□ 論　文 □

동시환승(Timed-Transfer) 버스시스템

Timed-Transfer of Buses

高　承　永

(명지대학교 교통공학과 조교수)

목　차

ABSTRACT

This paper deals with an operation concept of "timed-transfer of buses", in which buses arrive a transfer center at the same time and allow passengers to transfer to other bus lines, so that passengers can go anywhere all the timed-transfer buses operate with only one transfer. This timed-transfer bus system is known as an efficient operating technique which can be adopted in an area with sparsely distributed bus demand.

A model of timed-transfer is established in terms of various factors such as the expected(or average) arrival time, distribution of arrival time, timed-transfer cycle, scheduled departure time, etc.. It is assumed that the objective of timed-transfer bus system is to minimize the total transfer waiting time. The optimal scheduled arrival time or buffer time(time required to arrive early in consideration of delay) is analyzed for a general case and various special cases.

It was found that the optimal buffer time is an inverse function of the timed-transfer cycle and increases with the cycle time, assuming that there is a fixed scheduled departure time at the transfer center regardless of whether one or more buses fail to arrive before the scheduled departure time. If buses are to wait until all the buses arrive at the transfer center, that is, the transfer departure time is variable, the optimal scheduled arrival times can be obtained by a mathmatical programming.

Ⅰ. 서 론

"버스의 동시환승 (Timed-transfer of buses)"이란 한 도시에서 운행되는 여러 버스노선을 미리 정해진 환승지점(Transfer point)에 동시에 도착하도록 배차하여, 환승승객들에게 도착한 모든 노선 중에서 자유롭게 환승 하도록 해 주는 개념으로서, 항공교통의 "Hubbing"에서 항공기운행간에 특정한 환승시간을 정해 놓지 않는다는 점을 제외하고는 항공교통의 "허빙(Hubbing)"개념과 매우 유사하다. 이 버스의 동시환승은 승객에게 한 번의 환승으로 모든 버스가 운영되는 지역에 도달할 수 있도록 해 주는 것으로 한정된 재원으로 승객수요가 낮은 지역에서 사용될 수 있는 효율적인 버스운영기법이다. 수요밀도가 낮은 지역에 버스서비스를 제공하여야 할 때, 넓은 지역에 산재된 승객들을 위해 많은 노선이나 짧은 배차간격의 버스운행은 버스에 대한 많은 보조가 이루어지지 않는 한 비경제적인 경우가 대부분이다. 따라서 이 동시환승의 버스운영기법은 버스승객의 밀도가 낮고 산재된 소도시지역에서 최소의 운영비로 버스서비스를 제공하는데 적합하며, 실제 많이 사용되고 있기도 하다.7]

버스 동시환승에 있어서 가장 큰 문제점의 하나는 환승지점에서 버스의 도착시간이 일정하지 않다는 점이다. 예정시간 보다 일찍 도착하는 경우는 별 문제가 없으나, 교통혼잡이나 다른 어떤 이유로 환승지점에 예정시간까지 일부의 버스가 도착하지 못하는 경우에는 원활한 동시환승이 불가능하다. 이러한 경우 고려할 수 있는 운행방안으로서 두 가지가 가능하다. 하나는 환승시간을 정해 놓고 환승지점에서 정해진 시간에 무조건 출발하되, 운행 중 발생할 수 있는 지체를 감안하여 모든 버스노선에 대해 정해진 환승시간보다 어느 정도 일찍 도착되도록 "도착여유시간(Buffer time)"을 두고 배차하는 방법이다. 또 다른 방안으로서는 정해진 환승시간이 있지만 환승시간 이 후에도 일정 시간범위 내에서 모든 버스가 도착할 때 까지 기다렸다가 출발하는 방법이다. 그러나 전자의 경우 도착여유시간의 적정한 길이는 얼마인지, 후자의 경우 각 노선의 "평균도착시간(또는 예정도착시간)"은 언제가 되도록 결정해야 하는지, 또한 이러한 요소들은 어떤 요인에 의해 영향을 받는지 등에 대해서는 명확하게 알려져 있지 않고, 연구된 바가 없다.

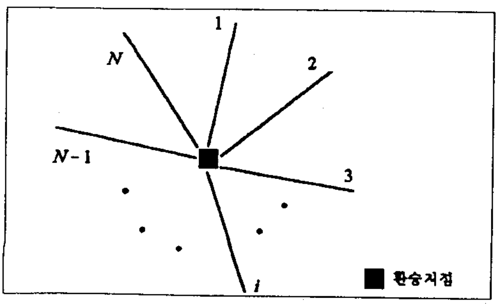
본 연구는 환승지점에서 시스템의 환승대기시간 최소화를 목적함수로 하는 버스의 동시환승시스템을 모형화하고 분석하여 동시환승 버스시스템의 최적 운영전략을 제시하고자 하는데 목적이 있다. 여기서 동시환승 버스시스템은 운행지역의 특성 및 여건과 버스회사의 운영주체 및 운영목표, 보조여부 등에 따라 운영비의 최소화 등 다른 형태의 목적함수를 지닐 수도 있으나, 여기서는 최대 1 회의 환승으로 최대의 승객서비스를 제공한다는 목표를 가정하고 시스템의 환승대기시간 최소화를 목적함수로 설정하였다.

분석방법으로는 버스의 환승시간, 평균(또는 예정)도착시간, 도착여유시간, 동시환승의 주기, 환승승객수 등을 변수로 하여 주어진 실제도착시간의 분포에 대해 환승대기시간의 목적함수를 수식화하고, 이 목적함수를 최소화하는 도착여유시간 또는 예정도착시간을 해석적인 방법으로 구하고, 분석하였다. 지체되는 버스에 대한 운영방안으로서 일부 버스의 지체여부에 관계없이 미리 정해진 출발시간에 출발하는 방안(고정된 출발시간의 동시환승)과 모든 버스가 도착할 때 까지 대기하여 출발하는 방안(가변출발시간의 동시환승)의 두 가지 운영방안을 가정하여 분석하였다. 또한 도착시간의 분포로

실제 버스도착시간의 분포와 유사한 정규분포, 음지수(Negative Exponential)분포, 전이-음지수(Shifted-Negative Exponential)분포를 가정하여 사례연구를 수행하였다.

Ⅱ. 동시환승 모형

N 개의 버스노선이 대중교통센터와 같은 환승지점에서 동시환승 버스서비스를 제공하도록 스케쥴되어 있다고 가정하자. (〈그림 1 〉 참조) 여기서 모든 버스노선은 환승지점에서 운행이 종료되면서 동시환승이 이루어지고 동시환승 후 모든 버스는 같은 노선을 따라 시점으로 되돌아가는 것으로 가정하였다. 그러나 환승지점이 한 노선의 중간정류장에 위치하고 이 중간정류장(환승지점)에서 동시환승이 가능하도록 환승승객을 하차시켜 주고 그 노선의 운행종점으로 운행을 계속하는 것도 가능할 것이다. 이 경우 이 노선의 승객중에서 환승지점을 통과하여 그 노선의 종점방향으로 통행하는 승객들은 환승지점에서 하차하여 환승할 필요없이 그대로 차내에서 다른 환승승객들의 환승시간동안 대기하면 될 것이다. 그러나 버스청소 또는 다른 이유로 모든 승객이 환승지점에서 하차하여야 한다면, 버스노선을 환승지점을 중간정류지점으로 하도록 노선을 운영할 필요가 없을 것이다.



〈 그림 1 〉 동시환승 버스시스템의 개념도

동시환승의 분석을 위한 모형을 수립하기 위해 다음과 같은 변수들을 정의하였다.

t_i = 버스노선 i의 실제도착시간에서 환승소요시간을 더한 시간 (이후 t_i를 실제도착시간으로 정의)

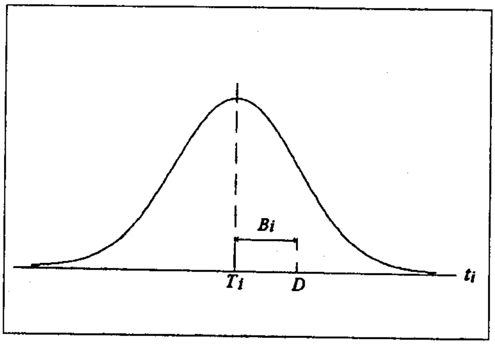
T_i = 버스노선 i의 예정도착시간(또는 평균도착시간)에 환승소요시간을 더한 시간 (이후 T_i를 예정도착시간으로 정의)

R_i = 버스노선 i의 환승승객수

B_i = 버스노선 i의 도착여유시간 (예정 대기시간)

D = 환승센터에서 환승 후 예정출발시간 = $(T_i + B_i)$ 또는 $Max\{T_i$, for all i$\}$

C = 동시환승의 주기 = 연속된 두 번의 동시환승 사이의 시간



〈 그림 2 〉 실제도착시간 분포의 예

여기서 t_i는 버스노선 i의 실제도착시간에 환승에 소요되는 시간을 더한 시간으로 환승 소요시간까지를 운행시간에 포함하면 환승 소요시간을 별도의 변수로 고려할 필요가 없어지게 된다. 이 t_i는 운행노선상의 도로혼잡, 승 하차 승객수 등의 요인에 따라 어떤 분포 $f(t_i)$를 지닐 것이다. T_i는 버스노선 i의 예정도착시간으로 운행스케쥴상의 예정도착시간을 평균도착시간으로 정하거나 또는 평균도착시간과는 다른 어

떤 시간으로 정할 수도 있을 것이다. 여기서는 T_i를 예정도착시간으로 정의하고, 이 값의 결정은 경우에 따라 다른 것으로 하여 모형에 이를 반영하도록 하였다. R_i와 C는 주어지거나 외생적으로 결정된다. B_i는 앞서 정의된 도착여유시간으로, 예정시간에 버스가 도착하는 경우, 환승승객의 대기시간이 된다. T_i와 B_i는 동시환승시스템의 최적운영을 위해 결정되는 결정변수로서, 여기서 최적운영이란 총 환승대기시간의 최소화로 가정될 수 있다.

t_i의 분포, 즉 $f(t_i)$, 는 운행에 대한 특별한 제어가 없는 경우 일반적으로 평균도착시간을 중심으로 일정한 범위내에서 정규분포와 유사한 종의 형태를 지닐 것이다. 이 분포는 하나의 수학적 분포로 모형화되어 표현될 수 있다. 대부분의 경우 이 도착시간의 분포는 어떤 평균과 분산을 지닌 정규분포와 매우 유사한 특성을 지니는 것으로 알려져 있다.1] 그러나 정규분포는 $-\infty \sim +\infty$의 범위를 지녀 정확하게 $f(t_i)$가 정규분포와 같다고는 할 수 없으나, 동시환승의 주기가 실제도착시간의 분산에 비해 어느 정도 크다면 현실적으로 대부분의 실제도착시간 t_i는 $D-C$ 와 $D+C$사이의 범위내에 존재하게 될 것이고, 실제도착시간의 대부분이 이 정규분포의 형태를 따른다면, 실제도착시간의 분포를 정규분포로 모형화하는데 커다란 오차는 없다고 가정할 수 있을 것이다.

또한 각 버스노선의 도착시간분포가 상호독립적이라고 가정하면, 버스노선 i의 환승승객 1인당 환승대기시간의 기대치는 아래의 식으로 나타낼 수 있다.

$$E(t_{wi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_i) \cdot t_{wi}(t_i)\, dt_i \quad \text{for } i = 1, 2, \cdots\cdots, N \quad \cdots\cdots \langle \text{식 } 1 \rangle$$

여기서 $E(t_{wi})$ = 버스노선 i의 환승승객 1 인당 환승대기시간의 기대치

$t_{wi}(t_i)$ = 시간 t_i에 도착하는 버스노선 i의 환승승객의 환승대기시간

목적함수인 총 환승대기시간을 최소화하는 최적화문제는 B_i 또는 T_i를 결정변수로 하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\underset{B_i \text{또는} T_i}{MIN} \{\sum_{i=1}^{N} R_i E(t_{wi})\} \quad \cdots\cdots\cdots \langle \text{식 } 2 \rangle$$

s.t.

$$0 \le B_i \le C \quad \text{또는} \quad D - C \le T_i \le D$$
$$\text{for} \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, N$$

여기서 결정변수 B_i 가 음(-)의 값을 갖는 경우, 즉 결정변수 T_i가 D보다 큰 경우는 현실적으로 고려할 수 없다.

위의 모형식에서 시간 t_i 에 도착하는 버스노선 i에 탑승한 환승객의 환승대기시간, $t_{wi}(t_i)$, 는 버스가 예정출발시간을 지나 지체되는 경우 운영방법에 따라 달라지게 된다.

즉, 일부 버스들은 예정된 출발시간 D까지 도착하지 않는 경우 이미 도착하여 출발준비가 된 버스들은 지체되는 버스들을 기다리지 않고 출발하게 하거나, 모든 버스가 도착할 때 까지 대기하게 하는 두 가지 운영방안이 있을 수 있다. 첫째, 지체되는 버스들을 기다리지 않고 출발하는 경우 이미 도착한 버스에서 도착하지 않은 버스로 환승하는 승객은 지체되는 버스가 도착할 때 까지만 대기하면 되지만, 반대로 도착하지 않은 버스에서 이미 도착하여 출발한 버스로 환승하는 승객들은 다음 번 동시환승까지 대기하여 환승해야 할 것이다. 둘째, 모든 버스가 도착할 때 까지 대기하여 출발하는 경우 모든 환승이 한번의 동시환승으로 가능하나 일찍 도착하여 환승을 완료한 승객이 도착하지 않은 버스에서 그 버스로 환승하기 까지 대기

하여야 하는 비효율이 발생한다. 그러나 하루 중 많지 않은 횟수의 동시환승이 이루어지는 경우 동시환승의 주기가 길어져서 다음 번의 동시환승까지 긴 시간을 기다려야하고, 하루의 마지막 동시환승인 경우에는 현실적으로 모든 버스가 도착할 때 까지 기다려서 출발해야 할 것이다.

그렇지 않으면 도착하지 않은 버스의 환승승객들은 다음 동시환승이나 다음 날 까지 대기하여야 하는 문제가 발생한다. 여기서 모든 버스가 도착하기까지 기다리느냐의 여부는 이 동시환승이 시행되는 지역의 특정한 상황이나 정책에 따라 결정되어져야 한다.

Ⅲ. 고정 출발시간의 동시환승

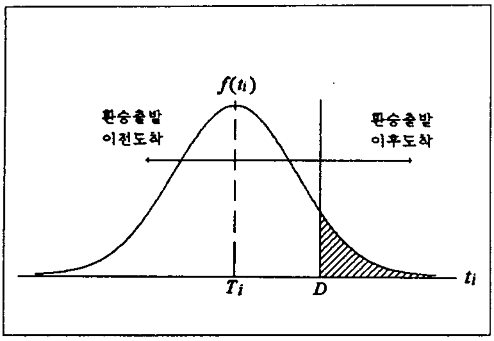
먼저 동시환승시 한 대 이상의 버스가 정해진 출발시간까지 도착하지 않는 것에 관계없이 도착한 버스들은 정해진 출발시간에 출발하는 것을 가정하였다. 이 경우 지체되는 버스에 탑승하고 있는 환승승객은 다음 동시환승까지 대기하여야 한다. 그러나 이미 도착한 버스에서 지체되는 버스로 환승하고자 하는 승객들은 대기하여 늦게 도착하는 버스를 이용할 수도 있고 또는 환승지점에서 새롭게 배차되는 버스로 환승하여 출발할 수도 있을 것이다.

이 경우 정해진 출발시간 D 에 대해 각 버스는 운행도중 발생할 수도 있는 지체를 감안하여 어느 정도 일찍 도착하도록 스케쥴되어야 할 것이다. 환승출발시간 D 에 비해 노선 i 의 버스가 얼마나 일찍 도착하도록 하여야 하는가는 주어진 D 에 대해 버스노선 i 의 최적 도착여유시간 B_i 를 결정하는 문제와 같다. (이 문제는 노선 i 의 주어진 T_i 에 대해 최적의 D를 결정하는 문제와도 동일하다.) 여기서 늦게 도착하는 버스에 대해서는 새로운 버스를 배차하는 것으로 가정하면, 시스템의 총 환승대기시간의 최소화는 각 노선의 환승대기시간의 최소화의 결과와 동일하게 된다. 이는 동시환승의 출발시간이 고정되어 있기 때문에 각 버스노선은 다른 노선의 최적 B_i 와 무관하기 때문이다.

도착여유시간이 크면 환승출발시간까지 도착하지 못할 확율이 작아지게 될 것이다. 만약 모든 발생가능한 지체를 고려하여 충분히 큰 도착여유시간을 지닌다면 대부분의 버스는 환승출발시간까지 도착할 수는 있으나 환승대기시간이 상당히 길어지게 될 것이다. 반면 작은 도착여유시간을 지닌다면 버스가 환승출발시간까지 도착하지 못할 확율이 높아지나 환승대기시간은 감소할 것이다. 이 사실은 이러한 시스템에서 주어진 D 와 도착시간 t_i의 분포에 대해 최적의 도착여유시간이 존재함을 의미하는 것이다.

여기서 t_i 분포의 확율밀도함수(probability density function)를 $f(t_i)$로 가정하자. 실질적으로 t_i의 범위는 $D-C$와 $D+C$ 의 사이에 있게 될 것이다. 여기서 버스노선 i 의 환승대기시간 기대치는 다음의 과정을 거쳐 얻어질 수 있다.

1) $t_i \leq D$ 의 경우, 즉 버스가 환승출발시간 이전에 도착하는 경우, 환승대기시간, t_{wi} 는 $D-t_i$가 될 것이다.
2) $t_i > D$ 의 경우, 즉 버스가 환승출발시간 이후에 도착하는 경우, 환승대기시간, t_{wi} 는 $C+D-t_i$가 될 것이다. 여기서 지체되는 버스의 환승승객은 대기하여 다음의 동시환승을 이용하는 것을 가정하였다.



〈 그림 3 〉 환승출발 이전과 이후 도착

버스노선 i의 환승승객 1 인당 환승대기시간의 기대치 $E(t_{wi})$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(twi) &= \int_{D-C}^{D} (D - t_i) f(t_i)\, dt_i + \int_{D}^{D+C} (C + D - t_i) f(t_i)\, dt_i \\ &= \int_{D-C}^{D+C} (D - t_i) f(t_i)\, dt_i + \int_{D}^{D+C} C f(t_i)\, dt_i \\ &= [D - E(t_i)] + C[1 - F(D)] \qquad \cdots\cdots \langle 식\ 3 \rangle \end{aligned}$$

여기서 $E(ti)$ = 실제도착시간의 기대치
= 평균도착시간

$F(D) = Pr(t_i \leq D) = \int_{D-C}^{D} f(t_i)\, dt_i = t_i$의 누적확률밀도 함수 $(ti \leq D)$

여기서 예정도착시간 T_i를 평균도착시간 $E(t_i)$로 정하면, 환승대기시간의 기대치를 최소화하기 위해서는 주어진 D에 대해 T_i(또는 B_i) 를 결정하거나, 주어진 T_i(또는 B_i) 에 대해 D를 결정하는 것이 필요하다. 많은 버스노선들이 동시환승하게 되면 모든 버스노선에 대해 미리 정해진 D에 대해 T_i (또는 B_i)를 결정하는 것이 바람직하다. 이 문제는 다음과 같이 수식화될 수 있다.

$$\underset{T_i \text{ 또는 } D}{MIN} \{E(t_{wi})\} = MIN \{D - T_i + C - C F(D)\} \qquad \cdots\cdots \langle 식\ 4 \rangle$$

s.t.

$$D - C \leq T_i \leq D \quad \text{또는} \quad T_i \leq D \leq T_i + C$$

현실적으로 모든 노선 i에 대해 최적 T_i는 $D - C \leq T_i \leq D$의 범위내에서 결정되어야 하거나 또는 최적의 D가 $T_i \leq D \leq T_i + C$의 범위내에서 결정되어야 한다. 여기서 최적 D는 대부분의 동시환승시 버스가 예정출발시간 이전에 도착되도록 설계하는 것이 일반적이므로 $F(D)$가 0.5 이상이 되어야 하며, 이 경우 최적 D 부근의 $f(t_i)$는 단조감소하는(monotonically decreasing) 함수로 가정할 수 있다.

문제를 단순화하기 위해 T_i는 주어지고 결정변수는 D로 가정하면, 위의 문제는 다음과 동일하게 된다.

$$\underset{D}{MIN}\{D - CF(D)\} \qquad \cdots\cdots \langle 식\ 5 \rangle$$

$$\text{s.t.} \quad T_i \leq D \leq T_i + C$$

위 목적함수를 D에 대해 미분하여 0 으로 놓고, D에 대해 해를 구함으로써 최적 D를 얻을 수 있다.

$$1 - Cf(D^*) = 0$$

$$f(D^*) = \frac{1}{C}$$

$$D^* = f^{-1}\left(\frac{1}{C}\right) \text{ for } T_i \leq D^* \leq T_i + C \qquad \cdots\cdots \langle 식\ 6 \rangle$$

즉, 최적의 D는 시간이 경과함에 따라 부드럽게 감소하는 도착시간의 분포를 지닐 경우 확률밀도함수의 값이 $\frac{1}{C}$가 되는 T_i와 $T_i + C$사이의 시간이 된다. 이에 따른 최적의 도착여유시간 B_i^*는 $D^* - T_i = f^{-1}(\frac{1}{C}) - T_i$이다. 버스가 지체되어 다음 동시환승을 이용하는 경우 최적 도착여유시간은 동시환승의 주기(즉, 기다리지 않고 출발하는데 따른 추가대기시간 길이)의 함수이다. 동시환승의 주기가 길면 그만큼 긴 도착여유시간을 주어야 하고, 반대로

동시환승의 주기가 짧으면 작은 도착여유시간을 주어도 된다. 주어진 D와 여러 버스노선이 운행하는 경우, 각 버스노선은 다른 노선들과는 무관하게 그 노선 고유의 최적 예정도착시간을 지니게 된다.

다음은 가상적으로 실제 도착시간의 분포와 유사한 정규분포와 음지수(Negative Exponential)분포를 가정하고 최적 도착여유시간을 구해 보도록 하였다.

1) 도착시간이 정규분포(Normal Distribution)의 경우

버스의 도착시간 분포의 경험적 관찰에 따르면, 대체로 정규분포와 유사한 형태를 지니는 경우가 많다.[1] 이러한 분포를 가정하는 경우 예정도착시간이 평균도착시간이 되도록

운영하는 것이 자연스럽다. 또한 실제로 변수 t_i가 $D-C$ 보다 작고, $D+C$보다 클 확율은 매우 작고, 이러한 확율을 무시한다면, 변수 t_i는 평균 T_i, 분산 σ^2 를 지닌 정규분포 $N(T_i, \sigma)$ 를 지닌다고 가정할 수 있다. 이 경우 대기시간의 기대치를 최소화하는 최적 D는 아래와 같이 구해질 수 있다.

$$f(D^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(D^*-T_i)2}{2\sigma_i^2}} = \frac{1}{C}$$

$$D^* = T_i \pm \sigma_i \sqrt{2ln(\frac{C}{\sqrt{2\pi}})} \quad \cdots\cdots \langle 식\ 7 \rangle$$

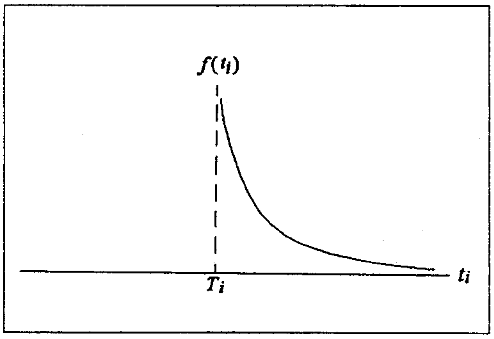
위 식에서 $T_i - \sigma_i \sqrt{2ln(\frac{C}{\sqrt{2\pi}})}$ 는 해가 될 수 없으므로 최적 D는 $T_i + \sigma_i \sqrt{2ln(\frac{C}{\sqrt{2\pi}})}$ 가 된다. 최적 도착여유시간 B_i 는 아래의 수식과 같다.

$$B^*_i = D^* - T_i = \sigma_i \sqrt{2ln(\frac{C}{\sqrt{2\pi}})} \quad \cdots\cdots \langle 식\ 8 \rangle$$

또는 주어진 D에 대해 최적 T_i는 $D - \sigma_i \sqrt{2ln(\frac{C}{\sqrt{2\pi}})}$ 이다. 즉, 최적 도착여유시간은 출발시간까지 도착하지 못하는 경우 다음 동시환승시간까지 대기하는 시간길이 (≒ C)가증가할 수록 길어지며, 도착시간의 분산에 비례하는 것을 알 수 있다.

2) 도착시간이 전이-음지수(Shifted-Negative Exponential)분포의 경우

일반적인 버스운행방법의 하나로 예정도착시간을 미리 정해 놓고, 버스가 예정운행시간 보다 빨리 운행하는 경우 의도적으로 운행속도를 줄여 예정도착시간에 정확하게 도착하도록 조절하거나 일찍 도착하여 예정도착시간까지 대기하도록 할 수 있다. 이러한 경우 일찍 도착하여 대기하는 버스의 대기시간을 무시하면 모든 버스가 예정도착시간 이후에 도착하는 상황으로 볼 수 있다. 이러한 도착시간 분포를 〈그림 4〉와 같이 위치계수를 예정도착시간 T_i로 하는 전이 - 음지수분포로 가정하고 사례를 분석하였다.



〈 그림 4 〉 전이-음지수분포의 도착시간

또한 예정도착시간을 $T_i = 0$으로 가정하면 음지수분포가 되고, 이 경우 도착여유시간은 예정출발시간과 같게 되며, 최적 도착여유시간(출발예정시간)은 아래와 같이 구해진다.

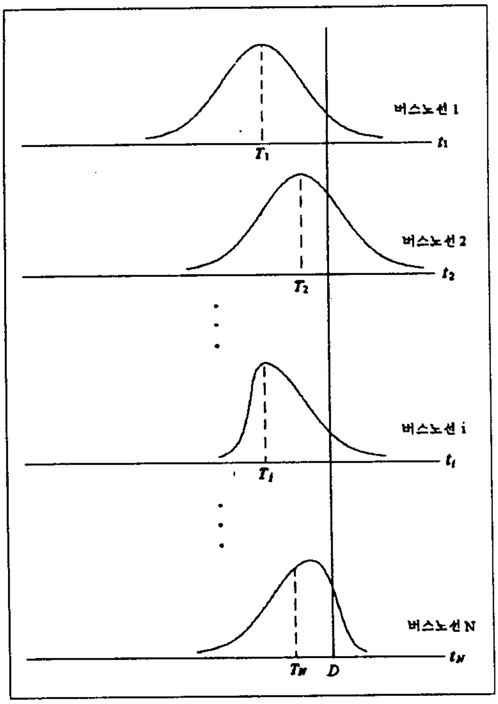
$$f(D^*) = \lambda e^{-\lambda D^*} = \frac{1}{C}$$

$$D^* = B_i^* = \frac{1}{\lambda}\ln(\lambda C) \quad \cdots\cdots \langle \text{식 } 9 \rangle$$

즉, 최적 도착여유시간은 정규분포의 경우와 마찬가지로 동시환승 주기 및 분산의 증가와 함께 증가하는 것을 알 수 있다.

Ⅳ. 가변 출발시간의 동시환승

가변적인 출발시간의 동시환승이란 미리 정해진 출발시간이 경과하더라도 지체되어 도착하지 않는 버스가 있을 경우 모든 버스가 도착하여 환승이 완료될 때까지 기다려 출발하는 것을 말한다. 이 경우 한 버스노선의 도착시간은 다른 노선의 환승대기시간에 영향을 주게



〈 그림 5 〉 가변 출발시간의 도착시간 분포 예

되며, 시스템의 총대기시간을 최소화하는 해는 여러 버스노선 중 한 노선의 정해진 예정도착시간을 기준으로 다른 버스노선들의 최적 예정도착시간을 구하는 것이고, 최적 예정출발시간은 제일 늦게 도착하는 버스노선의 실제도착시간이 될 것이다.

N 개 버스노선으로 구성된 가변 출발시간의 동시환승 버스시스템에서 총 대기시간 TS_W는 다음과 같이 정의된다.

$$TS_W = \sum_{i=1}^{N} R_i\,(D - t_i) \quad \cdots\cdots \langle \text{식 } 10 \rangle$$

여기서 R_i = 버스노선 i 의 총 환승객수

예정출발시간 D는 N 개의 노선 중 마지막으로 도착하는 버스의 도착시간이 될 것이며, 이는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$D = MAX\,(t_1, t_2, \cdots, t_N) \quad \cdots\cdots \langle \text{식 } 11 \rangle$$

따라서 변수 D의 누적확률밀도함수(cumulative probability density function)는

$$F_d(D) = Pr(t_d \le D) = F_1(D) \times F_2(D) \times \cdots\cdots \times F_N(D) = \prod_{i=1}^{N} F_i(D). \quad \cdots\cdots \langle \text{식 } 12 \rangle$$

여기서 $F_i(D) = Pr\,(t_i \le D)$

이로 부터 변수 D의 확률밀도함수(probability density function)는 다음과 같다.

$$f_d(D) = \frac{DF_d(D)}{dD} = f_1F_2F_3 \cdots F_N + F_1f_2F_3 \cdots F_N + \cdots + F_1F_2F_3\ f_N = \sum_{i=1}^{N} \{f_i(D) \prod_{i=1} F_j(D)\} \quad \cdots\cdots \langle \text{식 } 13 \rangle$$

가 된다. 그러면 총대기시간의 기대치, $E(TS_w)$, 는

$$E(TS_w) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} f_1(t_1) f_2(t_2) \cdots f_N(t_N) \{ \sum_{i=1}^{N} R_i(D - t_i) \} dt_1\, dt_2 \cdots dt_N \quad \cdots\cdots \langle 식\ 14 \rangle$$

가 되며, 문제는 아래와 같은 최적화 문제로 정리될 수 있다.

$$\underset{T_1, T_2, \cdots, T_N}{MIN} \; E(TS_w) \quad \cdots\cdots\cdots \langle 식\ 15 \rangle$$

$$s.t.\ 0 \leq T_i \leq \infty \text{ for } i = 1, 2, \cdots, N$$

여기서 T_i들 중 하나는 주어져 있다. 위 문제는 수리계획법(mathematical programming)을 사용하여 해를 구할 수 있다.

위의 과정에서 모든 버스가 도착하고 환승이 종료되는 대로 버스가 출발하는 것으로 가정하였다. 그러나 일부 승객이 이 환승센터에서 발생하여 출발하는 경우에는 미리 정해진 (scheduled) 출발시간이 있게 되고, 모든 버스가 출발시간 이전에 이미 도착하여 버스간 환승을 종료하였다고 하더라도 이 미리 정해진 출발시간 이전에는 출발할 수가 없을 것이다. 비록 이 미리 정해진 가장 빠른 출발시간 D_{min}이 미리 정해져 있다고 하더라도 위의 문제에서 달라지는 것은 없고, 다만 변수 D가 아래와 같이 달라질 뿐이다.

$$D = max(D_{min}, t_1, t_2, \cdots, t_N). \quad \cdots \langle 식\ 16 \rangle$$

모든 t_i의 분포가 동일할 때, $T_1 = T_2 = \cdots = T_N$의 조건에서 총환승대기시간의 기대치 $E(T_w)$가 최소화됨은 쉽게 증명될 수 있다.

여기서는 버스노선의 도착시간 분포가 동일한 전이-음지수분포와 다른 계수값의 전이-음지수분포를 따른다는 가정하에 2 개 버스노선에 대한 가변 출발시간의 동시환승에 대해 최적의 예정도착시간을 결정하는 가상적인 사례를 연구하였다.

1) 2 개의 동일한 전이-음지수분포의 경우

버스의 도착시간이 앞서 고정 출발시간의 동시환승에서 전이-음지수분포가 되도록 제어되고, 두 버스노선의 도착시간이 동일한 계수값의 동일한 전이-음지수분포를 지닌다고 가정한다. 즉, 두 버스노선의 동시환승에서 예정도착시간이 같고 전이-음지수분포의

값이 같은 경우로 볼 수 있다. 또한 예정도착시간을 $t = 0$ 으로 가정하면, 두 버스노선의 도착시간의 분포에서 위치계수가 소거되어 분석이 단순화될 수 있다.

$$f_i(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ for } i = 1, 2 \quad \cdots\cdots \langle 식\ 17 \rangle$$

$$F_i(t) = Pr(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ for } i = 1, 2 \cdots\cdots \langle 식\ 18 \rangle$$

이러한 가정하에서 누적확율밀도함수와 확율밀도함수는 다음과 같다.

$$F_d(D) = F_1(D) F_2(D) = (1 - e^{-\lambda D})^2 \quad \cdots\cdots \langle 식\ 19 \rangle$$

$$f_d(D) = 2\lambda e^{-\lambda D}(1 - e^{-\lambda D}) = 2 f_i(D)\, F_i(D) \quad \cdots \langle 식\ 20 \rangle$$

이러한 시스템에서 두 노선의 환승승객수가 같다고 가정하면, 시스템의 총 환승대기시간의 최소화는 환승승객 1 인당 환승대기시간의 최소화와 같은 문제가 되며, 환승승객 1 인당 환승대기시간의 기대치 $E(T_w)$ 는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$E(T_w) = \int_{t_1=0}^{\infty} \{ \int_{t_2=0}^{t_1} f(t_1) f(t_2)(t_1 - t_2) dt_2 + \int_{t_2=t_1}^{\infty} f(t_1) f(t_2)(t_2 - t_1) dt_2 \} dt_1$$

$$\int_{t_1=0}^{\infty} f(t_1)\{ \int_{t_2=0}^{t_1} f(t_2)(t_1-t_2)dt_2 + \int_{t_2=t_1}^{\infty} f(t_2)(t_2-t_1) dt_2 \} dt_1$$

$$= \frac{1}{\lambda} \qquad \langle 식\ 21 \rangle$$

즉, 동일한 2 개의 음지수분포의 도착시간을 지닌 버스노선의 경우, 두 노선의 예정도착시간을 동일하게 설정하면 환승승객 1 인당 평균환승대기시간은 $\frac{1}{\lambda}$이 된다.

2) 다른 계수값의 2 개의 전이 - 음지수분포의 경우

환승승객수가 같은 두 개의 버스노선의 도착시간이 같이 전이-음지수분포를 지니나 계수값이 다른 경우, 앞서와 같이 문제는 한 노선은 형태계수값 λ_1의 음지수분포, 다른 노선은 형태계수값 λ_1, 위치계수값 T의 전이-음지수분포를 지니는 것으로 단순화할 수 있다. 이 경우 확율밀도함수 및 환승승객 1 인당 환승대기시간의 기대치는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$$

$$f_2(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 (t-T^*)}$$

$$E(Tw) = \frac{2\lambda_2 e^{-\lambda_1 T^*}}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)} + \frac{1}{\lambda_2} + T^* - \frac{1}{\lambda_1} \qquad \cdots\cdots \langle 식\ 22 \rangle$$

총 환승대기시간 $E(T_w)$를 최소화하는 최적의 T는 위 식을 미분하여 해를 구함으로써 구할 수 있다.

$$\frac{dE(T_w)}{dT^*} = \frac{2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-\lambda_1 T^*} + 1 = 0$$

$$T^* = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\lambda_2} \qquad \cdots\cdots \langle 식\ 23 \rangle$$

이 최적 T는 두 버스노선간 예정도착시간의 최적차를 의미하며, 0 이 아닌 값의 T는 두 노선의 예정도착시간이 어느 정도의 차이를 지니도록 배차되어야 함을 의미한다. 여기서 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$일 경우, $T = 0$이 된다. 즉, 두 분포가 모양이 동일할 때는 앞서 동일한 두 음지수푼포의 경우와 같이 최적 운영전략은 두 노선의 예정도착시간을 동일하게 설정하는 것이고, 역시 이 때의 총 환승대기시간은 $\frac{1}{\lambda}$이 된다.

V. 결 론

동시환승 버스시스템은 수요밀도가 낮은 지역에 버스서비스를 제공하여야 할 때, 한정된 재원으로 효율적인 버스서비스를 제공할 수 있는 버스운영기법이다. 그러나 아직까지 이러한 운영기법에 대한 체계적인 연구가 이루어지지 못한 상태였다. 즉, 동시환승시간을 언제로 해야 하는지, 어떻게 각 노선의 도착예정시간을 결정해야 하는지 등에 대한 연구가 미흡한 상태였다. 본 연구는 동시환승 버스시스템의 총 환승대기시간의 수학적 모형을 개발하고 이 총 환승대기시간의 최소화를 목적함수로 하는 버스노선의 최적 예정도착시간 및 최적 도착여유시간을 결정하는 운영전략을 도출하여 제시하였다.

동시환승 버스시스템의 모형은 각 버스노선의 실제도착시간, 예정도착시간, 도착여유시간, 예정출발시간, 동시환승의 주기를 변수로 설정하였고, 이 중에서 예정도착시간 또는 도착여유시간을 결정변수로하여 최적의 도착여유시간을 도출하였다. 지체되는 버스에 대한 운영방안으로서 일부 버스의 지체여부에 관계없이 미리 정해진 출발시간에 출발하는 방안(고정된 출발시간의 동시환승)과 모든 버스가 도착할 때 까

지 대기하여 출발하는 방안(가변 출발시간의 동시환승)의 두 가지 운영방안을 가정하여 분석하였다.

고정출발시간의 경우 최적의 도착여유시간은 동시환승의 주기의 역함수로 표현되고, 이 주기에 반비례하는 것으로 나타났다. 이 고정출발시간에 대해 정규분포와 전이-음지수분포의 도착시간을 가정하고 사례연구를 수행하여 결과를 분석하였다. 가변출발시간의 경우, 분석적으로 최적해를 구할 수는 없으나 수리계획법을 이용하여 최적 예정도착시간을 구할 수 있음을 나타내었다.

우리 나라의 경우 자가용승용차의 증가와 버스승객 감소가 불가피한 추세이고, 적자 버스노선이 증가하며, 이에 대한 정부의 보조도 점차 증가되고 있는 상황이다. 우리 나라에도 버스 승객수요의 밀도가 낮은 벽지지역에 이와 같은 동시환승 버스시스템의 도입을 검토할 수 있으며, 이러한 경우 버스배차시간을 결정하는데 본 논문의 결과가 효율적으로 활용될 수 있을 것이다.

그러나 동시환승 버스시스템에 대한 연구는 본 연구 이 외에도 보다 다양한 운영전략에 대한 모형화 및 분석을 필요로 하고 있다. 본 연구에서 제시한 고정 출발시간과 가변 출발시간의 동시환승 시스템 중 어떤 시스템이 어떠한 경우에 우수한지에 대한 연구도 필요하며, 고정과 가변의 중간적인 형태의 운영방법에 대한 모형화 및 분석도 요구된다. 또한 실제 동시환승의 버스시스템을 대상으로 직접 최적의 운영전략을 도출해 보는 심도 있는 사례연구가 뒤따라야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Arnold Barnett(1973), "On Controlling Randomness in Transit Operations," Transportation Science, Vol. 7, 1973.
2. T. A. Chua(1984), "The Planning of Urban Bus Routes and Frequencies: A Survey," Transportation 12, pp. 147-172.
3. G. C. Clarens and V. F. Hurdle(1975), "An Operating Strategy for a Commuter Bus System," Transportation Science, Vol.18, No.4, pp. 331-350.
4. E. M. Holroyd(1967), "The Optimum Bus Service: A Theoretical Model for a Large Uniform Urban Area," in Vehicular Traffic Science (Edie, L. C. et al - Editors), pp. 308-328, American Elsevier.
5. G. F. Newell(1974), "Optimal Network Geometry," Transportation and Traffic Theory, pp. 561-580. Reed, Sydney, Australia.
6. G. F. Newell(1979), "Some Issues Relating to the Optimal Design of Bus Routes," Transportaion Science, Vol.. 13, No.1.
7. Jerry B. Schneider, Chris Deffebach and King Cushman (1984), "The Timed-Transfer/Transit Center Concept as Applied in Tacoma/Pierce County, Washington, Transportation Quarterly, Vol. 38, No.3, July pp. 393-402.
8. S. C. Wirasinghe and H. Ho(1982), "Analysis of a Radial Bus System for CBD Commuters Using Auto Access Modes," Journal of Advanced Transportation, Vol. 16, No.2, Summer.