

〈論 文〉

난류 균일전단유동에 대한 레이놀즈 응력 모형방정식의 평형해와 안정성 해석

이원근* · 정명균**

(1994년 9월 23일 접수)

The Equilibrium Solution and the Stability Analysis of Reynolds Stress Equations for a Homogeneous Turbulent Shear Flow

Won-Geun Lee and Myung-Kyoon Chung

Key Words: Equilibrium Solution(평형해), Stability Analysis(안정성 해석), Eigenvalue Problem(고유치 문제), Pressure-Strain Rate Correlation(압력-변형률항)

Abstract

An analysis is performed to examine the equilibrium state and the stability of modeled Reynolds stress equations for homogeneous turbulent shear flows. The system of the governing equations consists of four coupled ordinary differential equations. The equilibrium states are found by the steady state solution of the governing equations. In order to investigate the stability of the system about its state in equilibrium, an eigenvalue problem is constructed. As a result, constraints for the coefficients in the model equations are obtained by the stability condition of the equilibrium state as well as by their physically realizable bounds. It is observed that the models with pressure-strain rate correlation that are linear in the anisotropy tensor are stable and produce reasonable equilibrium tensor do not behave properly. Stability considerations about three most commonly used models are given in detail in the final section.

1. 서 론

난류유동의 지배방정식을 모형화하는데 있어서, 최근의 연구는 다양한 유동조건에 적용할 수 있는 일반적인 모형을 개발하는데 주안점을 두고 있다. 그 결과, 모형의 일반성을 보장받기 위한 여러 제한조건들이 제시되었다. 예를 들면 불변성 원리(invariance principle),⁽¹⁾ 실현가능성 원리(realizability principle) 등⁽²⁾이다. 이와 같은 제한조건

을 만족시키지 못하는 모형은, 비록 그것이 특정한 유동장에서 난류량을 잘 예측하고 있다고 해도 어떤 유동에서는 물리적으로 타당하지 못한 결과를 가져올 것이라고 생각한다. 예를 들어, 압력-변형률항의 여러 모형 중에서 레이놀즈 응력에 일차로 비례하는 형태의 모형은 모두 실현가능성 조건을 위배한다. 이러한 모형들은 벽면 근처의 점근적 경향을 만족시키지 못한다. 난류의 지배방정식의 항들을 모형할 때 흔히 쓰이는 방법은 그 항에 대한 가장 일반적인 형태의 함수를 전개한 후 적절한 조건과 가정 하에 생략하거나 근사하여 간단한 형태로 만드는 것이다. 그러나, 이 과정에서 여러 제한조건을 만족할 수 있는 최소한의 형태는 남아야 한

*한국과학기술원 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

다. 문제는 모형이 차수가 늘어나고 복잡해질수록 모형에 포함된 계수가 많아지고 조정하기가 힘들어진다는 점이다.

이러한 계수들을 조정하는데 도움이 되는 자료에는 실험결과와 급속변형이론(rapid distortion theory; RDT), 대와동모사 또는 직접모사(large eddy simulation or direct numerical simulation; LES or DNS) 등이 있으며 그 유동의 종류는 크게 나누어 발전하는 유동(developing flow), 이완되는 유동(relaxing flow), 평형상태 유동(equilibrium flow) 등이 있다. 여기서, 발전하는 유동은 후류로 가면서 계속적으로 균일한 평균변형을 받아 유동구조가 발달되어 가는 과정을 말한다. 비회전성 변형이 난류장에 미치는 영향을 연구한 실험이나, 급속변형에 관한 이론 및 수치해석이 이에 해당한다. 이러한 결과는 고율 압력-변형률항(rapid part of pressure-stain correlation)을 모형화하는데 비교자료가 된다. 이완되는 유동은 평균변형이 더 이상 존재하지 않을 때 후류로 가면서 난류 변화과정을 보기 위한 것으로, 소멸항의 감쇠(decay of dissipation rate)과정이나 저율 압력-변형률항(slow part of pressure-stain correlation)에 의한 등방성 회복(return-to-isotropy)과정 등을 모형화하는데 도움이 된다. 평형상태 유동은 실험으로 구현하기가 쉽지 않으나(특히 비회전성 변형의 경우는 평형상태에 이르도록 실험한 경우가 없다.), Tavoularis와 Karnik⁽³⁾은 많은 균일전단류실험을 검토한 결과 유동장에 지속적인 변형이 가해져서 난류운동에 너지가 지속적으로 증가하는 경우에도 난류의 시간 척도와 레이놀즈 응력의 비등방성 등은 일정하게 유지되는 평형상태에 가까운 구조를 가짐을 보였다. 그들은 전단율이 대단히 클 때와 적당한 크기의 전단율이 작용할 때 서로 다른 구조의 평형상태가 존재한다고 주장하였다. 반면에, Speziale과 Mac Giolla Mhuiris⁽⁴⁾는 대부분의 모형은 전단율의 크기와는 무관한 평형상태로 수렴한다고 주장하였다. 명확히 규명하기는 힘들지만, 유동이 받는 변형이 어느 정도 이상 축적되면 전단율의 크기와 무관하게 난류구조가 형성되고 과거의 이력(history)에는 영향을 받지 않을 것이기 때문에, 현재로서는 균일전단류 난류유동에는 전단율의 크기와는 무관하게 유일하고 일반적인(unique and universal) 구조가 있는 것으로 믿어진다. 이와 같은 평형구조는 초기조건과 무관하므로 불확실한 초기조건에 영

향받지 않고 난류모형의 계수를 조정하는 데 사용될 수 있다. Tavoularis와 Corrsin⁽⁵⁾의 실험결과는 거의 평형상태에 이른 난류구조를 보여주며, 조건이 다른 많은 실험과 공통적인 구조를 포함하고 있어서 난류모형을 조정하고 평가하는데 널리 이용되어 왔다.

모형화된 난류 레이놀즈 응력방정식을 사용하여 균일전단류의 지배방정식을 세울 때, 확산항 등을 무시하면 상미분방정식으로 표현된다. 레이놀즈 응력의 지배방정식과 소산율방정식은 서로 연관되어 있다. n 개의 일차 상미분방정식이 연관되어 있는 시스템은 마치 n 차의 상미분방정식과 같이 거동한다. 따라서 그 시스템은 수렴할 수도 있고, 발산하거나 심지어 진동할 수도 있다. 이것은 실제의 난류유동이 항상 평형상태로 지수함수적으로 수렴하는 실험적 사실에 위배된다. 이러한 현상에는 압력-변형률항의 거동이 결정적인 요인이 된다. 몇 가지 모형을 검토한 결과, 압력-변형률항이 레이놀즈 응력에 일차로 비례하는 모형에는 문제가 없으나, 고차인 모형은 예외없이 문제가 있는 것으로 드러났다. 고차의 모형은 수렴은 하지만 전단율이 큰 경우 도중에 진동을 한다든지, 같은 모형에서도 전단율이나 초기조건에 따라 서로 다른 평형상태로 수렴하는 등의 문제를 보였다. (현재까지 이러한 현상은 보고된 바 없으나, 유사한 현상으로 Speziale과 Mac Giolla Mhuiris⁽⁴⁾은 기존의 난류모형들로 회전이 가해진 균일전단유동을 해석할 때 회전속도와 전단율의 비율인 Ω/S 의 값이 어떤 범위를 벗어남에 따라 진동하는 현상을 발견하였다.) 이것은 모형의 차수가 문제가 아니고, 각 모형마다 물리적으로 타당한 거동을 얻기 위한 계수의 범위가 있는데 차수가 낮은 모형은 그 범위가 넓고 따라서 대부분의 모형이 이 범위내의 계수를 사용하는 반면에 차수가 높은 모형은 범위 자체가 좁고 여러 계수가 전부 그 범위에 들어가지는 못하기 때문이다. 이러한 현상을 규명하기 위하여 여기서는 Shih와 Lumley⁽⁶⁾가 제안한 형태의 모형을 한 가지 예로서 사용하였다. 이 모형의 형태는 2차로서, 충분히 일반적인 형태로부터 여러 제한조건을 적용하여 단 두 개의 조정가능한 변수로 모든 계수가 표현되도록 하였다. 평형상태로 발전되는 거동은 이 두 개의 변수에 달려 있음을 보이고, 안정되고 물리적으로 타당한 거동을 보이기 위한 계수의 영역을 제시 하겠다.

2. 난류모형 및 지배방정식

2.1 일반적인 형태의 난류모형

난류 레이놀즈 응력의 지배방정식은 비정상 Navier-Stokes 방정식을 시간평균을 취함으로써 얻어진다. 난류유동장이 균질(homogeneous)하다는 조건으로 확산항을 무시하고 소산항이 등방성(isotropic dissipation rate)이라고 가정하면, 그 지배방정식은 다음과 같이 단순화될 수 있다.

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}, \quad (1)$$

여기에서

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (2)$$

$$\Phi_{ij} = \rho \left(\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j u_i}}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

P_{ij} 와 Φ_{ij} 는 각각 난류생성항과 압력-변형률항이고, ε 은 난류에너지의 소산항이다. 이 중 압력-변형률항과 소산항은 모형화해야 하는 양이다. 다양한 형태의 압력-변형률 모형이 제시되어 왔지만, 그 모형들은 일반적인 형태로 표현될 수 있다. 비등방성 텐서($b_{ij} = \overline{u_i u_j}/2k - \delta_{ij}/3$)에 대해 2차인, 가장 일반적인 형태의 압력-변형률항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & C_1 \varepsilon b_{ij} + C_2 \varepsilon \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} II_b \delta_{ij} \right) \\ & + C_3 k S_{ij} + (C_4 I_1 + C_5 I_2) k b_{ij} \\ & + (C_6 I_1 + C_7 I_2) k \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} II_b \delta_{ij} \right) \\ & + C_8 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} I_1 \delta_{ij} \right) \\ & + C_9 k \left(b_{ik} b_{kl} S_{jl} + b_{jk} b_{kl} S_{il} - \frac{2}{3} I_2 \delta_{ij} \right) \\ & + C_{10} k \left(2b_{ik} S_{kl}^* b_{jl} - \frac{2}{3} I_2 \delta_{ij} \right) \\ & + C_{11} k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \\ & + C_{12} k (b_{ik} b_{kl} W_{jl} + b_{jk} b_{kl} W_{il}) \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$II_b = b_{km} b_{km}$$

$$I_1 = b_{km} S_{km}$$

$$I_2 = b_{kl} b_{lm} S_{km} \quad (5)$$

S_{ij} 는 평균 변형률텐서, W_{ij} 는 평균 회전율 텐서, II_b , I_1 , I_2 는 텐서들로 구성되는 불변량(invariant)이다.⁽⁷⁾

전체 난류 운동에너지의 1/2인 k 와 그 소산율 ε 의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{P_{ii}}{2} - \varepsilon, \quad (6)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{P_{ii}\varepsilon}{2k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (7)$$

일반적인 균일변형유동에서, 유동구조를 결정하는 중요한 무차원량에는 비등방성 텐서와 난류 시간척도(trubulent time scale; k/ε)가 있다. 그 중 비등방성 텐서의 지배방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{Db_{ij}}{Dt} = & \frac{1}{2k} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - \frac{\overline{u_i u_j}}{2k^2} \frac{Dk}{Dt} \\ = & \frac{1}{2k} \left\{ \left(P_{ij} - \frac{P_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) + \Phi_{ij} + \left(2 - \frac{P_{kk}}{\varepsilon} \right) b_{ij} \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

따라서, b_{ij} 에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2 \frac{Db_{ij}}{Dt} = & (C_1 + 2) \frac{\varepsilon}{k} b_{ij} + C_2 \frac{\varepsilon}{k} \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} II_b \delta_{ij} \right) \\ & + \left(C_3 - \frac{4}{3} \right) S_{ij} + \{ (C_4 + 4) I_1 + C_5 I_2 \} b_{ij} \\ & + (C_6 I_1 + C_7 I_2) \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} II_b \delta_{ij} \right) \\ & + (C_8 - 2) \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} I_1 \delta_{ij} \right) \\ & + C_9 \left(b_{ik} b_{kl} S_{jl} + b_{jk} b_{kl} S_{il} - \frac{2}{3} I_2 \delta_{ij} \right) \\ & + C_{10} \left(2b_{ik} S_{kl} b_{jl} - \frac{2}{3} I_2 \delta_{ij} \right) \\ & + (C_{11} - 2) (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \\ & + C_{12} (b_{ik} b_{kl} W_{jl} + b_{jk} b_{kl} W_{il}) \end{aligned} \quad (9)$$

한편, 평균변형률의 역수(inverse of strain rate; $1/S$)가 평균운동(mean motion)의 시간척도이므로, 평균변형률에 대응하는 난류량은 ε/k 라고 볼 수 있다. 그 지배방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) = & \frac{1}{k} \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\varepsilon}{k^2} \frac{Dk}{Dt} \\ = & (C_{\varepsilon 1} - 1) \frac{P_{kk}}{2k} \frac{\varepsilon}{k} - (C_{\varepsilon 2} - 1) \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

그런데, 위의 형태 (4)는 너무 많은 계수를 포함하고 있으므로, 유용한 결과를 얻기가 어렵다. 본 연구에서는 해석을 간단히 하기 위해서 Shih와 Lumley⁽⁶⁾가 제안한 다음 형태의 모형을 사용하도록 하겠다.

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & C_1 \varepsilon b_{ij} + \frac{4}{5} k S_{ij} - 24 a_2 I_1 k b_{ij} \\ & + 12 a_1 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} I_1 \delta_{ij} \right) \\ & + 8 a_2 k (b_{ik} b_{kl} S_{jl} + b_{jk} b_{kl} S_{il} - 2 b_{ik} S_{kl} b_{jl}) \\ & + \frac{4(2-7a_1)}{3} k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \\ & + 8 a_2 k (b_{ik} b_{kl} W_{jl} + b_{jk} b_{kl} W_{il}) \end{aligned} \quad (11)$$

이 모형에서 압력-변형률항의 고율부분(rapid part)은 조정가능한 변수 a_1 과 a_2 로 표현되고, 저율부분(slow part)은 b_{ij} 에 대해 선형으로 비례한다. 참고로 여기에서의 a_1 과 a_2 는 Shih와 Lumley⁽⁶⁾의 원래의 표현으로는 각각 $-a_8$ 와 a_9 에 해당된다. Shih와 Lumley⁽⁶⁾는 C_1 , a_1 , a_2 를 난류 레이놀즈수와 비등방성의 함수로 모형화하였다. 그러나 본 해석에서는 이 계수들을 상수로 가정하고 해석한다.

2.2 균일전단류의 지배방정식

균일전단류의 조건은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} S_{12} &= S/2 = S_{21} \\ W_{12} &= S/2 = -W_{21} \\ S &= \frac{dU_1}{dx_2} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, 논리의 전개를 단순하게 하기 위해 전단율 S 를 양의 값으로 제한한다.

난류 레이놀즈 응력의 지배방정식을 Speziale과 Mac Giolla Mhuiris⁽⁴⁾가 제안한 바와 같이 무차원 변수 k^* , $\varepsilon/(Sk)$, b_{11} , b_{22} , b_{12} , t^* 에 대해 변환하면 다음과 같다. 여기서, $k^* = k/k_0$, $t^* = St$ 이다.

$$\frac{dk^*}{dt^*} = -\left(2b_{12} + \frac{\varepsilon}{Sk}\right)k^* \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt^*} \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right) = 2(1 - C_{\varepsilon 1}) \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right) b_{12} + (1 - C_{\varepsilon 2}) \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right)^2 \quad (14)$$

$$\frac{db_{11}}{dt^*} = \beta_0 \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right) b_{11} + \beta_1 b_{12} b_{11} + \beta_2 b_{12} b_{22} + \beta_3 b_{12} \quad (15)$$

$$\frac{db_{22}}{dt^*} = \beta_0 \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right) b_{22} + \beta_4 b_{12} b_{11} + \beta_5 b_{12} b_{22} + \beta_6 b_{12} \quad (16)$$

$$\frac{db_{12}}{dt^*} = \beta_0 \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right) b_{12} + \beta_7 b_{12}^2 + \beta_8 b_{11}^2 + \beta_9 b_{22}^2$$

$$+ \beta_{10} b_{11} b_{22} + \beta_{11} b_{11} + \beta_{12} b_{22} + \beta_{13} \quad (17)$$

여기에서,

$$\beta_0 = (C_1 + 2)/2 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2 + C_4/2 + C_9/6 + 2C_{10}/3 + C_{12}/2 \\ &= 2 - 12a_2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\beta_2 = C_9/6 - C_{10}/3 + C_{12}/2 = 8a_2 \quad (20)$$

$$\beta_3 = C_8/6 + C_{11}/2 - 4/3 = -8a_1/3 \quad (21)$$

$$\beta_4 = C_9/6 - C_{10}/3 - C_{12}/2 = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_5 &= 2 + C_4/2 + C_9/6 + 2C_{10}/3 - C_{12}/2 \\ &= 2 - 20a_2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\beta_6 = C_8/6 - C_{11}/2 + 2/3 = (20a_1 - 2)/3 \quad (24)$$

$$\beta_7 = 2 + C_4/2 + C_9/2 + C_{10}/2 = 2 - 12a_2 \quad (25)$$

$$\beta_8 = (C_9 - C_{12})/4 = 0 \quad (26)$$

$$\beta_9 = (C_9 + C_{12})/4 = 4a_2 \quad (27)$$

$$\beta_{10} = C_{10}/2 = -4a_2 \quad (28)$$

$$\beta_{11} = (C_8 - C_{11})/4 = (16a_1 - 2)/3 \quad (29)$$

$$\beta_{12} = (C_8 + C_{11} - 4)/4 = (2a_1 - 1)/3 \quad (30)$$

$$\beta_{13} = C_3/4 - 1/3 = -2/15 \quad (31)$$

여기서, 식(14)~(17)은 서로 연관(couple)되어 있으며, (13)에 의해서 지배되는 전체 난류에너지는 이 결과에 종속된다. 따라서 식(14)~(17)을 해석하면 난류의 전개과정을 파악할 수 있다.

3. 균일전단유동의 평형상태

평형상태값은 위의 식에서 $d/dt^* \rightarrow 0$ 로 놓으면 얻어진다. 몇가지 조건에 따라 평형상태값은 유일하지는 않으며, 실수의 값을 얻을 수 없는 경우도 있다. 이 평형상태값 중 유일하게 안정한 것이 실제의 계산에서 얻어지는 정상해(steady solution)가 된다.

3.1 $(\varepsilon/Sk)^\infty \neq 0$, $b_{12}^\infty \neq 0$ 인 경우

식(14)에서

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right)^\infty &= -\frac{2(1 - C_{\varepsilon 1})}{(1 - C_{\varepsilon 2})} b_{12}^\infty = -\frac{2}{a} b_{12}^\infty \\ \alpha &= \frac{(1 - C_{\varepsilon 2})}{(1 - C_{\varepsilon 1})} \end{aligned} \quad (32)$$

그리고 식(15), (16)에서

$$(\beta_1 - 2\beta_0/\alpha) b_{11}^\infty + \beta_2 b_{22}^\infty + \beta_3 = 0 \quad (33)$$

$$\beta_4 b_{11}^\infty + (\beta_5 - 2\beta_0/\alpha) b_{22}^\infty + \beta_6 = 0 \quad (34)$$

이므로

$$b_{11}^{\infty} = \frac{\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5 + 2\beta_0\beta_3/\alpha}{\beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4 - 2\beta_0(\beta_1 + \beta_5)/\alpha + 4\beta_0^2/\alpha^2} \quad (35)$$

$$b_{22}^{\infty} = \frac{\beta_3\beta_4 - \beta_1\beta_6 + 2\beta_0\beta_6/\alpha}{\beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4 - 2\beta_0(\beta_1 + \beta_5)/\alpha + 4\beta_0^2/\alpha^2} \quad (36)$$

이 되고 식(17)에서

$$(b_{12}^{\infty})^2 = \frac{\beta_8 b_{11}^{\infty 2} + \beta_9 b_{22}^{\infty 2} + \beta_{10} b_{11}^{\infty} b_{12}^{\infty} + \beta_{11} b_{11}^{\infty} + \beta_{12} b_{22}^{\infty} + \beta_{13}}{2\beta_0/\alpha - \beta_7} \quad (37)$$

을 얻는다. 이들을 Shih와 Lumley⁽⁶⁾의 계수로 표현하면 다음과 같다.

$$b_{11}^{\infty} = \frac{4(a_1 - a_2 - a_1\beta_0/\alpha)}{3\{(1-10a_2)(1-6a_2) - 2(1-8a_2)\beta_0/\alpha + \beta_0^2/\alpha^2\}} \quad (38)$$

$$b_{22}^{\infty} = \frac{(1-10a_1)(1-6a_2 - \beta_0/\alpha)}{3\{(1-10a_2)(1-6a_2) - 2(1-8a_2)\beta_0/\alpha + \beta_0^2/\alpha^2\}} \quad (39)$$

$$(b_{12}^{\infty})^2 = \frac{12a_2 b_{22}^{\infty 2} - 12a_2 b_{11}^{\infty} b_{22}^{\infty} + (16a_1 - 2)b_{11}^{\infty} + (2a_1 - 1)b_{22}^{\infty} - 2/5}{36a_2 - 6 + 6\beta_0/\alpha} \quad (40)$$

위의 평형상태값은 식(33), (34)의 계수로 구성되는 행렬식(determinant)이 0이 아닌 경우에 한정된다. 즉, 식(35), (36)의 분모가 0인 경우는 평형상태값은 정의되지 않는다. 식(38), (39)에서 $a_2 = (1 - \beta_0/\alpha)/10$ 또는 $a_2 = (1 - \beta_0/\alpha)/6$ 일 때는 불능에 해당된다. 또한 분모, 분자가 모두 0이면 부정형으로, 해는 존재하나 유일한 값을 갖지 않는다. 이 경우에 평형상태값은 여러 값이 한 점으로 표현되는 특이점(singular point)이 된다. 그 값은 $a_1 = 1/10$, $a_2 = (1 - \beta_0/\alpha)/10$ 와 $a_1 = 1/6$, $a_2 = (1 - \beta_0/\alpha)/6$ 이다. 그러나 식(40)를 보면 $a_2 = (1 - \beta_0/\alpha)/6$ 인 특이점은 존재할 수 없음을 알 수 있다. 실제로는 $a_1 = 1/10$, $a_2 = (1 - \beta_0/\alpha)/10$ 이 유일한 특이점이다.

3.2 $(\varepsilon/Sk)^{\infty} = 0$, $b_{12}^{\infty} \neq 0$ 인 경우

$(\varepsilon/Sk)^{\infty} = 0$ 의 경우는 난류시간척도 k/ε 이 후류로 가면서 무한히 커지는 현상을 의미한다. 위의 식(15), (16), (17)에서 $(\varepsilon/Sk)^{\infty} = 0$ 이므로, 평형상태값은 3.1의 결과에서 $\beta_0/\alpha = 0$ 인 경우와 같다. 물리적으로는 급속변형의 한계값(rapid distortion limit)에 해당되며, 저울 압력-변형률항이 무시된

다. 그러나 이 평형상태는 극단적인 한계값으로, 실제의 유동과는 다르다.

3.3 $(\varepsilon/Sk)^{\infty} = 0$, $b_{12}^{\infty} = 0$ 인 경우

b_{11}^{∞} 와 b_{22}^{∞} 는 아래의 식으로 표현되는 곡선 위의 값을 갖는다.

$$\beta_8 b_{11}^{\infty 2} + \beta_9 b_{22}^{\infty 2} + \beta_{10} b_{11}^{\infty} b_{22}^{\infty} + \beta_{11} b_{11}^{\infty} + \beta_{12} b_{22}^{\infty} + \beta_{13} = 0 \quad (41)$$

Shih와 Lumley⁽⁶⁾의 계수로 표현하면,

$$12a_2 b_{22}^{\infty 2} - 12a_2 b_{11}^{\infty} b_{22}^{\infty} + (16a_1 - 2)b_{11}^{\infty} + (2a_1 - 1)b_{22}^{\infty} = 2/5 \quad (42)$$

$$b_{11}^{\infty} = \frac{12a_2 b_{22}^{\infty 2} + (2a_1 - 1)b_{22}^{\infty} - 2/5}{12a_2 b_{22}^{\infty} - (16a_1 - 2)} \quad (43)$$

여기서, b_{22}^{∞} 는 임의의 값을 갖는다. 따라서 평형상태값이 a_1 과 a_2 로만 표현되고, C_1 , C_{e1} , C_{e2} 와는 무관하게 된다. 그런데, 실제로는 소산항과 저울 압력-변형률항이 난류구조를 결정하는데 중요한 역할을 하므로, 위와 같은 평형상태값은 타당하지 않을 것으로 보인다. 또한, 식(13)에서 $dk/dt^* \rightarrow 0$ 이 되는데, $b_{12}^{\infty} = 0$ 이므로 난류운동에너지에 변화가 없고 $\overline{uv} \rightarrow 0$ 이 된다. 이 결과 역시 균일전단류 실험의 결과에 위배된다.

3.4 물리적으로 타당한 평형상태값의 범위

3.3의 평형값을 배제하고, 3.2의 평형값이 3.1의 특별한 경우라고 볼 때 물리적으로 타당한 평형상태값은 3.1의 식으로 표현되는 값이다. 그 값은 다음의 범위에 들어야 한다.

$S > 0$ 이라고 정의하였으므로

$$\left(\frac{\varepsilon}{Sk}\right)^{\infty} > 0 \quad (44)$$

비등방성 텐서의 정의에 의해

$$-1/3 \leq b_{11}^{\infty} \leq 2/3 \quad (45)$$

$$-1/3 \leq b_{22}^{\infty} \leq 2/3 \quad (46)$$

$$-1/3 \leq b_{33}^{\infty} = -(b_{11}^{\infty} + b_{22}^{\infty}) \leq 2/3 \quad (47)$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{Sk}\right)^{\infty} = -\frac{2}{\alpha} b_{12}^{\infty} > 0 \text{이므로}$$

$$b_{12}^{\infty} < 0 \quad (48)$$

$$\rho^2 = (\overline{uv})^2 / (\overline{u^2 v^2}) \leq 1 \text{에 의해 (Schwarz의 부등식)}$$

$$-\frac{(1 + 3b_{11}^{\infty} + 3b_{22}^{\infty} + 9b_{11}^{\infty} b_{22}^{\infty})^{1/2}}{3} \leq b_{12}^{\infty} \quad (49)$$

따라서 평형상태값이 위의 범위에 들도록 하기 위하여 모형상수들인 a_1 과 a_2 의 범위를 제한해야 한다. $\beta_0/\alpha = -0.5$ ($C_1 = -4.25$, $C_{e1} = 1.4$, $C_{e2} = 1.9$)의 경우에 위의 각 조건들 (45) ~ (49)에 해당되는 계수의 영역을 각각 Fig. 1(a)~(e)에 음영으로 표시

하였다. 이들 모든 조건을 만족시키는 영역은 Fig 1(f)의 음영부분이다. Fig. 2에 여러가지 β_0/α 의 경우에 대한 영역을 표시하였는데, 그 중 $\beta_0/\alpha = -0.5$ 의 영역을 밝은 음영으로, $\beta_0/\alpha = 0$ 의 영역을 짙은 음영으로 표시하였다. β_0/α 가 큰 음의 값을

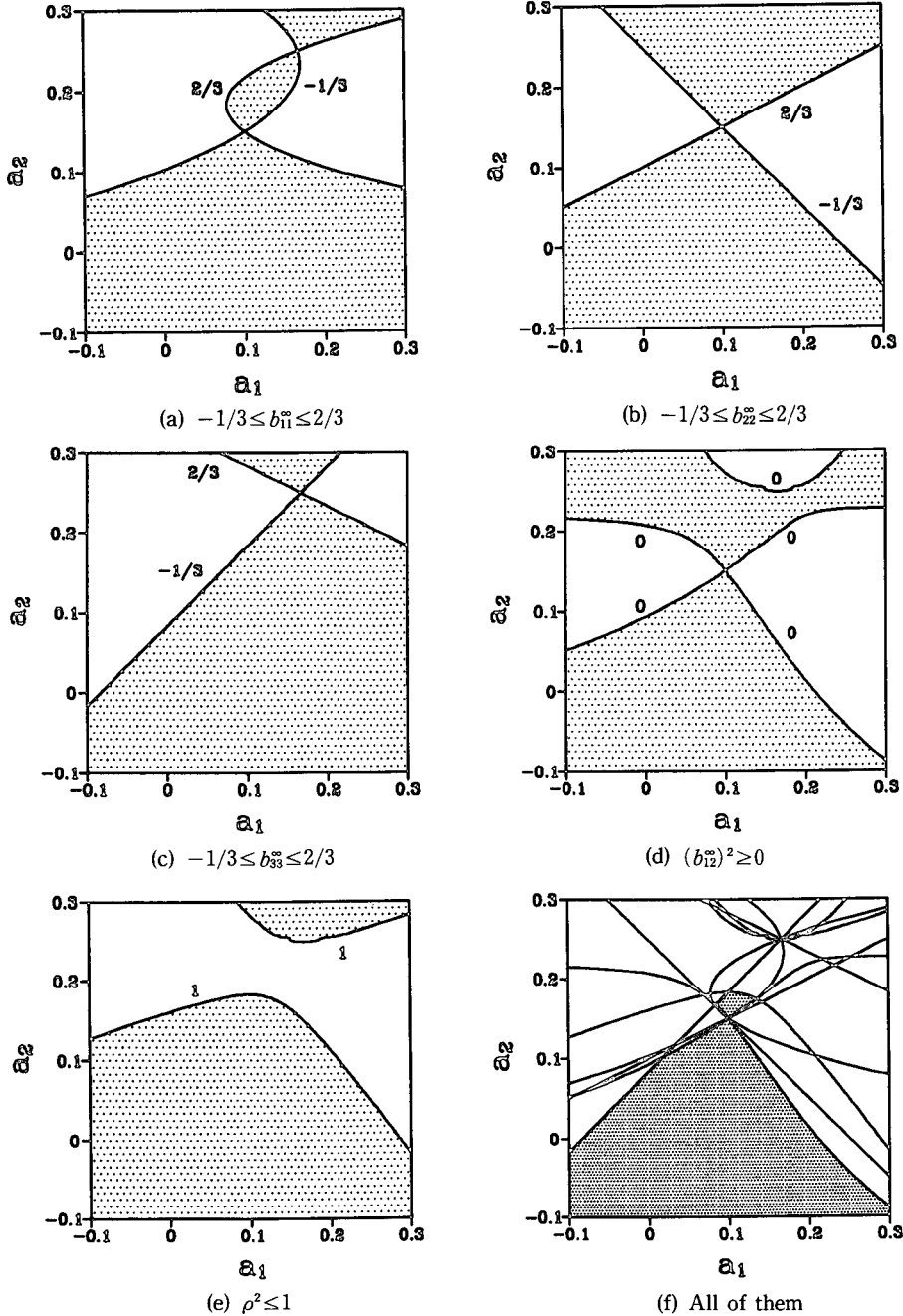


Fig. 1 Acceptable regions for $\beta_0/\alpha = -0.5$ of

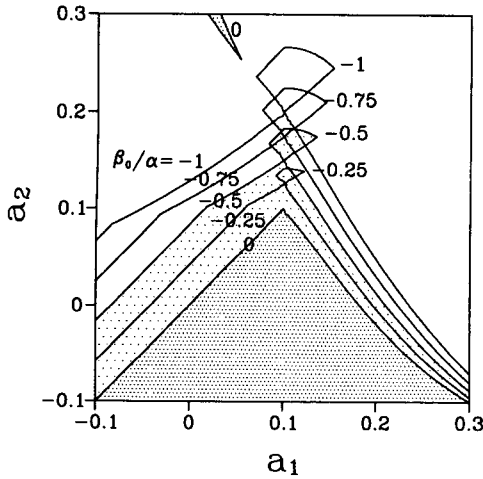


Fig. 2 Regions of realistic equilibrium values for a_1 and a_2 with various β_0/α

가질수록 등방화의 경향이 크기 때문에 타당한 평형상태값을 보장하는 a_1 과 a_2 의 영역이 넓어진다.

4. 안정성 해석

4.1 지배방정식의 선형화

모형화된 지배방정식은 타당한 평형상태값을 재현해야 하며, 그 값만이 안정하고 다른 타당하지 못한 값은 불안정해야 실제 계산과정에서 초기조건에 무관하게 유일한 해를 얻는다. 안정성 해석을 위해서 지배방정식을 평형상태 부근에서 선형화하였다.

새로운 변수

$$z_1 = \frac{\epsilon}{Sk} - \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty$$

$$z_2 = b_{11} - b_{11}^\infty$$

$$z_3 = b_{22} - b_{22}^\infty$$

$$z_4 = b_{12} - b_{12}^\infty \text{에 대해}$$

$$\frac{dz_1}{dt^*} = 2(1 - C_{e1}) \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty z_4 + 2(1 - C_{e1}) b_{12}^\infty z_1 + 2(1 - C_{e2}) \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty z_1 + O(r^2) \quad (50)$$

$$\frac{dz_2}{dt^*} = \beta_0 \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty z_2 + \beta_0 b_{11}^\infty z_1 + \beta_1 b_{12}^\infty z_2 + \beta_2 b_{12}^\infty z_3 + (\beta_1 b_{11}^\infty + \beta_2 b_{22}^\infty + \beta_3) z_4 + O(r^2) \quad (51)$$

$$\frac{dz_3}{dt^*} = \beta_0 \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty z_3 + \beta_0 b_{22}^\infty z_1 + \beta_4 b_{12}^\infty z_2 + \beta_5 b_{12}^\infty z_3 + (\beta_4 b_{11}^\infty + \beta_5 b_{22}^\infty + \beta_6) z_4 + O(r^2) \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_4}{dt^*} &= \beta_0 \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty z_4 + \beta_0 b_{12}^\infty z_1 \\ &+ (2\beta_8 b_{11}^\infty + \beta_{10} b_{22}^\infty + \beta_{11}) z_2 \\ &+ (\beta_{10} b_{11}^\infty + 2\beta_9 b_{22}^\infty + \beta_{12}) z_3 \\ &+ 2\beta_7 b_{12}^\infty z_4 + O(r^2) \end{aligned} \quad (53)$$

여기에서,

$$r \equiv (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)^{1/2} \quad (54)$$

고차항을 무시하고 행렬형태로 표현하면,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$a_{11} = 2(1 - C_{e1}) b_{12}^\infty + 2(1 - C_{e2}) \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty \quad (56)$$

$$a_{12} = 0 \quad (57)$$

$$a_{13} = 0 \quad (58)$$

$$a_{14} = 2(1 - C_{e1}) \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty \quad (59)$$

$$a_{21} = \beta_0 b_{11}^\infty \quad (60)$$

$$a_{22} = \beta_0 \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty + \beta_1 b_{12}^\infty \quad (61)$$

$$a_{23} = \beta_2 b_{12}^\infty \quad (62)$$

$$a_{24} = \beta_1 b_{11}^\infty + \beta_2 b_{22}^\infty + \beta_3 \quad (63)$$

$$a_{31} = \beta_0 b_{22}^\infty \quad (64)$$

$$a_{32} = \beta_4 b_{12}^\infty \quad (65)$$

$$a_{33} = \beta_0 \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty + \beta_5 b_{12}^\infty \quad (66)$$

$$a_{34} = \beta_4 b_{11}^\infty + \beta_5 b_{22}^\infty + \beta_6 \quad (67)$$

$$a_{41} = \beta_0 b_{12}^\infty \quad (68)$$

$$a_{42} = 2\beta_8 b_{11}^\infty + \beta_{10} b_{22}^\infty + \beta_{11} \quad (69)$$

$$a_{43} = \beta_{10} b_{11}^\infty + 2\beta_9 b_{22}^\infty + \beta_{12} \quad (70)$$

$$a_{44} = \beta_0 \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty + 2\beta_7 b_{12}^\infty \quad (71)$$

위 시스템의 안정성을 판정하는 것은 결국 고유치문제(eigenvalue problem)로 귀결된다. 위 행렬의 고유치는 평형값 근처 거동의 지수(exponent)에 해당한다고 볼 수 있다. 즉, 계수행렬 $[a_{ij}]$ 의 고유치가 전부 음의 값이면 위 시스템은 수렴하며 안정하다. 그 중 하나라도 양의 값이면 불안정하고 발산한다. 만약 고유치의 허수부가 0이라면 해는 진동하지 않으며, 이러한 평형값을 node라 한다. 허수부가 어떤 값을 가지면 해는 진동한다. 이 해를 focus 또는 spiral 형태의 평형값이라고 한다. 그 중에서 실수부가 0이어서 무한히 진동하는 경우를

center라고 한다.

4.2 선형화된 안정성 해석

모든 고유치를 변수로 표현된 수식 형태로 구하면 대단히 복잡한 결과를 얻는다. 일단은 단순한 형태로 표현되는 몇가지 부류로 나누어 검토하기로 한다. 위에서 구한 평형상태값 중에서 물리적으로 타당하지 못한 값이 불안정한 경향을 갖고 타당한 값이 안정한 거동을 보이도록 하는 계수를 선택하여야 한다.

4.2.1 $b_{12} \neq 0, \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty = 0$

이 평형해는 전단율이 대단히 크거나 난류시간척도가 큰 경우이다. 즉 난류에 급속변형(rapid distortion)이 가해지는 경우이다. 고율 압력-변형률항이 저율 부분에 비해 대단히 크게 작용한다.

계수행렬 $[a_{ij}]$ 의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (72)$$

위 행렬의 고유치는 $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}\} = b_{12} \{2(1-C_{e1}), \beta_1, \beta_5, 2\beta_7\}$ 이다. $C_{e1} < 1, b_{12}^\infty < 0, a_2 < 1/10$ 이라면 모든 고유치가 음이다. 그러나 대부분의 모형에서 $C_{e1} \approx 1.4$ 이므로, 최소한 한 개의 고유치는 양의 값을 갖는다. 따라서 위의 조건을 불안정하며, $(\epsilon/Sk)^\infty \approx 0$ 의 초기조건으로 시작하면 다른 값으로 천이한다.

4.2.2 $b_{12} > 0, \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty = -\frac{2}{\alpha} b_{12} < 0$

전에 보인 바와 같이, 이러한 평형값은 물리적으로 타당하지 않다. 이 시스템의 고유치는 $b_{12} < 0$ 경우와 절대값이 같고 부호가 반대이다. 그러므로, 모든 고유치가 음의 값은 아니므로 항상 불안정하다. 이 값은 실제로는 $S < 0$ 으로 정의했을 때 얻어지는 값이다.

4.2.3 $b_{12} = 0, \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty = 0$

계수행렬 $[a_{ij}]$ 의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

위 행렬의 고유치는 $\{0, 0, -(a_{24}a_{42} + a_{34}a_{43})^{1/2}, (a_{24}a_{42} + a_{34}a_{43})^{1/2}\}$ 이다. 만약 $a_{24}a_{42} + a_{34}a_{43} > 0$ 이라면, 이 시스템은 뒤의 두 고유치의 부호가 반대이므로 명백히 불안정하다. 한편 $a_{24}a_{42} + a_{34}a_{43} < 0$ 이라면, 고유치는 실수부가 없고 평형값은 진동하면서 수렴도 발산도 하지 않는 center형태가 된다. 이 값은 a_1, a_2 와 b_{12} 의 값에 따라 불안정한 node 이거나 무한히 진동하는 center형태를 갖는다.

4.2.4 $b_{12} < 0, \left(\frac{\epsilon}{Sk}\right)^\infty = -\frac{2}{\alpha} b_{12} > 0$

이 평형해는 가장 일반적인 경우이므로 고유치를 수식으로 표현하기는 힘들다. 그러나, 특정한 a_1 과 a_2 에 대한 고유치를 구하여 검토하면, β_0/α 에 따라 Fig. 3에 표시된 영역의 아래구간에 들어 있을 때 안정하다. 그 중 $\beta_0/\alpha = -0.5$ 의 영역을 밝은 음영으로, $\beta_0/\alpha = 0$ 의 영역을 짙은 음영으로 표시하였다. 이 영역은 $\beta_{12} < 0$ 인 계수영역 중에서 $a_2 < (1 - \beta_0/\alpha)/10$ 인 부분과 같다. 안정된 영역의 고유치는 네 값 모두 음의 실수이거나, 두 값은 음의 실수이고 두 값은 실수부가 음인 공액복소수(complex conjugate)이다. 즉, 평형상태는 안정한 node 또는 spiral이다.

4.3 실제 계산의 경우

실제의 계산에서는 $\beta_0/\alpha, a_1$ 과 a_2 가 정해졌을 때, 이 조건에서 4.2.4의 평형상태값이 안정하다면 $\epsilon/(Sk), b_{11}, b_{22}, b_{12}$ 는 4.2.4의 평형상태값으로 수렴하지만 만약 이 조건에서 4.2.4의 평형상태값이 불

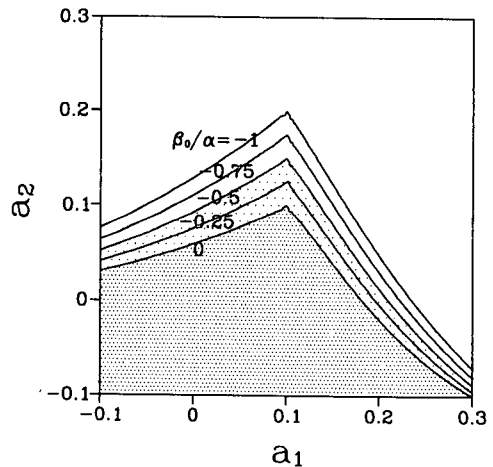


Fig. 3 Regions of stable convergence for a_1 and a_2 with various β_0/α

안정하다면 4.2.3의 값으로 수렴한다. 즉, Fig. 3의 범위 안쪽의 계수일 경우는 4.2.4의 값으로 수렴하고, 바깥쪽의 계수일 경우는 4.2.3의 값으로 수렴하는 결과를 얻는다. 위의 해석에서 보는 바와 같이 4.2.1, 4.2.2의 평형상태값은 항상 불안정한 node이므로 계산시 발산하거나 안정한 다른 값으로 천이한다. 4.2.3의 경우, 이 값은 b_{22} 의 값이 임의적(arbitrary)이므로 주어진 계수에 대해 평형상태값이 불안정한 node인지 center인지 판단할 수 없지만 실제 계산에서 나타나지 않거나 어떤 평형상태값을 중심으로 무한히 진동해야 할 것이다. 그러나 실제의 계산에서는 초기조건에 무관하게 진동하면서 어떤 값으로 수렴한다. 실제로 감쇠가 없이 순전히 진동만 하는 해는 $C_1 = -2$ 인 조건에서만 얻어진다. 이것은 선형해석이 잘못된 것은 아니고, 선형해석의 결과는 평형값에서 대단히 가까운 값에서의 거동을 설명해 주며, 초기조건이 평형값에서 멀리 떨어진 경우는 다를 수도 있기 때문이다. $C_1 < -2$ 인 조건에서 $b_{22} = -\delta$ 와 $(\epsilon/Sk)^\infty = \delta$ ($0 < \delta \ll 1$)로 놓고 해석을 하면, (즉, 평형값에서 약간 떨어진 점 부근에서 해석을 하면) 고유치의 실수부가 전부 음의 값을 갖는다. δ 를 점점 줄여감에 따라 고유치의 실수부는 0으로 접근하여 b_{22} 와 $(\epsilon/Sk)^\infty$ 를 0으로 놓으면 고유치는 순허수가 된다. 주목할만한 점은 이 해를 갖는 조건에서는 진동하는 경향이 다른 평형해와 비교하여 눈에 띄게 두드러진다는 점이다. 수렴을 하는 경우에도 지수의 실수부가 거의 0에 가깝기 때문에, 허수부의 영향인 진동이 심하게 나타난다. 이 현상은 특히 ϵ/Sk 의 초기조건이 거의 0에 가까와 감쇠효과가 적을 때 심하게 나타난다. 반면에 4.2.4의 경우, 4개의 고유치 중 2개가 공액복소수인 spiral형태의 평형상태값이라 해도 실제의 계산에서 수렴해 가는 과정은 4.2.3의 경우와 달리 진동하는 경향은 거의 볼 수 없다.

4.4 안정한 계수의 범위

이상의 해석에서 난류모형의 계수 β_0/α , a_1 과 a_2 가 정해지면 평형상태값과 그 값으로 수렴하는 과정의 거동이 정해짐을 보였다. 주어진 β_0/α 에 대해서 4.2.4의 형태의 평형상태가 안정한 a_1 과 a_2 의 영역 내에서는 4.2.3의 형태를 갖는 평형상태값은 불안정한 node이다. 이러한 계수를 사용하면 4.2.4의 상태로 유인(attract)된다. 반면에 4.2.4의 상태가 불안정한 영역에서는 4.2.3의 상태로 유인된다.

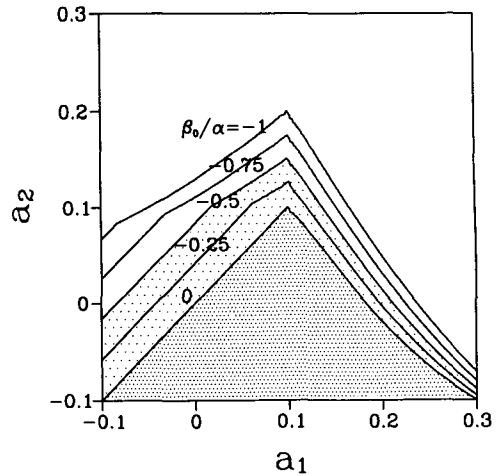


Fig. 4 Stable and acceptable regions for a_1 and a_2 with various β_0/α

이 영역에서는 center형태의 평형상태값을 갖고, 실제로는 안정한 spiral형태의 거동을 한다. 그러므로 물리적으로 타당하고 안정한 평형상태를 얻기 위해서는 계수의 범위가 Fig. 2와 Fig. 3의 공통부분인 Fig. 4의 내부에 있어야 한다. 그 중 $\beta_0/\alpha = -0.5$ 의 영역을 밝은 음영으로, $\beta_0/\alpha = 0$ 의 영역을 짙은 음영으로 표시하였다. Fig. 2의 영역중 $a_2 < (1 - \beta_0/\alpha)/10$ 인 부분이 불안정한 영역임을 알 수 있다.

다음은 실제의 계산에서 나타나는 거동을 살펴보겠다. 실제의 계산에서는, 식(13)~(17)의 일차 연립 상미분방정식을 수치적으로 풀어야 한다. 초기조건이 있는(initial value problem) 상미분방정식을 풀기 위한 방법으로는 Euler, Runge-Kutta, Milne, Adams-Moulton 등 여러 방법이 있는데,⁽⁸⁾ 본 연구에서는 그 중에서 수치적 안정성이 좋고 정확도가 높은 Runge-Kutta-Fehlberg방법을 사용하였다. 이 방법의 오차는 진행방향 간격의 5차($O(h^5)$; h = step size)이며, 간격을 1/10로 줄여도 결과의 차이를 식별할 수 없음을 확인하였다. 먼저 한 가지 예로서 $\beta_0/\alpha = -0.5$, $a_1 = 0.1$ 인 경우 a_2 가 여러가지 값을 가질 때 그 거동을 Fig. 5에 나타내었다. 초기조건은 $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, $b_{12} = 0$, $\epsilon/Sk = 1$ 이다. 주의할 점은 $a_1 = 0.1$ 일 때, 식(38)에서와 같이 a_2 에 무관하게 $b_{22} = 0$ 이다. 여기에서 $a_2 = 0$ 인 경우는 안정한 영역이며, 진동이 없이 지수함수적으로 수렴한다. $a_2 = 0.15$ 는 $a_2 = (1 - \beta_0/\alpha)/10$ 에 해당되는 특이점이다. 이 경우는 초기조건에 따라 다른 평형값을

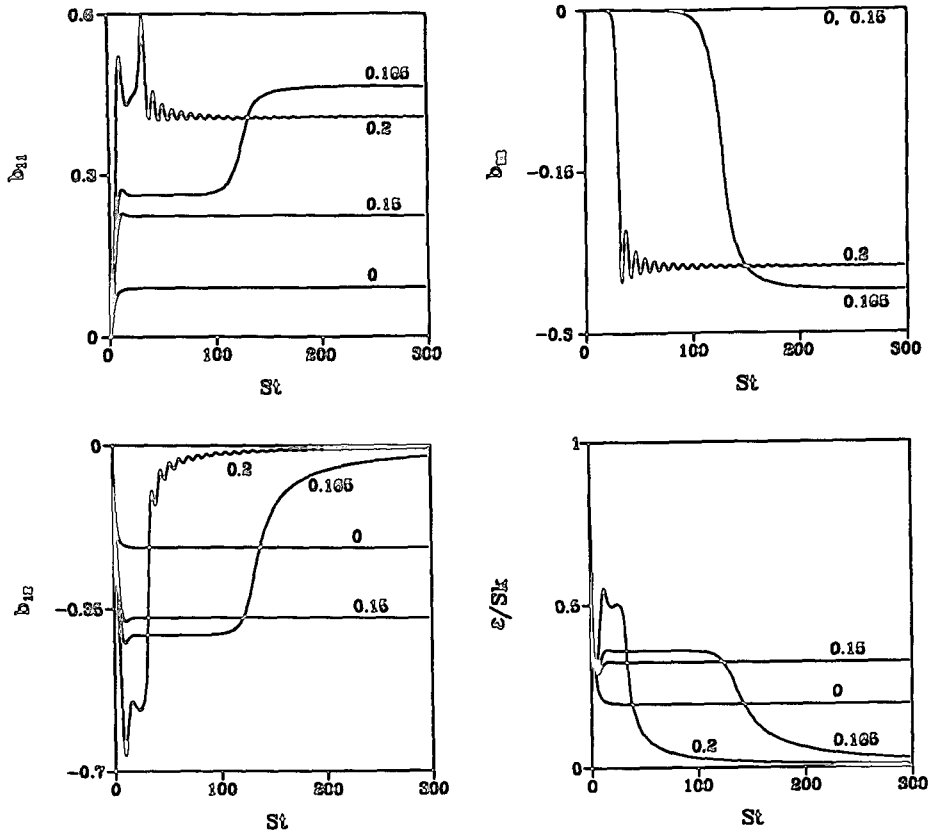


Fig. 5 Evolution of b_{ij} and ϵ/Sk in homogeneous shear flow simulated using $a_1=0.1$ and various a_2 values

가지며, 안정성을 판단하기 어려우나, 안정한 평형값과 유사한 거동을 보이는 것으로 보인다. $a_2=0.165$ 는 Fig. 2에서 평형상태값은 타당하게 정의되나 Fig. 3에서 보듯이 불안정한 영역에 해당된다. 이 조건에서 해는 4.2.4 형태의 평형상태값으로 수렴했다가 4.2.3 형태의 평형상태값으로 천이한다. $a_2=0.2$ 는 4.2.4 형태의 타당한 평형상태값이 존재하지 않는 영역이다. 따라서 계산결과는 심하게 진동하면서 4.2.3의 형태로 수렴한다.

평형해의 값이나 평형상태 주변의 거동은 초기조건과 무관하나, 평형상태에 수렴해 가는 전과과정에서의 거동은 초기조건의 영향을 받는다. 그것은 ϵ/Sk 의 초기조건에 따라, 저울 압력-변형률항의 비중이 달라지기 때문이다. ϵ/Sk 의 초기조건이 거의 0에 가까우면, 계산 초기에 저울 압력-변형률항의 영향은 거의 무시할만하다. 이러한 조건의 초기 거동은 $\beta_0/\alpha=0$ 일 때의 거동과 유사하게 된다. 그

런데 예를 들어 $a_1=0.2, a_2=0$ 인 경우 등과 같이 4.2.4의 평형값이 $\beta_0/\alpha=0$ 의 계수에서는 불안정하고 $\beta_0/\alpha=-0.5$ 의 계수에서는 안정한 경우, $\beta_0/\alpha=-0.5$ 의 계수와 $\epsilon/Sk=0$ 의 초기조건으로 계산하면 처음에는 진동하다가 4.2.4의 안정된 값으로 천이한다. 이러한 초기거동은 물리적으로는 있을 수 없는 것이다. 따라서, 초기조건에 무관하게 지수함수적인 안정한 거동을 보이기 위해서는 a_1 과 a_2 가 Fig. 4의 $\beta_0/\alpha=0$ ($C_1=-2$)의 범위 내에 들어야 한다. 그 값을 해석적으로 구하면

$$\begin{aligned}
 a_2 < a_1 < \frac{-\gamma_2 - (\gamma_2^2 - 4\gamma_1\gamma_3)^{1/2}}{2\gamma_1} \\
 \gamma_1 &= -220 - 1200a_2 + 18000a_2^2 \\
 \gamma_2 &= -20 + 1360a_2 - 8400a_2^2 \\
 \gamma_3 &= 11 - 296a_2 + 2060a_2^2 - 3600a_2^3
 \end{aligned} \tag{74}$$

이다. 여기서, $a_2 < 0.1$ 로 제한된다.

5. 검토 및 모형에의 적용

지금까지 주로 고율 압력-변형률항과 관련된 안정성에 대한 해석을 수행하였다. 여기서는 기존의 모형의 평형해와 안정성을 검토하고자 한다.

Launder 등⁽⁹⁾이 제안한 선형모형은 $C_1 = -3$, $C_{e1} = 144$, $C_{e2} = 1.9$ 이고, 고율 압력-변형률의 조정변수를 $c_2 = 0.4$ 로 놓았다. 이 계수는 $\beta_0/\alpha = -0.244$, $a_1 = 8/55$, $a_2 = 0$ 에 해당되는데, Fig. 4에서 보면 안정된 영역 안에 있다. 따라서 이 모형으로 균일전단류 유동을 재현하는 경우에 비정상적 거동이 없는 것을 설명할 수 있다. Launder 등⁽⁹⁾이 제안한 모형의 계수인 c_2 에 대하여 평형상태의 b_{ij} 의 값을 구하면, Fig. 6과 같다. (이 그림은 결국 Fig. 1의 결과에서 $a_2 = 0$ 인 단면의 그림이라고 볼 수 있다.) b_{ij} 가 정의에 타당하고 안정된 값을 갖기 위해서는 $-0.965 \leq c_2 \leq 0.777$ ($-0.0407 \leq a_1 \leq 0.197$)의 범위

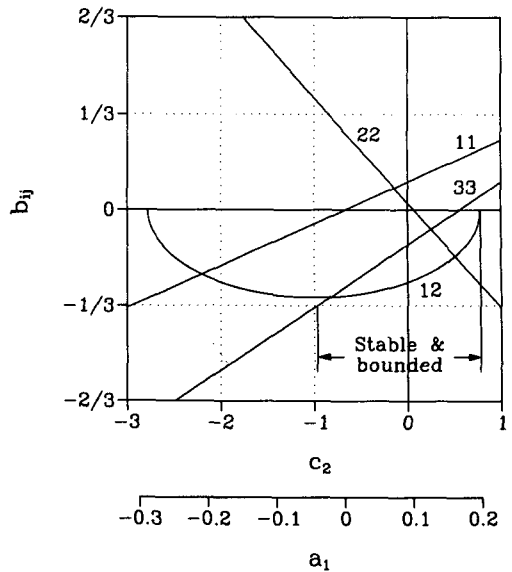


Fig. 6 Equilibrium values b_{ij} vs. c_2 in the model of Launder et al.⁽⁹⁾

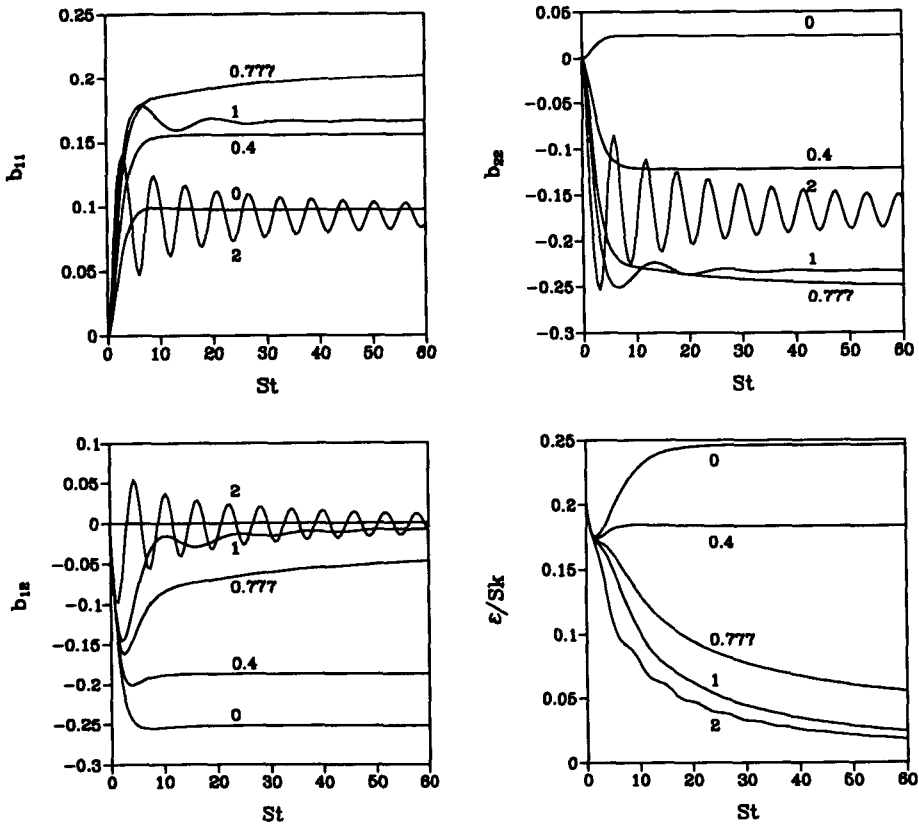
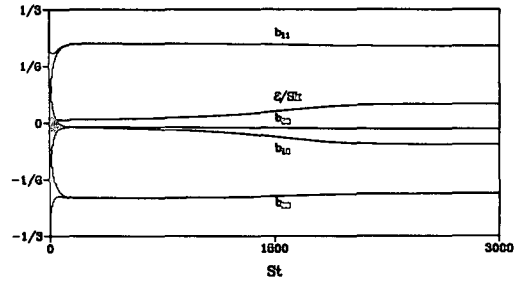


Fig. 7 Evolution of b_{ij} and ϵ/Sk in homogeneous shear flow with various c_2 in the model of Launder et al.⁽⁹⁾

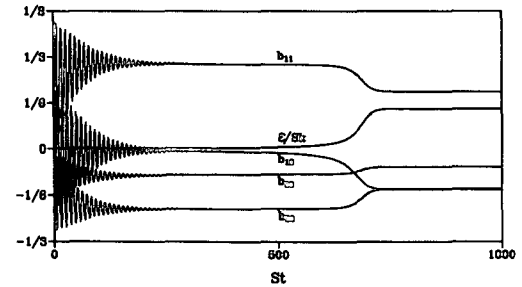
에 있어야 한다. Fig. 7은 Launder 등⁽⁹⁾의 모형에서 c_2 의 값을 5가지로 변화시켰을 때 b_{ij} 와 ϵ/Sk 의 전개를 보여주고 있다. 이 모형은 선형모형이지만 그림에서 보는 바와 같이 $c_2 \geq 0.777$ ($a_1 \geq 0.197$)의 값을 가지면 비정상적인 거동을 보인다. 진동하거나, 타당하지 못한 값으로 수렴하는 경향은 모형의 차수가 고차이기 때문에 그런 것은 아니다.

Shih와 Lumley⁽⁶⁾의 모형은 2차의 모형 중에서는 가장 단순한 형태이다. 더 복잡한 형태의 모형에 대해서도 선형화된 안정성해석은 할 수 있으나, 기준이 되는 평형값을 구할 수가 없다. 예를 들어, Haworth와 Pope⁽⁷⁾가 제안한 모형은 Shih와 Lumley⁽⁶⁾의 모형과는 달리 선형성 원리(linearity principle)를 무시하고 좌표 불변성조건(material frame indifference)을 추가하여 모든 계수를 4개의 변수로 표현하였다. 한편, Fu 등⁽¹⁰⁾은 3차의 형태로 모형화하여 단 한 개의 변수만을 조정가능한 것으로 남기고 다른 계수는 여러 제한조건을 적용하여 얻어지는 상수를 적용하였다. 이 모형들은 안정성해석은 거의 불가능하지만 ϵ/Sk 의 초기조건이 거의 0에 가까와 감쇠효과가 적은 경우에 대해서 계산하여 안정성을 시험할 수 있다. 그 결과가 Fig. 8에 나타나 있다. 두 모형으로 계산한 결과는 모두 처음에는 진동하다가 $b_{ij} < 0$ 인 안정된 평형값으로 천이한다. 계산 초기의 진동은 실험결과 등에서 보여지는 실제의 거동과는 명백히 다르다. 따라서 이 모형들은 저울 압력-변형률항이 포함되면 안정하고, 제외되면 불안정한 범위에 있음을 알 수 있다. 또한, Haworth와 Pope⁽⁷⁾의 모형은 안정된 평형상태값이 $b_{11} = 0.225$, $b_{22} = -0.208$, $b_{33} = -0.0627$, $(\epsilon/Sk)^\infty = 0.0558$ 로서, 대부분의 실험결과나 다른 모형들이 예측하는 값에서 크게 벗어난다.

Shih와 Lumley⁽⁶⁾는 C_1 을 난류레이놀즈 수와 비등방성의 함수로 모형화하고 a_1 은 비등방성에 따라 0.1에서 0.18까지 변화도록 하였으며 a_2 는 0.1의 상수로 정하였다. 이들 계수가 상수가 아닌 경우 평형상태값을 수식으로 구할 수 없고, 실제로 유일한 평형값을 갖지 않는다. Fig. 9를 보면 같은 종류의 균일전단유동에서도 ϵ/Sk 의 초기조건에 따라 다른 평형값을 갖는 것을 알 수 있으며, 특히 다른 2차 모형이 ϵ/Sk 의 초기조건이 대단히 작을 때 진동하는 데 반하여 이 모형은 실제의 유동에서도 흔히 나타나는 값인 $(\epsilon/Sk)_0 \approx 0.2$ 정도에서도 진동



(a) Model=Haworth and Pope⁽⁷⁾; $(\epsilon/Sk)_0 = 10^{-2}$



(b) Model=Fu et al.⁽¹⁰⁾; $(\epsilon/Sk)_0 = 10^{-3}$

Fig. 8 Unrealistic oscillatory behavior followed by the transition to equilibrium values;

하는 경향을 보인다. Fig. 4를 볼 때 $0.1 \leq a_1 \leq 0.18$ 과 $a_2 = 0.1$ 의 조건에서 C_1 (또는 β_0/a)이 변하는 경우 항상 안정된 범위 내에 있지 못하는 것을 알 수 있다. ϵ/Sk 의 초기값이 큰 경우는 $\beta_0/a < 0$ 이 되고 안정한 값을 얻는 계수로 수렴하지만, 초기값이 작으면 수렴 도중에 a_1 이 안정한 영역을 벗어나고 진동하게 된다. ϵ/Sk 의 초기값이 대단히 작은 경우는 계산 초기에 $\beta_0/a = 0$, $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.1$ 의 특이점 안으로 수렴하여, 진동하지는 않지만 유일하지 않은 평형상태값을 갖게 된다.

본 해석에서 적용한 형태의 모형보다 더 일반적이고 복잡한 압력-변형률항 모형은 평형상태값을 해석적으로 구하기 어려워 해석이 불가능하다. 그러나 그 대신에 실제의 계산결과를 이용하여 시험할 수 있다. 모형에서 저울 압력-변형률항의 영향을 제외하고(식(4)에서 $C_1 = -2$, $C_2 = 0$) 균일전단류를 계산했을 때, 진동하는 경향이 없이 $b_{ij} < 0$ 인 유일한 평형상태값으로 수렴해야 한다. 불안정한 모형의 경우는 감쇠없이 무한히 진동하는 경향을 보이거나, 초기조건에 따라 다른 값으로 수렴한다. 이러한 모형은 $\epsilon/Sk \approx 0$ 인 초기조건으로 계산하였을 때 비정상적인 거동을 보일 수 있다.

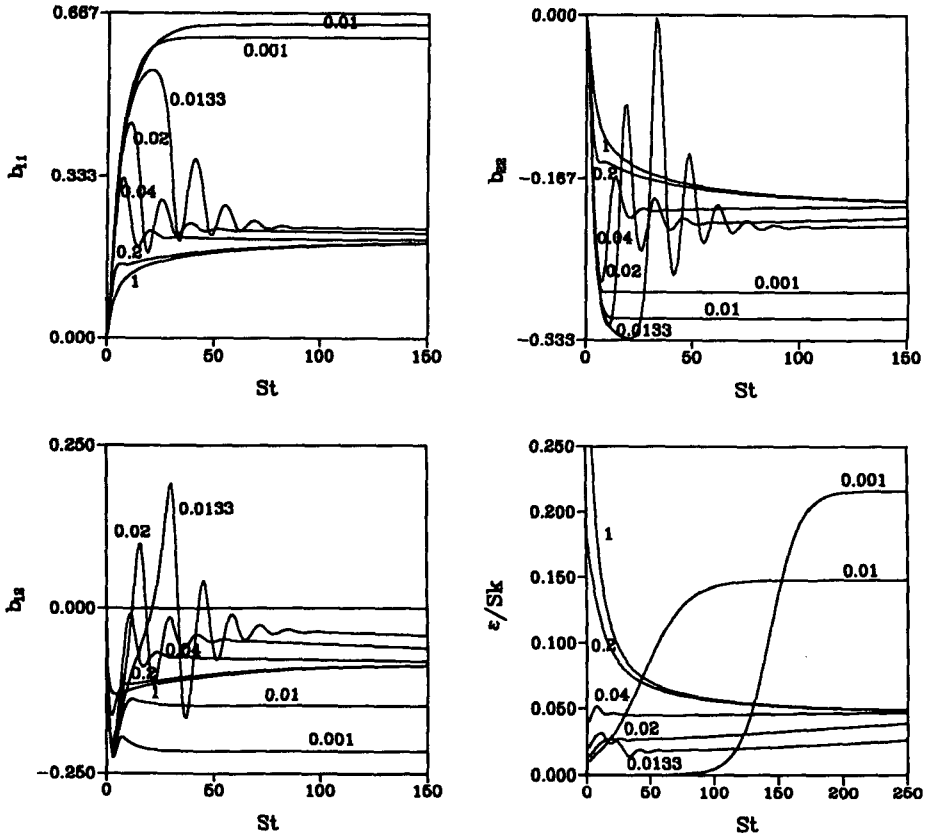


Fig. 9 Evolution of b_u and ϵ/Sk for various initial $(\epsilon/Sk)_0$'s in SL model⁽⁶⁾

6. 결 론

레이놀즈 응력 모형을 이용하여 난류 균일전단유동을 모사하기 위한 지배방정식은 4개의 연관된 상미분방정식이 된다. 그 결과 이 시스템의 거동은 수렴 또는 발산할 수 있고, 그 과정에서 지수함수적인 거동을 하거나 진동할 수도 있다. 그 거동은, 평형상태에 해당되는 값을 구하고 그 값들 부근에서 선형화된 지배방정식의 고유치문제를 해석함으로써 판정할 수 있다. Shih와 Lumley⁽⁶⁾가 제안한 바와 같이 선형 저울 압력-변형률항(C_1)과 두 개의 변수(parameter; a_1, a_2)로 표현되는 고울 압력-변형률항을 적용하는 경우에 대해 평형상태값을 구하고 선형화된 안정성 해석을 수행하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻는다.

(1) 평형해에는 4.2.1~4.2.4의 네 가지가 있다. 이 중 양의 전단율, 정의에 합당한 비등방성 텐서

의 크기 범위, Schwarz의 부등식 등을 고려하면 타당한 해는 4.2.4이고, 그 해를 얻기 위한 계수 a_1 과 a_2 의 범위는 Fig. 2와 같이 제한된다.

(2) 위의 평형해 중 유일하게 안정한 해만이 실제 계산에서 나타나게 된다. 선형해석의 결과 4.2.1, 4.2.2는 항상 불안정, 4.2.3은 불안정 또는 중립(neutrally stable), 4.2.4는 특정 계수영역(Fig. 3)에서 안정하다. 실제의 계산에서는 4.2.4가 안정한 계수영역에서는 4.2.4 형태의 해로 거의 지수함수적으로 수렴하며, 4.2.4가 불안정한 계수영역에서는 4.2.3 형태의 해로 진동하면서 수렴한다.

(3) 이상의 결과로부터 4.2.4 형태의 해로 안정하게 수렴하기 위해서는 Fig. 4의 영역에 들어야 함을 알 수 있다. 한편 전단율이 대단히 큰 경우 등과 같이 $\epsilon/Sk \approx 0$ 인 초기조건이 적용되는 경우, 수렴초기에는 저울 압력-변형률항이 없는 모형과 같은 거동을 하다가 ϵ/Sk 값이 천이하면서 타당한 값으로 수렴하게 된다. 이러한 거동을 피하려면, 즉

모든 조건에서 안정하게 수렴하기 위해서는 a_1 과 a_2 의 값은 Fig. 4의 $\beta_0/\alpha=0$ 의 범위 내부 또는 식 (74)에 있어야 한다.

(4) 이어서 몇가지 모형들에 대한 안정성을 검토하였다. 그 결과 Launder 등⁽⁹⁾의 모형은 안정하며, 계수가 크게 변하면 불안정해질 수도 있음을 보였다. 한편 비선형 고율 압력-변형률항을 적용한 모형 중에서 Shih와 Lumley,⁽⁶⁾ Haworth와 Pope,⁽⁷⁾ Fu 등⁽¹⁰⁾의 모형을 검토한 결과 모두 수렴 도중에 진동하거나 유일하지 않은 해를 갖는 등의 문제가 있는 것으로 드러났다.

참고문헌

- (1) Lumley, J. L., 1978, "Computational Modeling of Turbulent Flows," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 123~176.
- (2) Schumann, U., 1977, "Realizability of Reynolds-Stress Turbulence Models," *Physics of Fluids*, Vol. 20, No. 5, pp. 721~725.
- (3) Tavoularis, S. and Karnik, U., 1989, "Further Experiments on the Evolution of Turbulent Stresses and Scalars in Uniformly Sheared Turbulence," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 204, pp. 457~478.
- (4) Speziale, C. G. and Mac Giolla Mhuiris, N., 1989, "On the Prediction of Equilibrium States in Homogeneous Trubulence," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 209, pp. 591~615.
- (5) Tavoularis, S. and Corrsin, S., 1981, "Experiments in Nearly Homogeneous Turbulent Flow with a Uniform Mean Temperature Gradients. Part 1," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 104, pp. 311~347.
- (6) Shih, T.-H. and Lumley, J. L., 1985, "Modeling of Pressure Correlation Terms in Reynolds Stress and Scalar Flux Equations," Cornell University Technical Report FDA-85-3.
- (7) Haworth, D. C. and Pope, S. B., 1986, "A Generalized Langevin Model for Turbulent Flows," *Physics of Fluids*, Vol. 29(2), pp. 387~405.
- (8) Gerald, C. F. and Wheatley, P. O., 1989, *Applied Numerical Analysis*, 4th ed., Addison-Wesley.
- (9) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W., 1975, "Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulent Closure," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 68, Part 3, pp. 537~566.
- (10) Fu, S., Launder, B. E. and Tselepidakis, T. B., 1987, "Accommodating the Effects of High Strain Rates in Modeling the Pressure-Strain Correlation," UMIST Technical Report TFD/87/5.