

〈論 文〉

평면 제트류 응집구조의 근사적 표현에 관한 연구

이찬희* · 이상환**

(1994년 6월 13일 접수)

Approximation for the Coherent Structures in the Planar Jet Flow

Chan Hee Lee and Sang Hwan Lee

Key Words: Planar Jet Flow(평면 제트류동), Coherent Structures(응집구조), Karhunen-Loeve Expansion, Conditional Sampling(조건부추출), Snapshot Method(速寫방법)

Abstract

The snapshot method is introduced to approximate the coherent structures of planar jet flow. The numerical simulation of instantaneous flow field is analyzed by SIMPLE algorithm. An ensemble of realizations is collected using a sampling condition that corresponds to the passage of a large scale vortex at positions 4 and 6 diameters downstream from the nozzle. With snapshot method we could treat the data efficiently and approximate coherent structures inhered in the planar jet flow successfully 94% of total turbulent kinetic energy with 10 terms of Karhunen-Loeve expansions. Finally, In accordance with the recent trend to try to explain and model turbulence phenomena with the existence of coherent structures, in the present study, we express the underlying coherent structures of planar jet flow in the minimum number of modes by calculating Karhunen-Loeve expansions in order to improve to understanding of jet flow and to make the information storage and management in computers easier.

기 호 설 명

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| t : 시간 | M : 추출된 표본의 개수 |
| x, y : 직교좌표계 | $\{\phi\}$: 고유함수의 집합 |
| u, v : 직교좌표계에서의 속도 성분 | $\{\lambda\}$: 고유값의 집합 |
| p : 직교좌표계에서의 압력 성분 | K : 적분방정식의 Kernel |
| Re : 레이놀즈수 | N : 추출된 표본의 차원 |
| D : 제트 출구의 폭 | τ : 상관관계 시간 |
| X : x, y 를 대표하는 2차원 벡터 | |
| V : u, v 를 대표하는 2차원 벡터 | |
| \bar{V} : 속도 성분의 평균값 | |
| v : 속도의 난동 성분 | |

1. 서 론

제트류는 모든 종류의 에너지 관련 기계, 특히 근래에 들어서는 장비들의 소형화 및 고효율화가 이루어짐에 따라 그들의 냉각 특성을 높이고자, 분

*한양대학교 대학원

**정회원, 한양대학교 기계설계학과

출된 유체를 이용하여 고체 표면으로부터 열을 제거하는 분사 냉각의 분야에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있으며, 이에 관한 산업에서의 응용에 대한 예로는 종기와 섬유, 건조, 금속의 annealing, 유리의 tempering, 가스터빈 블레이드의 냉각, 그리고 전자/통신장비의 컴포넌트 냉각 등이 있다. 또한 효과적인 환기 및 난방을 위하여 제트 nozzle, duct, 그리고 fan이 하나의 unit로 구성된 공조 시스템이 널리 이용되는 등 주위에서 흔히 볼 수 있는 유동현상인데도 불구하고 그 구조에 대한 이해는 너무나도 미비하다고 할 수 있다.

70, 80년대 동안 난류현상에 대한 총체적인 관심에는 상당한 변화가 있었다. 아직도 난류 이론에 대한 중요한 결과들의 많은 부분은 Taylor와 Von Karman의 전통적인 통계적 접근방법으로부터 얻어낸 것들이지만 이제 난류현상은 확률론적 무작위성(probabilistic randomness)이라기 보다는 유동장내에 바탕이 되고 있는 어떤 중요한 구조가 내재되어 있다는 것으로 인식되어지고 있다. 이러한 내재된 구조의 도출은 실험적으로나 이론적으로 상당히 중요한 의미를 가진다. 그 동안 실험적인 방법에 의해 여러 응집구조의 존재를 확인해 왔지만 아직도 그들의 생성 원인과 동특성에 대해서 별로 아는 바가 없다. 또한 이러한 현상을 모델링하는 기법도 개발되어 있지 않다. 심지어 응집구조에 대한 과학적인 정의조차 내리지 못하고 있는 실정이다.⁽¹⁾ 어떠한 형태의 유동으로부터 응집 구조를 도출해 내는 가장 타당성이 있어 보이는 정량적인 방법으로는 Karhunen-Loeve 전개방법을 들 수 있는데 이는 한 공간 영역상의 random process에 대하여 유일하게 존재하는 random 계수를 가지는 직교 고유함수의 전개를 의미한다. 이 방법이 위와 같은 목적에 부합된다고 생각하는 이유는 유동에너지의 척도인 통계적 variance의 대부분을 포함시킨다는 데 있다.

K-L전개는 일찍이 심리학, 패턴인식분야 등에 적용되어 왔으나 유체역학 분야에서는 1967년 Lumley⁽²⁾에 의해 principal orthogonal decomposition이라는 이름으로 처음 도입되었으며 최근 들어 Sirovich⁽³⁾에 의해 이론적으로 발전되었다. 몇몇의 유체역학자들에 의해 이 전개방법이 구체적인 유동 현상에 대해 적용되었다. 초기에는 실험을 통하여 직교 고유함수를 결정하였는데 관내에 난류 경계층을 대상으로 한 Bakewell and Lumley,⁽⁴⁾ 원통

후류를 연구한 Payne and Lumley,⁽⁵⁾ 평판위의 경계층을 연구한 Herzog,⁽⁶⁾ 제트 혼합층을 대상으로 한 Glaue⁽⁷⁾ 등을 들 수 있다. 그런데 이러한 실험적 접근은 그 방법의 난이도와 sampling 오차 등으로 인해 전개시 처음 몇 개항만을 계산해 내는데 그쳤을 뿐인데도 상당한 시간과 노력이 필요하였다. 최근의 computer의 저장 용량과 처리속도의 획기적인 발전에 힘입어 수치적 방법으로 이 전개를 계산해 내는 것이 시도되었다. Channel 유동을 대상으로한 Moin⁽⁸⁾의 연구와 일차원 난류현상을 설명하기 위해 Bergers 방정식을 푼 Chambers⁽⁹⁾의 연구가 그것이다.

본 연구의 근본 목적은 평면 제트에 의하여 형성된 전단층(shear layer)의 수치적 simulation으로부터 얻은 large scale coherent structure를 최소의 mode로 나타내는데 있다. 구체적으로 10개 이내의 고유 함수가 전체 유동에너지의 90% 이상을 포함할 수 있는가에 대한 해답을 구하는 것이다. 오래 전부터 어떤 난류유동현상을 설명하기 위해 최소 몇 개의 mode(또는 자유도)가 필요한가에 대한 물음이 여러 이론 물리학자들에 의해 제기되어 왔다. Landau⁽¹⁰⁾는 가장 작은 상대 길이라고 할 수 있는 Kolmogorov scale과 문제가 가지고 있는 가장 큰 길이 scale과의 비의 3승을 어떤 난류 운동을 나타낼 수 있는 수로 생각하여 해석적인 방법으로 $Re^{9/4}$ 개의 자유도가 필요하다고 결론을 내렸다. 그 후 이 결과는 Constantin⁽¹¹⁾에 의해 엄밀한 수학적 증명으로 확인된 바 있다. 그러나 난류를 일으킬 수 있는 큰 Re수의 경우 이 자유도 수는 실로 엄청난 것이며 현재의 발달된 컴퓨터의 수준으로도 도저히 다룰 수 없다. 이러한 컴퓨터내의 정보저장과 전산처리의 용이성이라는 관점에서 볼 때 소수의 mode로서 full turbulence simulation을 대체할 수 있다는 것은 매우 바람직한 것이다.

이상의 근본 목적의 달성이 외에 본 연구를 통하여 얻은 부수적인 성과로는 여러 실험적 방법^(7,12,13)으로 예측된 제트류내의 고리형의 large scale structure의 과정을 대체적으로 추정함으로써 제트 유동장에 대한 예측 및 그와 관련된 여러 장치의 설치와 제어에 대한 기초적인 설계변수 제시 등의 파급효과가 기대 되어지고, Karhunen-Loeve 전개의 방법이 난류유동으로부터 응집구조를 도출시키는 방법으로서의 타당성을 검증한 것을 들 수 있을 것이다.

2. 수치해석

2.1 유동장 묘사

출구의 폭이 5 cm인 평면 제트를 통하여 표준 온도와 압력상태의 대기 중에 150 m/sec의 속도로 건조된 공기가 분사된다. 이에 해당하는 Reynolds 수는 $O(10^5)$ 가 된다. 유동장에 있어 출구의 폭을 D 라 할 때 주 유동방향인 x 방향으로 $8D$, 그리고 주 유동방향과 수직방향인 y 방향으로 $4D$ 되는 영역을 계산영역으로 하였다. 또한 격자 구성은 계산이 좀더 정확하고 비교적 작은 크기의 와류(eddy)도 포착될 수 있도록 x 방향과 y 방향으로 각각 250, 100등분하였다.

2.2 지배방정식

본 연구에서 해석하고자 하는 유동장은 2차원 비압축성 평면 제트류에 관한 순간 유동장을 해석하기 위한 지배방정식은 다음과 같은 x, y 방향의 각각의 운동량방정식(momentum equation)과 연속 방정식(continuity equation)으로 나타난다.

여기서, 지배방정식을 (1)~(3)과 같이 나타낸 이유는 많은 실제의 유동중에서 점성이나 밀도의 차이로 발생한 와도가 유동을 타고 흘러 내려갈 때에, Reynolds수가 비교적 높은 경우에는 점성이 일정한 비점성의 완전 유체의 유동으로 간주할 수 있다⁽¹⁴⁾고 함에서이다.

이러한 맥락에서 볼 때, 응집구조와 같은 large scale 운동에 대부분의 에너지와 물질전달을 결정하는 주요한 정보에 내재되어 있다는 사실로부터 난류유동을 해석해 나가고 있는 것도 현재 수행되어지고 있는 연구 분야의 한 접근방식⁽¹⁵⁾임을 고려할 때, 본 논문에서 사용한 지배방정식 및 격자구

성을 이용하여 비록 작은 와도의 거동을 당장은 무시하는 셈이 되나, 해석 유동장의 거시적인 구조에 대하여 상당부분의 정보를 제공받을 수 있다⁽¹⁶⁾고 생각한다.

운동량방정식

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (2)$$

연속방정식

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

위 방정식 (1)~(3)은 아래와 같이 하나의 방정식 형태로 일반화하여 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial (v\Omega)}{\partial y} + \frac{\partial (u\Omega)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial \Omega}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma \frac{\partial \Omega}{\partial y}) + S \quad (4)$$

여기서, Ω 는 일반적인 변수이며 Γ 및 S 는 각각의 일반 변수에 해당하는 확산계수 및 생성(source)항 이며 Table 1에 나타내었다.

2.3 경계조건

Fig. 1(a)와 Fig. 1(b)는 본 연구의 관심의 대상

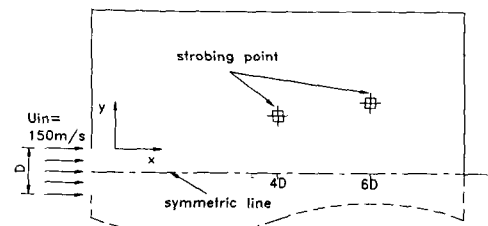


Fig. 1 (a) Schematic presentation of the flow fields

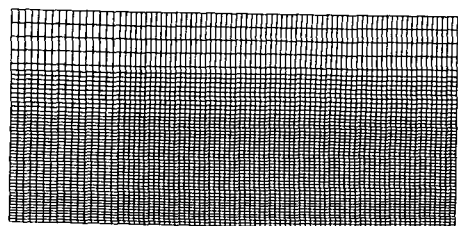


Fig. 1 (b) Grid generation of the computational domain

Table 1 Definition of Ω , Γ and S of equations

Conserved property	Ω	Γ	S
Mass	1	0	0
x-dir. Momentum	u	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial \Omega}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial \Omega}{\partial y})$
y-dir. Momentum	v	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma \frac{\partial \Omega}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma \frac{\partial \Omega}{\partial y})$

이 되는 경계 영역을 도시한 것이다. 주 유동 방향 (x 방향)은 기존의 유동 가시화 연구를 포함한 제트 구조에 관한 연구들과 마찬가지로 $x/D=3\sim 6$ 되는 영역의 유동이 관심이 되나 수치 algorithm에 따른 하류 경계의 영향을 작게 하기 위하여 충분한 영역으로 생각되는 $x/D=8$ 을 하류경계로 잡았다. y 방향의 계산영역도 제트의 퍼짐각과 경계의 영향 등을 고려하여 $y/D=4$ 까지를 계산영역으로 하였다. 각각의 경계조건을 기술하면 다음과 같다.

2.3.1 제트 출구조건

유동을 지배하고 응집구조의 발생에 가장 민감하게 반응하는 부분으로 초기 조건에 영향을 미치나, 구하고자 하는 data는 유동이 완전히 전개되었을 때 이후의 것이므로 출구에서의 속도분포는 150 m/sec로 균일하다고 가정하였다. 이 가정은 conditional sampling을 할 때 60,000 time step 이후 sampling하므로 타당하다고 볼 수 있다.

2.3.2 벽면조건

벽면에서의 속도는 정의되지 않으므로 no-slip 경계 조건을 주었다.

2.3.3 유입경계

$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ 을 주었고, U 에 관한 조건은 연속방정식으로부터 구하였다. 모든 조건을 y 방향의 미분항이 0인 Neumann조건을 주었다. 하류 경계와 합계 수치해석에 있어 가장 중요한 경계조건의 하나이다.

2.3.4 대칭경계

전 영역을 계산하자면 많은 시간이 필요하므로, 제트의 유동이 대칭이라는 점에 착안하여 수치 해석 영역을 절반으로 줄여 해석하였다. 또한 y 방향의 어떤 질량의 출입이 없다고 가정하였다.

2.3.5 하류경계

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 을 주었고, x 방향의 미분항이 0인 Neumann조건을 주었다.

이상의 지배 방정식과 경계 조건으로 하여 SIMPLE algorithm⁽⁷⁾을 이용하여 수치해석한 순간 유동장과 압력장을 각각 Fig. 2(a)와 Fig. 2 (b)에 도시하여 놓았다.

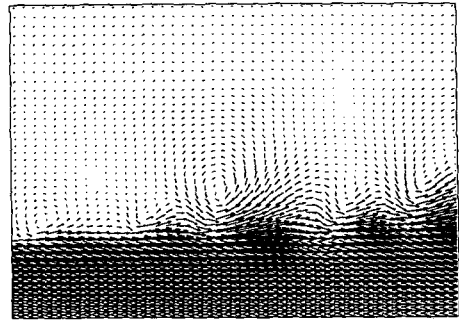


Fig. 2 (a) Instantaneous flow fields of a typical flow realization. (Flow from left to right)
⇒ This snapshot is not included in the ensemble

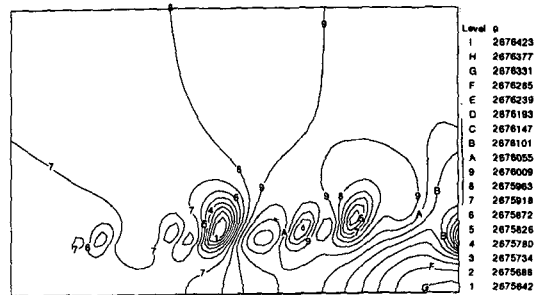


Fig. 2 (b) Pressure field for Fig. 2(a)

3. 조건부추출

순간유동장 중에서 동일한 형태의 응집구조를 나타내는 독립적인 사건(event)의 포착을 위하여 미리 정해진 strobe 조건을 만족하는 snapshot들 즉 ensemble data를 취한다. strobe 조건을 출구 직경의 4배와 6배 되는 지점에 각각에 일정한 크기와 vortex가 지날 때 sampling되도록 미리 설정하여 놓았으며 strobing point를 Fig. 1(a)에 표시하여 놓았다. 실제 유동현상이 주기적인 것이 아니기 때문에 strobing은 같은 시간 간격을 두고 일어나지 않는다. 이와 같은 sampling은 유동이 완전히 발달되었다고 생각되는 60,000 time step이후에 행하여 졌으며 50개의 snapshot들을 얻기 위해서는 1×10^6 time step이 필요하였다.

4. Ensemble average와 난동변수

Ensemble average는 두 개의 유동변수 u, v 에

대하여 계산되는데 전개의 편의를 위해 두개의 유동 변수 u, v 와 두개의 독립변수 x, y 를 다음과 같이 2차원 vector로 정의하여 계산을 한다.

$$V = V(u, v), X = X(x, y) \quad (5)$$

그러므로 ensemble average는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{V}(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M V^{(n)}(x) = \langle V^{(n)}(x) \rangle \quad (6)$$

위의 이상적인 ensemble average는 다음과 같은 현실적인 estimator로 대체될 수 있다.

$$\overline{V}(x) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M V^{(n)}(x) = \langle V^{(n)}(x) \rangle \quad (7)$$

여기서, M 은 충분히 큰 수라고 정의한다. 그러므로 각각의 변수에 대한 난동부는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v(x) = V(x) - \overline{V}(x) \quad (8)$$

여기서,

$v(x)$ 는 난동부 (luctuation part)
 $V(x)$ 는 순간부 (instantaneous part)
 $\overline{V}(x)$ 는 ensemble average이다.

5. Karhunen-Loeve 전개 및 Eigenvalue problem

1차원 난류 유동장에 대한 Karhunen-Loeve 전개의 유도는 random process에 관한 많은 참고 서적들에서 발견되며, 난류 유동에 관한 3차원 vector field에 대한 전개는 Lumley에 의해 쓰여진 문헌에서 발견할 수 있다.⁽¹⁸⁾ 3차원 난류 유동장에 대한 K-L 전개는 보통 $v(x, t)$ 의 전 영역에 대한 정확한 상관관계 함수(correlation function)를 구하는 것과 그에 따른 방대한 양의 정보로 나타나는 계산 문제로 계산시간과 computer메모리의 한계와 같은 제약을 받게 된다. 그렇지만 본 연구에서 채택한 snapshot 혹은 strobe방법은 이러한 제약에서 벗어나는 것을 가능하게 한다. $v(x, y)$ 를 random Fourier 계수 a_n 을 가진 직교함수의 합으로 이루어진 random process라고 가정하고, $[\Phi_n(x) : n = 1, 2, 3 \dots]$ 은 주어진 영역 $[a, b]$ 내에서는 정의되는 직교 basis로 이루어진 함수의 집합이라 하면 random field $v(x, t)$ 는 다음과 같이 $\Phi(x)$ 의 무한

급수로 전개될 수 있다.

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \Phi_n(x) \quad (9)$$

여기서,

$$a_n(t) = \int_a^b v(x, t) \Phi_n(x) dx$$

이고, $v_n(x, t)$ 를 식 (9)의 N 차항 전개라고 하면, 적분 한계 $[a, b]$ 내에서 $v(x, t)$ 와 $v_n(x, t)$ 사이의 적분 평균 제곱오차 e_n 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e_n = \int_a^b \langle [v(x, t) - v_n(x, t)]^2 \rangle dx$$

Karhunen-Loeve 전개는 직교 구속조건 하에서 적분 평균 제곱오차를 최소화할 때의 일반적인 Fourier 전개이므로 다음 관계식을 만족하여야 한다.

$$\int_a^b \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (11)$$

여기서, δ_{mn} 는 Kronecker delta 함수이다. 식 (11)의 조건하에서 각각의 함수 Φ_n 의 임의의 변수에 대해서 식(10)을 최소화하기 위한 계산은 식 (12)와 같은 Fredholm 제2종 homogeneous적분 방정식으로 귀착된다. (Rosenfield⁽¹⁹⁾) :

$$\int_a^b K(x, x') \Phi_n(x') dx' = \lambda_n \Phi_n(x) \quad (12)$$

여기서, $K(x, x') = \langle v(x, t) v(x', t) \rangle$ 는 적분 방정식의 Kernel로서 Inhomogeneous random field $v(x, t)$ 에 대한 상관 함수이고, λ_n 와 $\Phi_n(x)$ 는 각각 적분 방정식에서 구해지는 고유값과 고유 함수이다. 이와 같이 식(12)의 직교함수들은 K-L 전개의 basis 함수이다.

난류유동에 있어서 고유함수는 물리적으로 특성 와도(characteristic eddy)를 나타내고, 고유값들은 난류유동으로부터 생성되는 에너지의 양을 나타낸다. 적분방정식의 Kernel로 나타나는 난동 성분의 상관함수가 대칭이고 음이 아닌 함수이므로 Hilbert-Schmit이론에 의하여 non-trivial 해가 존재한다.

5.1 Direct method⁽²⁰⁾

Direct method는 난류유동에 대한 수치해석에

있어 다음과 같이 직교함수 $[\Phi_n]$ 의 유한한 전개에 의해 유동장벡터 v 를 근사화하기 위한 일반적인 방법이다.

$$v = \sum_n a_n(t) \Phi_n(x) \quad (13)$$

이러한 결과는 두 점 사이의 상관관계를 만드는 데 사용될 수 있다.

$$\begin{aligned} K(x, x') &= \langle (\sum_m a_m \Phi_m(x)) (\sum_n a_n \Phi_n(x')) \rangle \\ &= \sum_{m,n} \Phi_m(x) \Phi_n(x') M_{mn} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, $M_{mn} = \langle a_m a_n \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T a_m(t) a_n(t) dt$ 이다.

실제 계산에 있어 식(13)이나 식(14)에 있는 summation은 유한하고 Kernel은 degenerate되므로 고유함수는 다음과 같은 형태로 가정될 수 있다.

$$v = \sum_k P_k \Phi_k(x) \quad (15)$$

여기서, 상수 P_k 는 결정되어야 할 값이고, 만약 식(15)를 고유치방정식(eigenvalue equation)에 대치시키면 다음과 같다.

$$\int K(x, x') v(x') dx' = \lambda v(x) \quad (16)$$

Integral equation을 수치해석을 위해 discretization시키면

$$\sum M_{mn} P_m = \lambda P_n, \quad n=1, 2, 3 \quad (17)$$

여기서, 각각의 행렬 M_{mn} 은 $J (= \dim P)$ 의 차원이다. 만일 N 개의 basis function $[\Phi_n(x)]$ 가 사용된다면 식(17)은 $J \times N$ 개의 요소를 포함하는 문제로 나타난다. P_n 을 하나의 벡터로 나타내면

$$P = P(P_1, P_2, \dots, P_N) \quad (18)$$

그리고 행렬 M 은

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{N1} & \dots & \dots & M_{NN} \end{bmatrix} \quad (19)$$

로 표시되므로

$$MP = \lambda P \quad (20)$$

이다. 여기서, 행렬 M 의 차원은 $J \times N$ 이다. 그러나 위에 설명된 direct method를 이용하여 실제 의미 있는 유동장에 대한 해석을 시도할 경우 행렬

M 은 엄청난 크기가 되기 때문에 기존의 computer의 계산 능력으로서는 1차원 정도의 계산만이 가능하다. 예를 들어 2차원 유동장에 대한 수치해석 또는 실험을 통하여 (100×100) 의 격자 점에서 (u, v) 의 값을 구했을 경우 행렬 M 의 크기는 $(20,000 \times 20,000)$ 이 된다. 그러므로 본 연구에서는 격자점의 수와는 상관없이 단지 sampling 회수에 의해서만 다루어지는 행렬의 크기가 결정되는 snapshot method를 도입하기로 한다.

5.2 Snapshot method⁽³⁾

τ 를 상관관계시간(Correlation time)보다 큰 time scale이라 하면 순간유동장은

$$v^{(n)} = v(x, n\tau) \quad (21)$$

이고 이것들은 서로 다른 n 값에 대해 상관관계가 없는 Snapshot 혹은 strobe라고 부른다. 만일 ergodic hypothesis가 원용된다면 Kernel은

$$K(x, x') = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M v^{(n)}(x) v^{(n)}(x') \quad (22)$$

와 같이 나타나고 식(22)는 다음과 같은 estimator로 대체될 수 있다.

$$K(x, x') = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M v^{(n)}(x) v^{(n)}(x') \quad (23)$$

여기서, snapshot 혹은 strobe의 수 M 은 충분히 큰 값이다. 식(23)으로써 나타내어지는 Kernel K 는 degenerate되고 결과적으로 고유함수는 다음과 같이 된다.

$$\Phi = \sum_{k=1}^M A_k v^{(k)} \quad (24)$$

여기서, 상수 A_k 는 결정되어야 할 값이다. 만일 식(23)과 식(24)를 식(16)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$CA = \lambda A \quad (25)$$

여기서,

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_M)$$

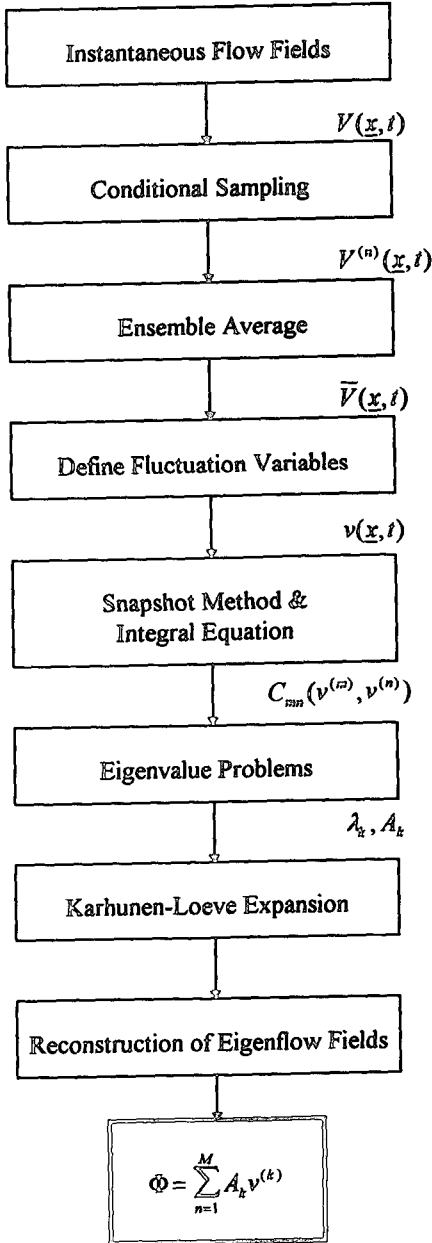
$$C_{mn} = \frac{1}{M} (v^{(m)}, v^{(n)})$$

$$= \frac{1}{M} \int \sum_{j=1}^N v_j(x)^{(m)} v_j(x)^{(n)} dx$$

이며, $N = \dim v$ 이다. 먼저 설명한 바와 같이 conditional sampling 과정을 통해서 얻은 50개의 sampling vector field를 이용하였으므로 행렬 C 는

(50×50)의 크기를 갖는다. 식 (25)로 표현되는 고유값문제를 풀기 위하여, 본 연구에서는 IMSL subroutine을 이용하였다. 또한 고유값 문제 해법의 algorithm에 따른 오차를 검증하기 위하여

EISPACK algorithm을 이용한 MATLAB subroutine을 이용한 결과와 비교, 검토하였다. Fig. 3에는 본 연구에서 수행한 수치해석 전반에 걸친 flowchart를 도시하여 놓았는데 한 단계에서 다음 단계로 넘어 갈 때 전해지는 값들을 각 단계의 사이에 표시하여 놓았다.



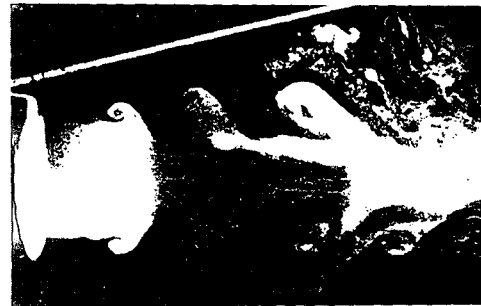
Φ : Eigenflow M : Sampling vector filed
 A : Eigenvector λ : Eigenvalue

Fig. 3 Flowchart for the numerical analysis procedure

6. 수치해석 결과 및 고찰

6.1 순간유동장에 대한 결과 및 고찰

본 수치 해석은 orifice type의 출구 형상을 가진



(a) $x/D=1.5$



(b) $x/D=2.0$



(c) $x/D=2.5^{(13)}$

Photo 1 Smokeflow visualization photographs corresponding to large positive peak occurring

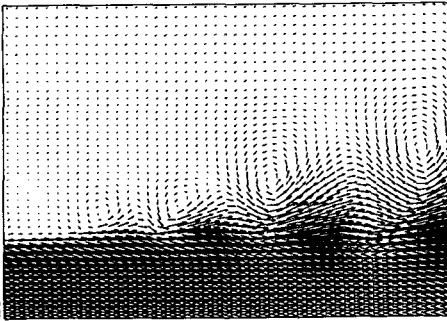


Fig. 4 (a) Instantaneous flow fields of 60000 time step

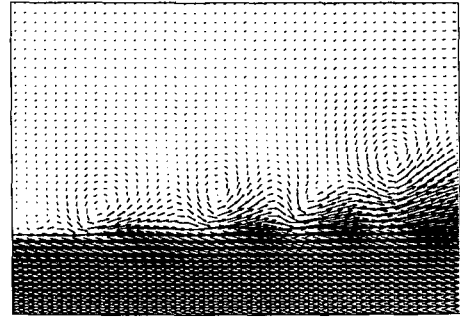


Fig. 4 (e) Instantaneous flow fields of 60100 time step

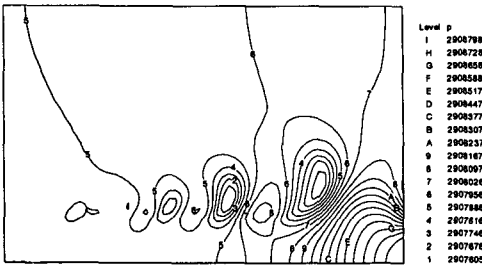


Fig. 4 (b) Pressure field for Fig. 4(a)

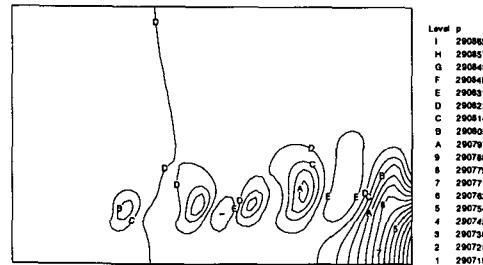


Fig. 4 (f) Pressure field for Fig. 4(e)

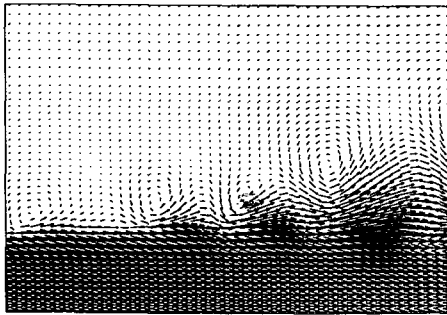


Fig. 4 (c) Instantaneous flow fields of 60050 time step

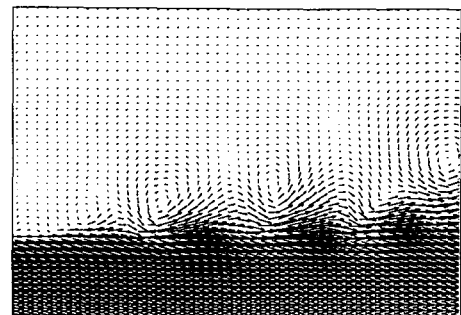


Fig. 4 (g) Instantaneous flow fields of 60150 time step

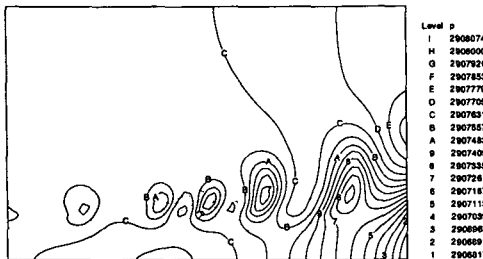


Fig. 4 (d) Pressure field for Fig. 4(c)



Fig. 4 (h) Pressure field for Fig. 4(g)

평면 제트류를 대상으로 한 결과이다. 축대칭 제트류와 평면 제트류가 유사한 난류구조를 가진다는 유동 가시화를 비롯한 기존 연구들의 결과를 고려

하여 비교적 계산이 간편한 평면제트류(planar jet flow)를 택하였다. 순간유동장에 대한 수치 계산의 경우 초기 상태에 형성된 출구 주위의 vortex

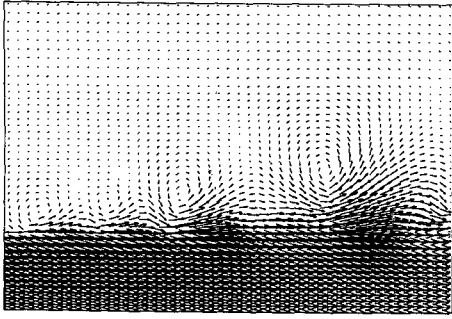


Fig. 5 (a) Instantaneous flow fields of a typical flow realization. ⇒ This snapshot is included in the ensemble

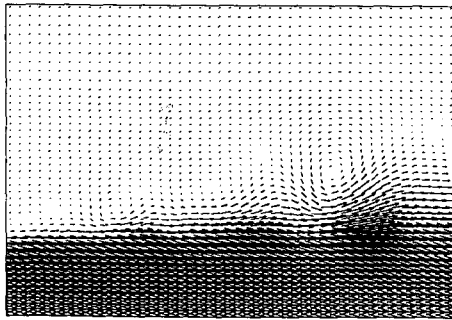


Fig. 5 (b) Instantaneous flow fields of ensemble averaged velocity fields

는 1000 time step이내에 계산영역 밖으로 소멸되었으며 10,000 time step 이후에는 기존의 많은 실험결과들과 계(system)의 기하학적인 차이로부터 생기는 large scale vortex의 위치에 있어서는 차이가 있으나 정성적으로 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. Photo 1은 Re 수가 $O(10^4)$ 인 축대칭 nozzle 제트류에 대한 유동 가시화 연구⁽¹³⁾를 본 수치해석 결과와의 비교를 위해 개재한 것이며, Fig. 4(a)~(h)는 $3 < x/D < 7$ 영역에서의 본 수치해석의 결과인 일련의 순간유동장을 vector field로 도시한 것이다. 또한 많은 유동 가시화 연구에서도 명확히 나타나지 않는 vortex pairing현상의 진행을, 본 수치해석 결과에서는 잘 볼 수 있었다. 이 현상은 vortex leapfrogging이라고 불리는 현상으로 나중에 생성된 vortex가 먼저 생성된 vortex를 밀어 올리면서 하나의 vortex가 되는 과정을 말하며 이러한 현상이 유동장 내에 내재되어 있다는 사실은 매우 흥미있는 발견이며 Glauser⁽⁷⁾ 등에 의해

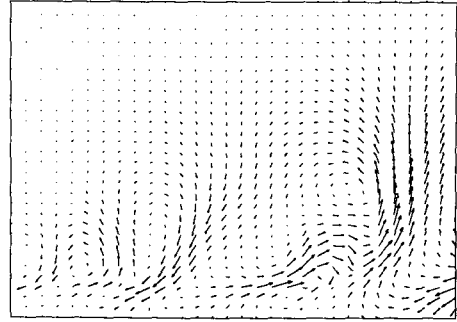


Fig. 6 (a) 3rd eigenflow fields(scale factor=1)

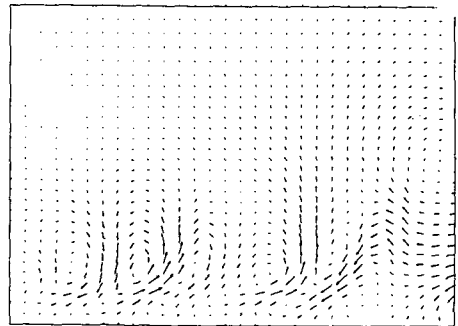


Fig. 6 (b) 5th eigenflow fields(scale factor=1)

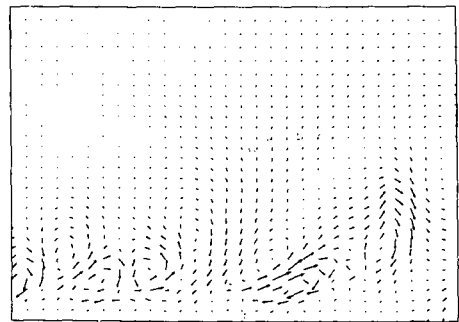


Fig. 6 (c) 10th eigenflow fields(scale factor=2)

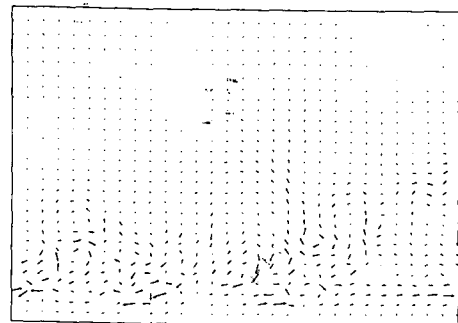


Fig. 6 (d) 45th. eigenflow fields(scale factor=10)

Table 2 Presentation of Eigenvalues for the flow fields

Index	Eigenvalue(J)	Normalized eigenvalue	Percentage (%)	Cumulative percentage(%)
1	5.7058036E-02	1.0000000	32.3391494	32.3391494
2	3.4018339E-02	0.6016374	19.4508247	51.7899742
3	2.4701993E-02	0.4322752	14.0005073	65.7904815
4	1.7333079E-02	0.3037981	9.8239803	75.6144638
5	1.0526340E-02	0.1848479	5.9660811	81.5805435
6	6.9723916E-03	0.1229824	3.9517869	85.5323333
7	5.2518677E-03	9.2044308E-02	2.9766347	88.5089645
8	3.4289711E-03	6.0096200E-02	1.9434598	90.4524231
9	3.1792116E-03	5.5718909E-02	1.8019020	92.2543258
10	2.3098720E-03	4.0482852E-02	1.3091809	93.5635070
20	3.3987333E-04	5.9566251E-03	0.1926321	98.3896789
30	1.1533782E-04	2.0214123E-03	6.5370753E-02	99.4877548
40	4.1885119E-05	7.3407922E-04	2.3739469E-02	99.8743591
50	9.2899116E-10	1.6281513E-08	5.2653024E-07	100.000000

예상모델로만 제시되었던 것이다.

6.2 Karhunen-Loeve 전개에 대한 결과 및 고찰

하류에 미리 정해놓은 strobe 조건에 따라 conditional sampling된 50개의 ensemble data를 가지고 snapshot방법을 이용하여 eigenvalue 및 eigenfunction을 구하고, 이로부터 eigenflow를 산출하였다. Fig. 5(a)는 미리 주어진 strobe조건에 따라 추출된 유동장의 전형적인 한 예를 보여주고 있으며, Fig. 5(b)는 50개의 sampling data를 ensemble averaging한 유동장의 형태이다. Table 2는 50개의 sampling에 대한 eigenvalue를 나타낸 것인데 5개, 10개의 eigenvalue속에 각각 유동장의 82%, 94%정도의 에너지를 포함하고 있다는 것을 보여주고 있다. 이러한 사실은 단지 몇 개의 eigenflow로서 제트유동장을 예측할 수 있다는 것을 말해 준다. 다시 말해서 이것은 복잡한 비선형 편미분방정식인 Navier-Stokes 방정식이 소수의 일차 상미분방정식의 system으로 나타낼 수 있음을 의미한다.

Fig. 6(a)~6(d)는 각각의 eigenflow를 나타낸 것

인데 10차 이상의 eigenflow에는 아주 작은 에너지 ($O(10^{-2}) \sim O(10^{-4})$)를 포함하고 있기 때문에 이를 가시화하기 위해서 scaling을 하였으며, 각각에 대한 scaling factor를 그림 아래에 표시하여 놓았다. eigenflow를 잘 살펴보면 vortex들이 마치 톱니바퀴가 맞물려 돌아가는 것과 같은 형상의 구조를 보여주고 있으며 Index가 증가함에 따라 같은 위치에서 크기는 같지만 방향이 반대인 vortex를 발견할 수 있다. 이러한 rolling 현상은 그 cell의 크기가 규칙적이지는 않으나 난류 경계층 구조에서 나타나는 bursting현상의 원인인 규칙적인 크기의 rolling cell train⁽²¹⁾과 유사한 난류 구조적 양상을 보인다고 할 수 있다. Fig. 7(a)~7(d)는 3항, 5항, 10항 그리고 45항까지의 K-L 전개한 결과를 보여주고 있으며, 각각의 유동 양상이 매우 흡사한 것으로 보아 앞에서 언급한 소수의 eigenflow에 대부분의 에너지가 포함되어 있다는 사실을 알 수 있다. 또한 Index와 eigenvalue의 관계 Fig. 8에 도시하여 놓았다. 이 도표들로부터 Index가 증가함에 따라 에너지의 roll off가 상당히 빠르게 일어나고 있음을 알 수 있으며, 이는 사용된 Karhunen-

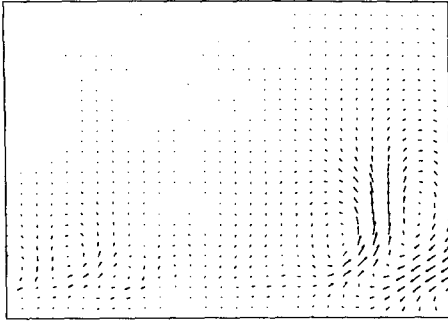


Fig. 7 (a) 3 terms reconstruction by K-L expansion

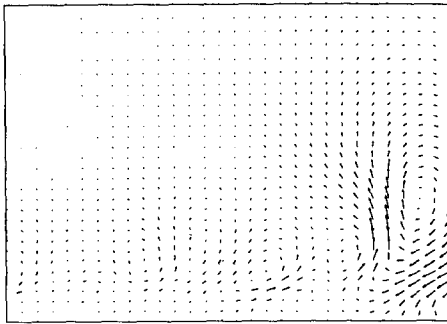


Fig. 7 (b) 5 terms reconstruction by K-L expansion

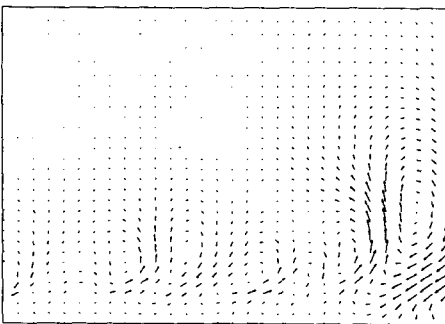


Fig. 7 (c) 10 terms reconstruction by K-L expansion

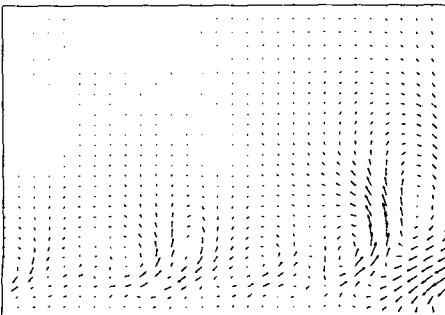


Fig. 7 (d) 45 terms reconstruction by K-L expansion

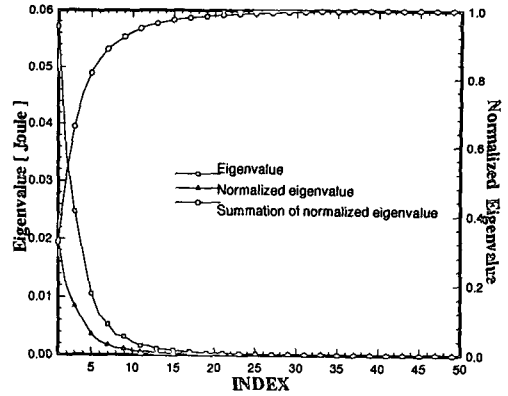


Fig. 8 Normalized eigenvalue $\lambda(i)/\lambda_{max}$ vs. INDEX

Loeve 해석이 효과적임을 입증해 준다.

7. 결 론

2차원 평면 제트류동에 관한 응집구조(coherent structure)의 Karhunen-Loeve 해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 유동의 에너지를 나타내는 고유값이 Index의 증가에 따라 급격히 감소하는 것으로 보아 본 연구에서 사용된 Karhunen-Loeve 해석이 효과적임을 입증할 수 있었으며, 평면제트류에 내재되어 있는 응집구조를 10개항 이내의 Karhunen-Loeve 전개를 통하여 전체 유동에너지의 94%를 포함하도록 근사 시킬 수 있었다.

(2) Direct method가 임의의 유동장에 대한 근사가 가능하나 기억용량의 한계로 인하여 수치해석상의 장애가 있는 반면 snapshot method는 유동장 내에 내재하는 하나의 event에 대해 효과적인 근사가 가능함을 알 수 있었다.

(3) 순간유동장 해석을 통하여 vortex의 생성, 발전, 소멸 과정의 하나인 vortex pairing 현상이 제트류동장 내에 내재되어 있다는 사실을 발견할 수 있었으며, 난류 경계층 구조에서 나타나는 bursting 현상의 원인인 규칙적인 크기의 rolling cell train과 유사한 난류의 구조적 양상을 관찰할 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단(과제번호 913-0902-

022 - 2)의 지원으로 이루어진 것이다.

참고문헌

- (1) Lumely, J. L., 1982, 'Invited Talk', *35th Ann. Amer. Phys. Soc. Div. Fluid Dynamics*, Rutgers Univ.
- (2) Lumley, J. L., 1967, "The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows," *Atm, Turb. and Radio Wave Prop.*, Yaglom and Tartarsky ed. Moscow, 166.
- (3) Sirovich, L., 1987, "Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I : Coherent structures," *Q. App. Math.*, Vol XLV, No. 3, 561.
- (4) Bakewell, P. and Lumley, J. L., 1967, "Viscous Sublayer and Adjacent Wall Region in Turbulent Pipe Flow," *Phys. Fluids* 10, 1880.
- (5) Payne, F. R. and Lumley, J. L., 1967, *Phys. Fluid Suppl.*, 10, s194.
- (6) Herzog, S., "The Large Scale Structure in the Near-Wall Region of Turbulent Pipe Flow," Ph. D Dissertation, Cornell Univ.
- (7) Glauser, M. N., Lieb, S. J., and Gerogy, N. K., 1983, "Coherent Structure in the Axisymmetric Jet Mixing Layer," *Proc 5th. Symp. Turb. Shear Flow.*, Cornell Univ., Springer-Verlag, N. Y..
- (8) Moin, P., "Porbing Turbulence via Large Eddy Simulation," *AIAA, 22nd. Aerospace Science Meeting*
- (9) Chambers, D. H., Adrian, R. J., Moin, P., Strwwart, D. S. and Sung, H. J., 1988, "Karhuen Loeve Expansion of Bergers" Model of Turbulence," *Phys. Fluids*, 21, 2573.
- (10) Landau, L. D., 1944, *Doklady ANSSSR*, 44, 339.
- (11) Constantin, P. C., Fois, O. P. and Manley, R. Ternan, 1985, *J. Fluid Mech.*, 150.
- (12) Crow, S. C. and Champarne, F. H., 1971, "Oderly Structure of the Axisymmetric Mixing Layer," *J. Fluid Mech.*, 48, 547.
- (13) Yule, A. J., 1987, "Large-Scale Structure in the Mixing Layer of a Round Jet," *J. Fluid Mech.*, 89, 413.
- (14) 日本機械學會, 1983, 流體工學における電算利用に関する調査研究分科會成果報告書, p. 11
- (15) Park H. and Sirovich L., 1984, "Low-Dimensional Modelling of Trubulent Thermal Convection," *Proc. TRA Sorkshop-1994*. pp. 17 ~13, KAIST, Taejon, Korea, November 12.
- (16) 桑原邦郎 1985, 亂流の数値シミコレーション, 日本物理學會誌, 40~11, pp. 877
- (17) Patankar S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill.
- (18) Lumely, J. L., 1981, "Stochastic Tools in Turbulence," Academic Press New York, pp. 80 ~82, 113~121.
- (19) Rosenfield, A. and Kar, A., 1982, "Digital Picture Processing," Vol. 1, 2nd ed., Academic Press New York, pp. 93~121.
- (20) Aubry, N., et. al., 1988, "The Dynamies of Coherent Structures in the Wall Region of a Turbulent Boundary Layer," *JFM* 192, pp. 115 ~173.
- (21) Gosman A. D. and Pun, W. M. 1973, "Lecture Notes for the Couse Entitled: Calculation of Recirculation Flows," Imperial College, Heat Transfer Section Report HTS/74/2.