數를 도출할 수 있다.

$$\hat{R} = [\, \beta(\bar{I} - \hat{I}) + \Phi_1] \,\hat{X} + [\, \bar{I} - \hat{I} + \Phi_2] \,\hat{H} - C(\overline{X}) \tag{1.4}$$

2. 價格不確實性만이 存在할 경우

먼저 價格不確實性만이 존재할 경우의 最適 헤징포지션 결정을 살펴본다.
헤져가 危險回避的이라는 假定에 따라서 效用函數는 다음과 같은 성격을 갖는다.

$$\frac{\partial}{\partial R}(U(\hat{R})) > 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial R^2}(U(\hat{R})) < 0 \quad (\text{각각 } U'(\cdot)\text{과 } U''(\cdot)\text{으로 표시한다})$$

期待效用을 極大化하기 위한 1階條件은 다음과 같다.

$$\underset{X}{Max}\ E[\ U(\hat{R})] \ = E[\ U'(\hat{R})[\ \beta(\bar{I} - \hat{I}) + \Phi_1]\ ] \ = 0$$

$$\text{또는 } E[\ U'(\hat{R})[\ \beta(\hat{I} - \bar{I}) + \Phi_1]\ ] \ = 0 \tag{2.1}$$

$$\underset{H}{Max}\ E[\ U(\hat{R})] \ = E[\ U'(\hat{R})[\ \bar{I} - \hat{I} + \Phi_2]\ ] \ = 0$$

$$\text{또는 } E[\ U'(\hat{R})[\ \hat{I} - \bar{I} + \Phi_2]\ ] \ = 0 \tag{2.1$'$}$$

여기서 $E[\ \cdot]$ 는 期待値 演算子(expectation operator)이다. 條件附 期待限界效用(conditional expected marginal utility) $g(\hat{I}) = E[\ U'(\hat{R})|\hat{I}]$ 과 $E[\ E\{\cdot|\hat{I}\}\ ] = E[\ \cdot]$ 를 이용해서 식(2.1)과 (2.1)'을 재정리하면, 식(2.2)와 식(2.2)'이 도출된다.

$$\begin{aligned} & E[\ U'(\hat{R})[\ \beta(\hat{I} - \bar{I}) + \Phi_1]\ ] \\ = \ & E[\ \beta(\hat{I} - \bar{I}) + \Phi_1]\ E[\ U'(\hat{R})|\hat{I}]\ ] \\ = \ & E[\ g(\hat{I})[\ \beta(\hat{I} - \bar{I}) + \Phi_1]\ ] \ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E[\ U'(\hat{R})[\ \hat{I} - \bar{I} + \Phi_2]\ ] \\ = \ & E[\ \hat{I} - \bar{I} + \Phi_2]\ E[\ U'(\hat{R})|\hat{I}]\ ] \\ = \ & E[\ g(\hat{I})[\ \hat{I} - \bar{I} + \Phi_2]\ ] \ = 0 \end{aligned}$$

現物指數 $\bar{I}$와 $\hat{I}$사이에 유일한 $\tilde{i}$가 존재시 平均値定理(the mean-value theorem)를 이용하면, 條件附 期待限界效用은 $g(\hat{I}) = g(\bar{I}) + (\hat{I} - \bar{I})g'(\tilde{i})$ 가 된다. 現物指數 $\tilde{i}$에서의 利潤函數는

$$\tilde{r} = [\ \beta(\bar{I} - i) + \Phi_1]\ X + [\ \bar{I} - i + \Phi_2]\cdot H - C(\overline{X})$$이다[2].

따라서 식(2.3)과 (2.3)'은

$$\begin{aligned} &-\{\ \beta^2 E[\ U''(\tilde{r})(\tilde{I} - \bar{I})^2] \ + \beta E[\ U''(\tilde{r})\Phi_1(\tilde{I} - \bar{I})]\ \}X^* \\ &-\{\ \beta E[\ U''(\tilde{r})(\tilde{I} - \bar{I})^2] \ + E[\ U''(\tilde{r})\Phi_1(\tilde{I} - \bar{I})]\ \}H^* \\ &+ E(\Phi_1)E[\ U'(\tilde{R})\mid \tilde{I}=\bar{I}] \ = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &-\{\ \beta E[\ U''(\tilde{r})(\tilde{I} - \bar{I})^2] \ + \beta E[\ U''(\tilde{r})\Phi_2(\tilde{I} - \bar{I})]\ \}X^* \\ &-\{\ E[\ U''(\tilde{r})(\tilde{I} - \bar{I})^2] \ + E[\ U''(\tilde{r})\Phi_2(\tilde{I} - \bar{I})]\ \}H^* \\ &+ E(\Phi_2)E[\ U'(\tilde{R})\mid \tilde{I}=\bar{I}] \ = 0 \end{aligned} \tag{2.3$'$}$$

수식의 표현을 간단히 하기 위해서 다음과 같은 記號를 사용한다[3].

$$\mathcal{L}_{XX} \equiv E[\ U''(\tilde{r})(\tilde{I} - \bar{I})^2]\ ,\ \ \mathcal{L}_X \equiv E[\ U'(\tilde{R})\mid \tilde{I}=\bar{I}]$$

$$\mathcal{L}_{X1} \equiv E[\ U''(\tilde{r})\Phi_1(\tilde{I} - \bar{I})] \ = Cov[\ U''(\tilde{r})\Phi_1,\ \tilde{I}] \ = 0$$

$$\mathcal{L}_{X2} \equiv E[\ U''(\tilde{r})\Phi_2(\tilde{I} - \bar{I})] \ = Cov[\ U''(\tilde{r})\Phi_2,\ \tilde{I}]$$

따라서 식(2.3)과 (2.3)'을 각각 最適 선물포지션 H^*에 대해서 정리하면,

$$H^* = -\beta X^* + \frac{E(\Phi_1)\mathcal{L}_X}{\beta\mathcal{L}_{XX}} \tag{2.4}$$

---

2) E.Losq(1982)는 價格 및 數量不確實性下의 期待效用極大化를 위한 헤징比率 추정에 平均値定理를 이용하였고, Yong Sakong(1991)은 이를 옵션가지 포함한 模型으로 확장하였다.

3) $\mathcal{L}_{X1}$과 $\mathcal{L}_{X2}$는 $E(X, Y) = E(X)E(Y) + Cov(X, Y)$의 관계를 이용해서 유도함(단, Φ_1과 $\tilde{I}$는 확률적으로 독립임)

$$H^{*} = -\beta X^{*} + \frac{E(\Phi_2)\mathcal{L}_X}{\mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_{X2}} \tag{2.4)'$$

각 식의 **右邊**의 첫번째 **項**은 **體系的 危險**을 **分散**시키기 위한 **純粹**한 헤징 부분으로, **負**의 **符號**은 현물과 선물에서 서로 반대의 포지션을 취함을 의미한다. **右邊**의 두번째 **項**(H_S로 표기함)은 **投機的** 부분으로 헤저의 **效用函數**의 형태에 따라서 **符號**가 결정된다.

投機的 헤징부분(H_S)의 **符號**와 크기를 결정하기 위해서 각 **項**을 좀더 살펴볼 필요가 있다. 헤저가 **危險回避的**이므로, $U'(\cdot)>0$, $U''(\cdot)<0$이다. 따라서 $\mathcal{L}_X$와 $\mathcal{L}_{XX}$의 **符號**는 다음과 같이 쉽게 결정된다.

$$\mathcal{L}_X \equiv E[\ U'(\tilde{R}) \mid \hat{I} = \bar{I}] > 0,\ \ \mathcal{L}_{XX} \equiv E[\ U''(\tilde{r})(\hat{I} - \bar{I})^2] < 0$$

반면에 $\mathcal{L}_{X2}$의 **符號**는 헤저의 **效用函數**의 형태에 따라서 달라진다[4].

$$\mathcal{L}_{X2} < 0,\ \ U'''(\cdot) < 0$$

(즉, **絶對危險回避度**가 증가할 때(IARA:increasing absolute risk aversion))

$$\mathcal{L}_{X2} > 0,\ \ U'''(\cdot) > 0$$

(즉, **絶對危險回避度**가 증가하지 않을 때(Non-IARA))

---

4) $\mathcal{L}_{X2} \equiv E[\ U''(\tilde{r})\Phi_2(\hat{I} - \bar{I})] = Cov[\ U''(\tilde{r})\Phi_2, \hat{I}]$ 에서 $\frac{\partial}{\partial \hat{I}}[\ U''(\tilde{r})\Phi_2] = U'''(\tilde{r})\frac{\partial \Phi_2}{\partial \hat{I}}\frac{\partial \tilde{i}}{\partial \hat{I}}$ 이므로 $\mathcal{L}_{X2} \gtrless 0$, $U'''(\cdot) \gtrless 0$ (단 $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \hat{I}} > 0$, $\frac{\partial \tilde{i}}{\partial \hat{I}} > 0$).

식(2.4)'의 헤징포지션은 헤저의 效用函數의 형태에 따라서 크기가 결정된다.

$$H^{*} = -[\ \beta X^{*} \pm H_S]\ ,\quad U'''(\cdot) \leq 0 \tag{2.5'}$$

따라서 絶對危險回避度가 증가한다면, 전체 헤징포지션의 크기는 體系的 危險을 相殺시키기 위한 포지션보다 증가($H^{*} > \beta X^{*}$)하고, 반대로 絶對危險回避度가 증가하지 않는다면 작아진다($H^{*} < \beta X^{*}$).

만일 베이시스危險의 期待가 없다면 즉 $E(\Phi_2) = 0$이라면, 最適 헤지比率(optimal hedge ratio)은 $H^{*} = \beta X^{*}$가 된다[5]. 그리고 헤저가 先物指數(또는 現物指數)를 구성하는 전체 종목과 동일하게 자신의 현물포트폴리오를 구성한다면, 베타값이 1이 되므로 현물포지션과 선물포지션의 比率은 傳統的 헤징理論과 동일하게 1:1의 관계가 된다. 반면에 비록 現物指數와 동일하게 현물포트폴리오를 구성한다고 해도, 베이시스危險이 발생할 것이라고 예측되는 한 헤저는 投機的 헤징부분(H_S)을 설정한다.

따라서 본 모형에서 β가 最適 헤지比率이 되기 위해서는 장래 現物指數가 현재 現物指數의 不偏推定値이고, 또한 베이시스危險에 대한 期待가 없을 때, 즉 장래 先物指數가 장래 現物指數의 不偏推定値일 경우에만 가능하다[6].
또한 헤저의 效用函數가 2次函數 형태라면 $U''(\cdot)$은 일정(constant)하므로, 最適 현물 및 선물포지션의 관계는

$$H^{*} = -\beta X^{*} + \frac{E(\Phi_2)E[\ U'(\tilde{R}) \mid \tilde{I} = \bar{I}]}{U''(\cdot)[\ \beta Var(\tilde{I}) + Cov(\Phi_2, \tilde{I})]} = -[\ \beta X^{*} + H_S] \tag{2.6}$$

---

5) 여기서 베타는 先物指數 변화에 대한 現物指數의 변동을 나타내는 것이 아니고, 現物指數 변화에 대한 현물 주식포트폴리오의 가격변화를 나타내는 것이다. 따라서 最小分散 헤지比率(the minimum variance hedge ratio)이 아니고 포트폴리오 베타헤지(portfolio's beta hedge)가 된다.

6) 반면에 Figlewski(1984,1985)는 配當收益이 일정하고 선물포지션이 滿期까지 保有될 때, 베이시스의 변화가 非確率的(nonrandom)이므로 포트폴리오 베타헤지가 도출된다고 하였다. 또한 Kahl(1983) 및 Benninga,Eldor & Zilcha(1984)는 장래 선물가격이 장래 현물가격의 不偏推定値일 경우에 最小分散 헤지比率이 最適 헤지比率이 된다고 하였다.

이므로, $H^{*} > \beta X^{*}$가 된다. 이것은 앞서 도출한 식(2.5)'과는 다르게, 效用函數의 형태와는 무관하게 投機的 부분(H_S)은 항상 純粹 헤징부분과 동일한 포지션을 취한다는 것으로 2次效用函數의 결합을 나타내는 것이다.

따라서 株價指數 先物去來를 이용한 期待效用極大化 헤징에 있어서, 현물주식포트폴리오 保有에 따른 體系的 危險은 指數先物에서 반대의 포지션을 취함으로써 헤지할 수 있다. 반면에 베이시스危險으로 인해 完全헤지(perfect hedge)가 어려우며, 이것은 株價指數 先物去來의 交叉헤지(cross hedge)적인 성격을 잘 나타낸다고 할 수 있다. 또한 이 같은 베이시스危險과 非體系的인 危險의 期待値는 헤저의 效用函數의 형태에 따라서 比例關係 또는 反比例關係일 수도 있다.

또한 價格不確實性만이 존재할 경우 헤저는 純粹 헤징부분과 投機的 부분만을 취하고, 전체 헤징포지션의 크기는 헤저의 效用函數의 형태에 따라서 포트폴리오 베타(portfolio beta)값의 比率보다 크거나 작다.

3. 價格不確實性과 數量不確實性이 同時에 存在할 경우

1) 價格不確實性과 數量不確實性이 獨立的일 경우

먼저 헤징 기간동안 헤저가 市場狀況의 변화에 따라서 자신의 현물포지션의 數量을 변화시키는 數量不確實性을 모형에 도입한다. 헤징 기간동안의 현물포지션의 數量變動은 다음과 같다.

$$\tilde{X} = \overline{X} + (\tilde{X} - \overline{X}) \tag{3.1}$$

식(3.1)을 식(2.3)과 (2.3)'에 대입하면,

$$E[\ U'(\tilde{R}) \mid \tilde{I} = \overline{I}]\ E(\Phi_1) + \beta E[\ U''(\tilde{r})(\tilde{I} - \overline{I})^2[\ -\beta(\overline{X} + (\tilde{X} - \overline{X})) - H]\ ]$$
$$+ E[\ U''(\tilde{r})\Phi_1(\tilde{I} - \overline{I})[\ -\beta(\overline{X} + (\tilde{X} - \overline{X}) - H]\ ]\ = 0 \tag{3.2}$$

$$E[\ U'(\hat{R}) | \hat{I} = \bar{I}]\ E(\Phi_2) + E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2[\ -\beta(\bar{X} + (\hat{X} - \bar{X})) - H]\ ]$$

$$+ E[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{I} - \bar{I})[\ -\beta(\bar{X} + (\hat{X} - \bar{X}) - H]\ ]\ = 0 \qquad (3.2)'$$

期待效用를 **極大化**하기 위한 **最適** 선물포지션 H^*에 대해서 재정리하면,

$$H^* = -\beta\bar{X} + \frac{E(\Phi_1)E[\ U'(\hat{R}) | \hat{I} = \bar{I}]}{\beta E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2]\ \ + E[\ U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{I} - \bar{I})]}$$

$$- \frac{\beta^2 E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2(\hat{X} - \bar{X})]\ + \beta E[\ U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{I} - \bar{I})(\hat{X} - \bar{X})]}{\beta E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2]\ \ + E[\ U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{I} - \bar{I})]}$$

(3.3)

$$H^* = -\beta\bar{X} + \frac{E(\Phi_2)E[\ U'(\hat{R}) | \hat{I} = \bar{I}]}{E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2]\ \ + E[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{I} - \bar{I})]}$$

$$- \frac{\beta E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2(\hat{X} - \bar{X})]\ + \beta E[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{I} - \bar{I})(\hat{X} - \bar{X})]}{E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2]\ \ + E[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{I} - \bar{I})]}$$

(3.3)′

각 식의 **右邊**의 첫번째 **項**은 현물 주식포트폴리오의 포지션에서 발생하는 **體系的 危險**을 헤지하기 위한 **純粹**한 헤징포지션을 나타낸다. **負**의 **符號**는 현물과 선물포지션이 서로 반대임을 의미한다. **右邊**의 두번째 **項**(H_S로 표기함)은 선물거래에서의 **投機的** 부분이고, 마지막 **項**(H_A로 표기함)은 **差益去來** 부분이다. H_S와 H_A의 **符號**는 2절에서의 결과와 마찬가지로 **效用函數**의 형태에 따라 달라진다.

수식을 간단히 하기 위해서 각 **項**을 다음과 같이 **記號**를 사용하고, **符號**를

결정하면 아래와 같다[7].

$$\mathcal{L}_{XXX} \equiv E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2(\hat{X} - \bar{X})]$$
$$= E[\ (\hat{I} - \bar{I})^2 Cov[\ U''(\hat{r}), \hat{X} \mid \hat{I}]\ ] \ \gtrless 0,\ (U'''(\cdot) \gtrless 0)$$
$$\mathcal{L}_{X11} \equiv E[\ U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{I} - \bar{I})(\hat{X} - \bar{X})]$$
$$= Cov[\ U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{X} - \bar{X}), \hat{I}] \ = 0$$
$$\mathcal{L}_{X22} \equiv E[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{I} - \bar{I})(\hat{X} - \bar{X})]$$
$$= Cov[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{X} - \bar{X}), \hat{I}] \ \gtrless 0,\ (U'''(\cdot) \gtrless 0)$$

---

7)

$$\mathcal{L}_{XXX} \equiv E[\ U''(\hat{r})(\hat{I} - \bar{I})^2(\hat{X} - \bar{X})] \ = E[\ (\hat{I} - \bar{I})^2 Cov[\ U''(\hat{r}), \hat{X} \mid \hat{I}]\ ]$$

여기서 條件附 共分散(conditional covariance)의 符號는 다음과 같이 결정된다.

$$\frac{\partial U''(\hat{r})}{\partial \hat{X}} = U'''(\cdot)[\ \beta(\check{i} - \bar{I}) + \Phi_1]\ \frac{\partial \check{i}}{\partial \hat{I}}$$

$\check{i}$는 $\bar{I}$와 $\hat{I}$ 사이의 값이므로, $\check{i} > \bar{I}$이다. 또한 β, Φ_1, $\frac{\partial \check{i}}{\partial \hat{I}}>0$이므로,

$\mathcal{L}_{XXX} < 0\ (U'''(\cdot)<0)$, $\mathcal{L}_{XXX} > 0\ (U'''(\cdot)\geq 0)$

非體系的 危險인 Φ_1과 現物指數 $\hat{I}$는 서로 確率的으로 獨立이므로, $\mathcal{L}_{X11}$의 符號도

$$\mathcal{L}_{X11} \equiv E[\ U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{I} - \bar{I})(\hat{X} - \bar{X})] \ = Cov[\ U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{X} - \bar{X}), \hat{I}] \ = 0$$

이 된다.

$$\mathcal{L}_{X22} \equiv E[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{I} - \bar{I})(\hat{X} - \bar{X})]$$
$$= E[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{X} - \bar{X})]\ E[\ (\hat{I} - \bar{I})] \ + Cov[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{X} - \bar{X}), \hat{I}]$$
$$= Cov[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{X} - \bar{X}), \hat{I}] \quad (\text{단},\ E(\hat{I} - \bar{I}) = 0)$$

共分散의 符號를 살펴보면,

$$\frac{\partial}{\partial \hat{I}}[\ U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{X} - \bar{X})] \ = U'''(\hat{r})\frac{\partial \Phi_2}{\partial \hat{I}}\frac{\partial \hat{X}}{\partial \hat{I}}\frac{\partial \check{i}}{\partial \hat{I}}$$

(단, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \hat{I}}, \frac{\partial \hat{X}}{\partial \hat{I}}, \frac{\partial \check{i}}{\partial \hat{I}} > 0$이다.
)

$\mathcal{L}_{X22} < 0\ ((U'''(\cdot)<0)$, $\mathcal{L}_{X22} > 0\ ((U'''(\cdot)\geq 0)$

따라서 식(3.3)과 (3.3)'을 정리하면 다음과 같다.

$$H^* = -\beta[\ \overline{X} + \frac{\mathcal{L}_{XXX}}{\mathcal{L}_{XX}}] + \frac{E(\Phi_1)\mathcal{L}_X}{\beta\mathcal{L}_{XX}} \qquad (3.4)$$

$$H^* = -\beta[\ \overline{X} + \frac{\mathcal{L}_{XXX} + \mathcal{L}_{X22}}{\mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_{X2}}] + \frac{E(\Phi_2)\mathcal{L}_X}{\mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_{X2}} \qquad (3.4)'$$

식(3.4)'에서 **最適** 선물포지션은 **絶對危險回避度**가 증가 ($U'''(\cdot)<0$)한다면,

$$H^* = -\beta[\ \overline{X} + H_A] - H_S \qquad (3.5)'$$

가 된다. **右邊**의 첫번째 **項**은 β에 의해 결정되는 헤징부분으로, 헤져는 현물 포지션의 **平均的**인 **數量(期待値)** 만큼 **體系的 危險**의 **分散**을 분산시키기 위해서 헤징포지션을 설정한다. 반면에 나머지 변동되는 현물포지션은 **差益去來**를 위한 부분이다. 이때 **純粹** 헤징부분과 **差益去來** 및 **投機的** 부분은 모두 현물 포지션과 **反對**의 **符號**를 갖는다. 따라서 헤징 기간동안 **價格變動**과 함께 현물 포지션의 **數量**이 **變動**할 경우, 전체 헤징포지션 H^*의 크기는 β값의 **比率**보다 커진다.

반면에 **絶對危險回避度**가 증가하지 않는다면, 즉 $U'''(\cdot)>0$일 때,

$$H^* = -\beta[\ \overline{X} + H_A] + H_S \qquad (3.6)'$$

이 된다. 따라서 **純粹** 헤징부분과 **差益去來** 부분은 같은 **符號**를 취하고, **投機的** 부분은 반대포지션을 취한다. 전체 헤징포지션 H^*의 크기는 **差益去來** 부분과 **投機的** 부분의 상대적인 크기에 의해 결정된다. 따라서 전체 헤징포지션

의 크기는 β값의 比率보다 작아진다.

만약 베이시스危險이 없을 것이라고 期待될($E(\Phi_2)=0$) 때, 헤징기간 동안 현물포지션의 變動과 무관하게 投機的 부분은 헤징포지션에 포함되지 않음을 알 수 있다. 반면에 헤징기간 동안 현물포지션의 변화가 없다면 헤져는 현물포지션과 β에 比例하는 만큼만 선물포지션을 취하고, 현물포지션의 數量이 변할 경우에도 현물포지션과 β에 比例해서 선물포지션을 취하는 것은 같지만 두 부분(純粹 헤징부분과 差益去來를 위한 부분)으로 나눌 수가 있다.

여기서 효용함수가 2차함수형태라면 $U''(\cdot)$은 일정하므로, 식(3.4)′은

$$H^* = -\beta[\ \overline{X} + \frac{Cov(\Phi_2(\hat{X} - \overline{X}), \hat{I})}{Var(\hat{I}) + Cov(\Phi_2, \hat{I})}] + \frac{E(\Phi_2)E[\ U'(\hat{R}) \mid \hat{I} = \overline{I}]}{U''(\cdot)[\ Var(\hat{I}) + Cov(\Phi_2, \hat{I})]}$$

가 된다. 따라서 效用函數가 2次函數일 경우 각 항의 符號는 絶對危險回避度가 증가할 때의 결과인 식(3.5)′과 동일해져, 전체 헤징포지션의 크기는 β의 비율보다 커진다.

2) 價格不確實性과 數量不確實性이 從屬되었을 경우

現物指數의 변화와 현물포지션의 數量변화가 確率的인 서로 從屬되었을 경우를 살펴본다.

먼저 전체 現物株式市場에서의 集計的 需要와 供給의 관계를 Losq(1982)가 적용한 방법을 이용해서 다음과 같이 도출한다[8].

$$\widetilde{X^S} = K(\hat{I}),\ \hat{X} = D(\ \widetilde{X^d}\ ;\ \hat{k})$$

여기서, $\widetilde{X^S}$: 集計的 供給, $\widetilde{X^d}$: 集計的 需要,

8) 여기서의 集計的 供給은 株式市場에서 有·無償增資 등의 新規 주식발행을 의미하는 것이 아니고, 단일 기간동안 전체 市場參與者들이 賣渡하고자 하는 數量을 의미한다. 반대로 集計的 需要는 전체 買入하고자 하는 數量을 의미한다.

$\hat{k}$: 集計的 需要와 現物指數에 영향을 미치지않는 개별 헤저의 현물포지션의 不確實性 成分

均衡에서 $\widehat{X^S} = \widehat{X^d}$이므로, 개별 헤저의 현물포지션 數量變動은

$$\hat{X} = D[\ K(\hat{I})\ ;\ \hat{k}]$$

이 된다. 다음과 같이 $\hat{I}$에 대해서 $\hat{X}$를 微分한다.

$$\frac{\partial \hat{X}}{\partial \hat{I}} = \frac{\partial \hat{D}}{\partial \hat{K}} \frac{\partial \hat{K}}{\partial \hat{I}}$$

양변을 $\hat{I}/\hat{X}$로 곱해서 다시 정리하면,

$$\eta = \eta_1 \eta_2$$

여기서, $\eta = \dfrac{\partial \ln(\hat{X})}{\partial \ln(\hat{I})}$

:需要의 彈力性係數(price-elasticity of demand coefficient)

$$\eta 1 = \frac{\partial \ln(D)}{\partial \ln(\widehat{X^S})}$$

: 集計的 供給에 대한 개별 헤저의 현물 포지션 需要의 彈力性

$$\eta_2 = \frac{\partial \ln(K)}{\partial \ln(\hat{I})}$$

: 現物指數에 대한 集計的 供給의 彈力性

現物株式市場에서 供給의 증가, 즉 賣渡하고자 하는 市場參與者가 많다는 것은 주식가격의 하락이 예상된다는 의미이므로, 危險回避的인 개별 헤저도

자신의 현물포지션의 數量을 감소시킬 것이다. 따라서 集計的 需要와 개별 헤져의 需要는 서로 陽의 相關關係(positive correlation)이므로 $\eta_1 > 0$이 된다. 한편 주식가격이 상승하면 집계적 需要가 증가하고, 반면에 주식가격이 하락하면 集計的 供給 즉 賣渡量이 증가할 것이므로, 現物指數의 變動과 集計的 供給은 서로 負의 相關關係(negative correlation)이므로 $\eta_2 < 0$ 이다. 따라서 彈力性係數는 항상 陰數인 $\eta < 0$가 된다.

現物指數 변화와 현물포지션의 변화가 서로 確率的으로 서로 從屬되었으므로,

$$\hat{X} = X(\hat{I}) \tag{3.10}$$

식(3.10)을 식(2.2)와 (2.2)′에 대입하여 平均値定理을 적용해서 정리하면, 最適 헤징포지션은 다음과 같이 도출된다.

$$\begin{aligned}
&-\{\beta^2 E[U''(\hat{r})(\hat{I}-\bar{I})^2(1+\eta)] + \beta E[U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{I}-\bar{I})(1+\eta)]\}X^* \\
&-\{\beta E[U''(\hat{r})(\hat{I}-\bar{I})^2] + E[U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{I}-\bar{I})]\}H^* \\
&+ E(\Phi_1)E[U'(\hat{R})|\hat{I}=\bar{I}] = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
&-\{\beta E[U''(\hat{r})(\hat{I}-\bar{I})^2(1+\eta)] + \beta E[U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{I}-\bar{I})(1+\eta)]\}X^* \\
&-\{E[U''(\hat{r})(\hat{I}-\bar{I})^2] + E[U''(\hat{r})\Phi_2(\hat{I}-\bar{I})]\}H^* \\
&+ E(\Phi_2)E[U'(\hat{R})|\hat{I}=\bar{I}] = 0
\end{aligned} \tag{3.11)$'$(}$$

수식을 간단히 하기 위해서 각 項을 다음과 같은 記號를 사용하고, 符號를 결정하면 아래와 같다.

$$\mathcal{L}_X \equiv E[U'(\hat{R})|\hat{I}=\bar{I}] > 0, \quad \mathcal{L}_{XX} \equiv E[U''(\hat{r})(\hat{I}-\bar{I})^2] < 0$$

$$\mathcal{L}_{X1} \equiv E[U''(\hat{r})\Phi_1(\hat{I}-\bar{I})] = Cov[U''(\hat{r})\Phi_1, \hat{I}] = 0$$

$$\mathcal{L}_{X2} \equiv E[\ U''(\tilde{r})\Phi_2(\tilde{I} - \bar{I})] \ = Cov[\ U''(\tilde{r})\Phi_2, \tilde{I}] \ \geq 0, \ (U'''(\cdot) \geq 0)$$

$$\mathcal{L}_{\eta XX} \equiv (1 + \eta)\mathcal{L}_{XX}, \quad |\eta| = 1\text{일때}, \ \mathcal{L}_{\eta XX} = 0$$

$$|\eta| \leq 1\text{일때}, \ \mathcal{L}_{\eta XX} \leq 0$$

$$\mathcal{L}_{\eta 1} = (1 + \eta)\mathcal{L}_{X1} = 0$$

$$\mathcal{L}_{\eta 2} = (1 + \eta)\mathcal{L}_{X2}$$

$$U'''(\cdot) < 0, \ |\eta| \leq 1\text{일 때}, \ \mathcal{L}_{\eta 2} \leq 0$$

$$U'''(\cdot) > 0, \ |\eta| \leq 1\text{일 때}, \ \mathcal{L}_{\eta 2} \geq 0$$

$$U'''(\cdot) \lesseqgtr 0, \ |\eta| = 1\text{일 때}, \ \mathcal{L}_{\eta 2} = 0$$

따라서 식(3.11)과 (3.11)'에 위의 기호를 적용시키면 식(3.12)와 (3.12)'가 도출된다.

$$\beta^2(1 + \eta)\mathcal{L}_{XX}X^* + \beta\mathcal{L}_{XX}H^* = E(\Phi_1)\mathcal{L}_X$$

$$H^* = -(1 + \eta)\beta X^* + \frac{E(\Phi_1)\mathcal{L}_X}{\beta\mathcal{L}_{XX}} \tag{3.12}$$

$$[\ (1 + \eta)\beta(\mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_{X2})]\ X^* + [\ \mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_{X2}]\ H^* = E(\Phi_2)\mathcal{L}_X$$

$$\begin{aligned} H^* &= -(1 + \eta)\beta X^* + \frac{E(\Phi_2)\mathcal{L}_X}{\mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_{X2}} \\ &= -(1 + \eta)\beta X^* \mp H_S, \quad U'''(\cdot) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.12'}$$

여기서 **絶對危險回避度**는 수익의 증가에 따른 **現物株式**의 **投資金額**의 **增減**을 의미하고, **價格彈力性**은 **現物指數**의 변화에 따른 **現物株式** 포트폴리오의 **數量變化** 정도를 의미한다. 따라서 **絶對危險回避度**는 위험과 수익의 **相反關係**에 대한 헤저의 **選好度**를 나타내는 반면에, **價格彈力性**은 헤저의 **市場狀況**의 **敏感度**를 나타낸다.

彈力性이 完全 非彈力的 즉 $\eta=0$이라면 식(3.12)'은 價格不確實性만 존재할 경우인 식(2.5)'과 같아진다. 完全非彈力的이라는 것은 市場狀況의 변화 여부와는 무관하게 헤져가 항상 현물포지션의 數量을 維持시킨다는 것으로 매우 비현실적인 假定이 된다.

반면에 彈力性이 單位彈力的(unitary elastic) 즉 $|\eta|=1$일 때, 現物指數의 변화와 함께 헤져는 자신의 현물포지션의 數量을 즉각적으로 변화시키기 때문에 純粹 헤징 및 差益去來 부분은 설정하지 않고 오직 投機的 포지션만 설정한다. 따라서 이때 선물거래는 오직 투기적 목적으로만 이용된다.

非彈力的 즉 $|\eta|<1$인 경우, 體系的 危險을 分散시키기 위한 純粹 헤징부분은 β값의 比率보다 작아진다. 따라서 價格不確實性만 존재하는 식(2.5)'보다 전체 헤징포지션은 작아진다.

반면에 彈力的 즉 $|\eta|>1$일 경우, 純粹 헤징부분은 현물포지션의 符號와 동일해진다. 즉 현물포지션 및 순수 헤징포지션부분은 동시에 買入 또는 賣渡 포지션을 취하므로, 株價指數 先物市場에서의 投機的 假需要(pseudo-demand)를 의미한다.

그러나 만일 現物株式市場의 集計的 需要에 영향을 미칠 수 있는 市場參與者가 존재한다면 이같은 결과는 더이상 유지되지 않는다. 즉, 개별 헤져의 現物需要의 不確實性 성분이 集計的 需要에 영향을 미친다면, 결과적으로 最適 헤징포지션도 변하게 된다[9]. 이것은 現物市場의 전체 賣渡量 또는 買入量에 영향을 미칠 수 있는 市場參與者, 예를들어 巨大機關投資者(institutional investor)나 市場造成者(market maker)의 행태에 의해 개별 投資者의 헤징행태도 영향을 받는다는 것을 시사한다.

---

9) $\widetilde{X}=D(\widetilde{X}^d;\widetilde{k})$에서 개별 헤져의 現物株式포트폴리오 需要의 불確實性 성분인 $\widetilde{k}$가 集計的 需要에 영향을 미친다면, 集計的 供給에대한 개별 헤져의 需要의 彈力性은 $\eta 1=\partial\ln(D(\widetilde{k}))/\partial\ln(\widetilde{X^S})=\eta_{11}\eta_{12}$이 된다. 따라서 $\eta=\eta_1\eta_2=\eta_{11}\eta_{12}\eta_2$가 되어 식(3.12)의 전체 헤징포지션도 η_{12}의 영향을 받는다.

III. 結 論

본 연구는 기존의 株價指數 先物去來의 헤징연구들이 주로 사용했던 平均-分散基準(the mean-variance criterion)에 내재한 강한 事前的인 假定들이 緩和 또는 除去된 헤징행태를 분석하고자 하였다. 즉 헤징포지션의 收益率의 確率的 分布와 危險回避的이라는 것 이외의 效用函數에 대한 어떠한 事前的인 假定도 설정하지 않았고, 또한 平均値定理(the mean value theorem)를 사용하여 헤져가 직면하는 不確實性에 헤징기간 동안의 價格變動뿐만 아니라 數量變動까지도 동시에 도입하였다.

이에 따라서 效用函數의 형태에 의해 전체 헤징포지션의 크기가 결정된다는 것과 數量不確實性까지 도입했을 경우 전체 헤징포지션을 純粹 헤징포지션과 投機的 및 差益去來 부분으로 세분화할 수 있었고, 여러가지 상황에 따른 다양한 헤징행태를 유도할 수 있었다.

본 연구의 분석결과를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

먼저 體系的 危險을 回避하기 위한 純粹 헤징포지션 부분은 危險選好度와는 무관하게 포트폴리오베타의 比率로 현물포지션과 반대의 포지션을 취한다. 그러나 投機的 및 差益去來 부분은 絶對危險回避度의 형태에 의해 결정되고, 따라서 전체 헤징포지션의 크기는 이들 投機的 및 差益去來 부분의 符號에 의해 상대적으로 결정됨을 알 수 있었다.

또한 2次函數형태의 效用函數를 적용했을 경우 전체 헤징포지션의 크기는 絶對危險回避度가 증가(IARA)할 때와 같이 베타값의 比率보다 크게 나타났다. 그리고 株價指數先物의 경우 베타가 最適 헤징비율이 되기 위해서는 베이시스危險의 期待値가 0(즉 현재의 先物指數가 장래의 現物指數의 不便推定値)일 뿐만 아니라 장래 現物指數가 현재 現物指數의 不便推定値일 경우에만 가능하다.

또한 헤징기간 동안 價格의 不確實性과 현물포지션의 數量不確實性이 確率的으로 서로 獨立일 경우, 전체 헤징포지션을 純粹 헤징포지션과 投機的 및 差益去來 부분으로 세분화할 수 있었다. 그리고 두 不確實性이 從屬되었을 경우, 需要의 價格彈力性을 통해서 株價指數 先物去來를 이용하는 헤져의 다양한 행태를 살펴볼 수 있었다.

헤징기간 동안 현물포지션의 **數量**이 **固定**되었다는 것은 **價格彈力性**이 **完全非彈力的**일 경우를 의미하며, 이때 헤징포지션은 **體系的 危險**을 회피하기 위한 **純粹** 헤징부분과 **先物去來**에서만의 **市勢差益**을 위한 **投機的** 부분만으로 구성된다.

單位彈力的일 경우 **危險**을 회피하기 위한 헤징포지션은 설정되지 않고 **先物去來**는 오직 **投機的** 목적으로만 이용된다. 만일 **彈力的**일 경우에는 **先物市場**은 **投機的 假需要**상태에 있게되고, 보다 일반적인 경우라고 할 수 있는 **非彈力的**일 때는 **價格不確實性**만이 존재할 때보다 전체 헤징포지션의 크기가 작아진다.

결국 **株價指數 先物去來**를 이용한 헤징에 있어서, **平均**과 **分散**만으로 **期待效用極大化**를 충족시키지 못할 경우에 헤져의 **危險**에 대한 **選好度**와 **市場狀況** 변화에 대한 상대적인 **反應程度**를 나타내는 **需要彈力性**에 의해 헤징행태는 결정된다고 할 수 있다.

參 考 文 獻

金泰赫, 愼 鏞吉, 先物市場論, 博英社, 1994.

都明國, "指數先物 導入의 現物價格 安定化效果," 月刊 先物의 世界, 1994. 2월호, 63-69.

黃豪鐘, 株價指數 先物去來의 指數開發과 헤징效果에 關한 研究, 동국대학교 박사학위논문, 1993.

Anderson, R.W. and J.P. Danthine, "Hedger Diversity in Futures Markets," *The Economic Journal*, Vol.93, (1983), 370-389.

____________________, "Cross Hedging," *Journal of Political Economy*, Vol.89, (1981), 1182-1196.

Antonovitz, F. and T. Roe, "Effects of Expected Cash and Futures Prices on Hedging and Production," *The Journal of Futures Markets*, Vol.6, (1986), 187-205.

Baron, D., "On the Utility Theoretical Foundations of the Mean-Variance Analysis," *The Journal of Finance*, Vol.32, (1977), 1683-1697.

Benninga, S.,R. Eldor and I. Zilcha, "The Optimal Hedge Ratio in Unbiased Futures Markets," *The Journal of Futures Markets*, Vol.4, (1984), 155-159.

Bray, M., "Futures Trading, Rational Expectations and the Efficient Market Hypothesis," *Econometrica*, Vol.49, (1981), 575-596.

Figlewski, S., "Hedging with Stock Index futures : Theoy and Application in a new Market," *The Journal of futures Markets*, Vol.5, (1985), 183-199.

__________, "Hedging Performance and Basis risk in Stock Index Futures," *The Journal of Finance*, Vol.44, (1984), 657-669.

Hanson, S.D. and G.W. Ladd, "Robustness of the Mean-Variance Model with Truncated Probability Distributions," *American Journal of Agricultural Economics*, Vol.73, (1991), 436-445.

Karp, L., "Dynamic Hedging with Uncertain Production," *International Economic*

Review, Vol.29, (1988), 621-637.

Lapan, H. and G. Moschini, "Futures Hedging Under Price, Basis and Production Risk," *American Journal of Agricultural Economics*, Vol.76, (1994), 465-477.

Losq, E., "Hedging with Price and Output Uncertainty," *Economics Letters*, Vol.10, (1982), 65-70.

McKinnon, R.I., "Futures Markets, Buffer Stocks and Income Stability for Primary Producers," *Journal of Political Economy*, Vol.75, (1967), 844-861.

Meyer, R.J., "Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization," *The American Economic Review*, Vol.77, (1987), 421-430.

__________ **and L.J. Robinson,** "Hedging Under Output Price Randomness," *American Journal of Agricultural Economics*, Vol.70., (1988), 268-72.

Newbery, D.M., "On the Accuracy of the Mean-Variance Approximation for Futures Markets," *Economics Letters*, Vol.28, (1988), 63-68.

Rolfo, J., "Optimal Hedging under Price and Quantity Uncertainty: the Case of a Cocoa Producer," *Journal of Political Economy*, Vol.88, (1980), 100-116.

Samuelson, P.A, "The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higher Moments," *Review of Economic Studies*, Vol.37, (1970), 537-542.

Tobin, J., "Liquidity Preference as Behavior Toward Risk," *Review of Economic Studies*, Vol.37, (1958), 65-86.

Yong Sakong, *Essays in Nonparametric Measures of Changes in Taste and Hedging Behavior with Options*, Ph.D., Iowa State University, (1991), 33-85.