

<論 文>

단일 모자형 사각 단면 부재의 탄성좌굴해석

김윤영* · 한창운**

(1994년 9월 28일 접수)

Elastic Buckling Analysis of Single Hat Rectangular Tubes

Yoon-Young Kim and Chang-Woon Han

Key Words : Buckling(좌굴), Elastic(탄성), Hat(모자), Rectangular(사각형)

Abstract

An elastic buckling analysis of single hat rectangular tubes is carried out. Based on Bleich's buckling theory for elastically restrained plates, a method to estimate the compliance of the supporting plates for the buckling plate and to compensate the effects of compression force acting on the supporting plates is offered. Necessary assumptions which enable an analytic approach to be used are also given. The present results are compared with the finite element results obtained from ABAQUS.

1. 서 론

자동차나 항공기, 선박에서 사용되는 박스 보 박판 부재는 작업의 용이성 때문에 박판을 프레스로 원하는 형태로 성형한 후, 프랜지에 점용접을 하여 제작하는 것이 일반적이다. 특히 자동차충돌 특성은 모자형 사각 단면 부재로 이상화될 수 있는 측면 부재의 압괴(crippling) 메카니즘에 의존하는데 이 메카니즘은 압괴모드와 최대 압괴하중, 그리고 흡수 에너지량의 관점에서 해석하는 것이 보통이다.

자동차의 측면 부재 설계시, 이 부재에 전체 좌굴보다는 국부좌굴이 발생되어 흡수 에너지량이 크도록 하는데, 이를 보장하기 위해 측면 부재에 초기결함을 주는 방법 등이 사용된다. 이 때 초기결함위치를 측면 부재의 탄성좌굴시 발생하는 좌굴모드의 최대 변위점(anti-node)에 상응하여 선정하면

만족스런 결과를 얻을 수 있음이 알려져 있고,⁽¹⁾ 또한 정규주름(compact mode)과 비정규주름(noncompact mode)의 구분 근거로써 탄성좌굴응력이 사용된다.^(2,3) 따라서 모자형 사각 단면 부재의 좌굴해석에 대한 연구는 측면 부재의 안정성 설계시 매우 중요한 의의를 갖는다.

박스 보 박판 부재의 좌굴에 관련된 연구로, Timoshenko⁽⁴⁾는 정사각 단면 박판 부재가 4변 단순지지의 경계조건으로 해석될 수 있음을 보인 바 있고, Bleich⁽⁵⁾는 직사각 단면 박판 부재를 좌굴판과 구속판으로 나누어서 구속판의 탄성구속 정도를 평가한 후 이를 이용하여 직사각 단면 부재의 좌굴응력을 구하는 방법을 제시하였다. 한편 최근에 Li와 Reid⁽⁶⁾는 Timoshenko의 정사각 단면 부재에서의 단순지지 경계조건은 매우 얇은 판에서만 만족한다는 것을 보이고 일반적인 경우의 정사각 단면 부재에 적용되는 경계조건을 제시하였으며, 또한 붕괴모드가 좌굴모드와 깊은 관련이 있다는 것을 강조하였다.

모자형 사각 단면 부재에 대해서는 프랜지를 리브 보강재로 취급하여 이를 등가 사각 단면 부재로

*정회원, 서울대학교 기계설계학과

**대우중공업(주) 대전연구센터

바꾼 후, 이 부재의 최대 압괴하중을 구하는 방법이 제시된 바 있다.⁽⁶⁾ 그러나 모자형 사각 단면 부재의 좌굴응력 및 좌굴모드 해석에 대한 해석적 방법은 거의 알려져 있지 않으며 주로 유한요소해석 등과 같은 수치해법을 사용한다. 그러나 유한요소 해석 방법으로 좌굴응력을 구하려면 매우 많은 요소가 필요하며 정확한 좌굴모드를 구하기 위해서는 요소 선정 및 요소 개수에 있어서 특별한 주의가 필요하다.

본 논문에서는 모자형 사각 단면 부재에 대해 신뢰성 있는 좌굴모드와 좌굴응력을 구할 수 있는 해석적 기법을 제한하고자 하며, 이 결과들을 ABAQUS 유한요소해석 결과 등과 비교한다. 본 논문에서는 Bleich⁽⁶⁾의 좌굴이론에 착안하여 모자형 사각 단면 부재를 좌굴해석하기 위한 가정을 설정하고, 지지판의 컴플라이언스를 구하는 방법과 지지판에 작용하는 압축력을 보상하는 방안을 제시하고자 한다.

본 논문의 해석결과는 수치적 해석방법으로 구한 결과의 타당성에 대한 기준이 될 뿐만 아니라, 자동차 측면 부재의 연구과 같은 실제적인 문제에도 확장될 수 있다.

2. 좌굴해석

2.1 가정

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 x 방향으로 압축을 받는 모자형 단면을 갖는 부재의 좌굴응력, 좌굴모드를 구하기 위해, 다음과 같은 가정을 설정한다.

- (1) 구조물의 국부좌굴은 탄성영역에서 일어난다.
- (2) 구조물의 양 끝단($x=0, x=a$)은 모두 단순 지지되어 있다.¹⁾
- (3) a 가 $b, |c|$ 보다 충분히 크다.
- (4) $b > c$ 이고 $e < b, |c|$ 이다.²⁾
- (5) 점용접된 프랜지는 용접된 두 부재의 두께를 갖는 등방성 평판을 본다.

모자형 사각 단면 부재에서 국부 판 좌굴은 여러 판 중 좌굴응력이 가장 작은 판에서 먼저 일어나게 되는데, 가정 (2)에 의해 양 끝단이 단순지지되어 있으므로, 좌굴응력은 나머지 경계조건과 판의 폭 등에 의해 결정된다. 또한 가정 (4)에 의해 좌굴은

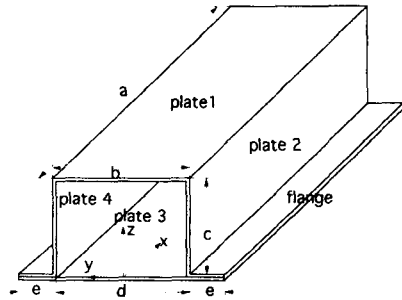


Fig. 1 The geometry and dimension of a single hat rectangular tube

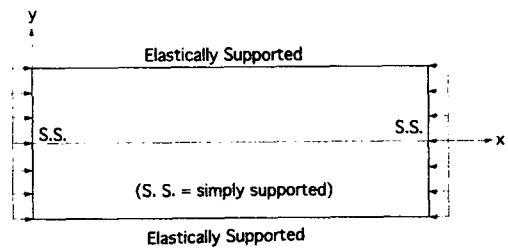


Fig. 2 The boundary condition of the buckling plate (plate 1)

판 1 또는 판 3에서 먼저 일어날 수 있다고 예상되는데, 가정 (5)에 의해 프랜지 부분의 두께가 판 3의 좌굴을 강하게 구속하므로 실제 좌굴은 좌굴응력이 가장 작은 판 1에서 먼저 일어나게 된다.

판 1에서 좌굴이 먼저 일어나게 되면 좌굴이 일어나지 않은 다른 부분은 좌굴을 저지하려는 역할을 한다. 따라서 판 2 등은 판 1이 회전하는 것을 방해하게 되므로, 판 1의 좌우 경계($y = \pm b/2$)는 판 2, 4 등에 의해 좌우 대칭으로 탄성지지되어 있다고 볼 수 있다.

2.2 Bleich의 좌굴이론

Bleich⁽⁶⁾는 Fig. 2와 같이 양단에서 탄성적으로 지지된 평판에 대한 좌굴 이론을 전개하였는데 먼저 이 이론을 고찰해 보고자 한다. Fig. 2와 같이 양단에서 균일한 압축력을 받는 판의 지배방정식은 다음과 같다.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \sigma_{xt} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

1) 실제 구조물(자동차의 측면 부재)의 양단은 고정 또는 탄성지지로 보는 것이 타당하나 해석의 편의를 위해서 가정한다.

2) e 의 크기는 실제 구조물 제작시 점용접을 위한 길이로 자동차의 측면 부재에서는 b 길이의 약 20% 정도이다.

여기서, D 는 판의 굽힘강성(flexural rigidity)으로 $Et^3/(12(1-\nu^2))$ 으로 정의되고 t 는 판의 두께이다. 단순지지 양단 경계조건과 y 축에 대한 대칭성을 이용하면 판의 변위 함수 w 는 다음과 같이 얻어진다.

$$w = \sin \frac{n\pi x}{a} (C_1 \cosh k_1 y + C_3 \cos k_2 y) \quad (2)$$

여기서, n 은 좌굴판의 좌굴모드를 나타내는 상수로서, x 방향에 대한 좌굴모드의 반파장 개수이며, k_1 과 k_2 는 다음과 같이 정의된다.

$$k_1 = -\frac{n\pi}{a} \sqrt{\mu+1}$$

$$k_2 = -\frac{n\pi}{a} \sqrt{\mu-1} \quad (3)$$

$$\mu^2 = \frac{\sigma_{cr} t}{D} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 \quad (4)$$

한편 $y = \pm b/2$ 에서의 경계조건은 아래와 같은데

$$w|_{y=\pm b/2} = 0 \quad (5)$$

$$[M \pm \xi \chi]_{y=\pm b/2} = 0 \quad (6)$$

여기서, χ 는 중립면의 회전각을, ξ 는 지지강성을 나타낸다. 이 식들의 물리적 의미를 살펴보면 먼저 식(5)는 좌굴시 판의 좌우 경계가 직선을 유지한다는 것을 나타내고, 식(6)은 $y = \pm b/2$ 에서 판의 회전이 탄성적으로 억제되고 있음을 나타내는데, 다음의 식(7)과 $\chi = -\frac{\partial w}{\partial y}$ 을 이용하면

$$M_{y=\pm b} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=\pm b/2}$$

$$= -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm b/2}$$

$$\left(\because \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ at } y = \pm b/2 \right) \quad (7)$$

식(6)은 아래와 같이 된다.

$$\left[\xi \frac{\partial w}{\partial y} \pm D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=\pm b/2} = 0 \quad (8)$$

이제 식(2)의 변위함수를 경계조건인 식(5), (8)에 대입하여 다음과 같은 좌굴조건 식을 얻는다.

$$\sqrt{\mu+1} \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\mu+1} \frac{n}{a} \right)$$

$$+ \sqrt{\mu-1} \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\mu-1} \frac{n}{a} \right) + \pi \xi \mu \frac{n}{a} = 0 \quad (9)$$

여기서, $\alpha = a/b$ 으로 정의되었으며 ξ 는 무차원 컴플라이언스로 다음과 같이 정의된다.

$$\xi = 2D/b\bar{c} \quad (10)$$

단면이 직각 사각형과 같은 간단한 구조물에서는 Bleich가 컴플라이언스 ξ 를 비교적 쉽게 구한 후식(9) 등을 이용하여 좌굴해석을 수행하고 그의 결과를 보다 엄밀한 해석결과^(7,8)와 비교하여 그의 방법의 타당성을 입증한 바 있다. 그러나 본 논문의 모자형 사각 단면 부재는 해석이 용이하지 않으며, 현재까지 이에 대한 연구는 별로 알려진 바 없다. 따라서 본 논문에서는 모자형 단면을 갖는 구조에 대해서 무차원 컴플라이언스 ξ 를 구하기 위한 필요한 가정을 설정하고 좌굴해석을 수행하여 좌굴응력과 좌굴모드를 구한다.

2.3 모자형 사각 단면 부재의 좌굴해석

앞에서 지적하였듯이 모자형 사각 단면 부재의 판 1이 먼저 좌굴될 것이므로, 이 때 판 2, 3, 4는 이를 지지하려는 지지판 역할을 하게 된다. 따라서 판 1(좌굴판이라 부름)이 좌굴하려고 할 때 판 2, 4는 좌굴 전이므로 그 형태를 유지하려 한다. 따라서 이 판들과 판 1사이에는 Fig. 3에서와 같이 두 판의 경계($z=c$)에서 모멘트가 발생한다. 이러한 현상에 상응하여 판 2, 4와 판 3과 만나는 경계 $z=0$ 에서도 모멘트가 발생하는데, 구조물이 비대칭성으로 인해 $z=c$ 에서와는 다른 모멘트가 일어난다.

이 판의 양면에서 발생하는 모멘트의 크기는 좌굴시 $y = \pm b/2$ 에서의 좌굴판의 회전각이 크면 클수록 이를 지지하려는 판 2, 4의 구속모멘트도 커지므로, 좌굴판 1의 횡방향 좌굴 변위에 의존한다. 따라서 구속판 2, 4에 작용하는 모멘트의 x 방향의 변화는 좌굴판과 같을 것이므로 구속판 2의(구속판 4도 유사하므로 이하 생략함) 경계조건을 다음과 같이 놓을 수 있을 것이다.

$$M_1(x) = M_1^{(n)} \sin \frac{n\pi x}{a} \text{ (at } z=0)$$

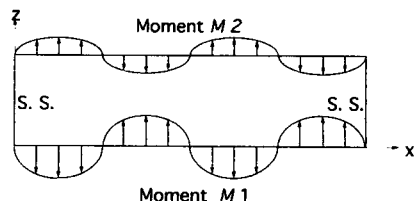


Fig. 3 The boundary condition of the supporting plate (plate 2)

$$M_2(x) = M_2^{(n)} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{at } z=c) \quad (11)$$

여기서, n 은 식(2)와 같은 의미를 가지며 상첨자 (n)은 $\sin \frac{n\pi x}{a}$ 에 관련된 계수임을 강조하기 위해 사용하였다.

지지판 2의 경계조건을 이용하여 이 판의 변위를 구한 후 $z=0$ 에서의 모멘트 M_1 과 회전각 χ 의 관계인 $M_1 = \bar{\xi} \chi$ 의 관계식 즉,

$$M_1^{(n)} = \bar{\xi}^{(n)} \chi^{(n)} \quad (12)$$

을 이용하여 강성 $\bar{\xi}$ 를 구해야 하나 판의 압축응력이 아직 결정되지 않은 상태이므로, $\bar{\xi}$ 를 구할수 없다. 따라서 우선 좌굴이 일어나지 않은 다른 판들은 압축력을 받지 않는다는 가정 하에서 $\bar{\xi}$ 를 먼저 구한 후, 이렇게 구한 $\bar{\xi}$ 에 압축력에 의한 효과를 나중에 보상해 주는 방법으로 문제를 접근하고

자 한다.

양단 $x=0, x=a$ 가 단순지지되어 있고 좌우에서 모멘트를 받는 판 2의 변위 \bar{w} 는 판 지배방정식에 양단 단순지지 경계조건을 대입하면,

$$\bar{w}(x, z) = \sin \frac{n\pi x}{a} \left(A \sinh \frac{n\pi z}{a} + B \cosh \frac{n\pi z}{a} + C \sinh \frac{n\pi z}{a} + D \cosh \frac{n\pi z}{a} \right) \quad (13)$$

와 같이 구할 수 있고, 경계조건은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, 0) = \bar{w}(x, c) = 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}(x, 0) = -\frac{M_1}{D_2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}(x, c) = -\frac{M_2}{D_2} \quad (14) \end{aligned}$$

(D_2 =판 2의 휨 강성)

식(13), (14)를 이용하여 다음과 같이 \bar{w} 를 M_1, M_2 으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{w} = & \frac{M_2^{(n)} c \cosh \frac{n\pi c}{a} - M_1^{(n)} c}{2 \frac{n\pi}{a} D_2 \sinh^2 \frac{n\pi c}{a}} \sinh \frac{n\pi z}{a} - \frac{M_1^{(n)}}{2 \frac{n\pi}{a} D_2} z \sinh \frac{n\pi z}{a} \\ & + \frac{M_1^{(n)} \sinh \frac{n\pi c}{a} \cosh \frac{n\pi c}{a} - M_2^{(n)} \sinh \frac{n\pi c}{a}}{2 \frac{n\pi}{a} D_2 \sinh^2 \frac{n\pi c}{a}} z \cosh \frac{n\pi z}{a} \end{aligned} \quad (15)$$

그리고 탄성지수계수 $\bar{\xi}$ 를 구하기 위하여 판의 좌우에서 회전각 $\bar{\chi} (= -\frac{\partial \bar{w}}{\partial y})$ 를 구하면 다음과 같

$$-\bar{\chi}^{(n)}|_{y=0} = \frac{M_1^{(n)} \left(\sinh \frac{n\pi c}{a} \cosh \frac{n\pi c}{a} - \frac{n\pi c}{a} \right) + M_2^{(n)} \left(\frac{n\pi c}{a} \cosh \frac{n\pi c}{a} - \sinh \frac{n\pi c}{a} \right)}{2 \frac{n\pi}{a} D_2 \sinh^2 \frac{n\pi c}{a}} \quad (16a)$$

$$-\bar{\chi}^{(n)}|_{y=c} = \frac{M_1^{(n)} \left(\sinh \frac{n\pi c}{a} - \frac{n\pi c}{a} \cosh \frac{n\pi c}{a} \right) + M_2^{(n)} \left(\frac{n\pi c}{a} \sinh \frac{n\pi c}{a} - \cosh \frac{n\pi c}{a} \right)}{2 \frac{n\pi}{a} D_2 \sinh^2 \frac{n\pi c}{a}} \quad (16b)$$

식(16)에서 알 수 있듯이, $M_1^{(n)}$ 과 $M_2^{(n)}$ 의 관계를 모르기 때문에 이 결과로부터 $\bar{\xi}$ 를 구할 수 없다. 따라서 $M_1^{(n)}$ 과 $M_2^{(n)}$ 를 연결시켜 주는 또 하나의 관계식이 필요함을 알 수 있으며, 이 관계식은 나머지 판 3과 프랜지판이 판 2와 만나는 부위에서의 기하학적 적합조건 등을 적용하여 구한다.

먼저 판 2의 하단($z=0$)에 작용한다고 가정한 모멘트 M_1 는 판 3과 프랜지판에 각각 가해지는 미지의 모멘트 M_3 와 M_F 의 합과 같으며

$$M_1 = M_3 + M_F \quad (17)$$

$y=0$ 에서의 판 3과 프랜지판의 회전각 $\chi_3 (=$

$\chi|_{y=-d/2}$, 판 3에서)과 $\chi_F (\chi|_{y=0}$, 프랜지에서)와 식 (16a)에서 주어지는 판 2의 회전각 $\bar{\chi}|_{y=0}$ 과 같다는 다음의 기하학적 조건이 만족되어야 한다.

$$\chi_3 (\chi|_{y=-d/2}, \text{ plate 3}) = \chi_F (\chi|_{y=0}, \text{ flange}) = \bar{\chi}|_{y=0} \quad (18)$$

한편 판 3과 프랜지판은 $x=0, x=a$ 에서 단순 지지되어 있고 판 3은 $y=\pm d/2$ 의 양단에서 동일한 모멘트 M_3 를 받고, 프랜지판의 한쪽은 M_F , 그리고 다른 한쪽은 자유라는 조건으로부터 다음과 같은 M_1 과 M_2 의 최종관계를 얻을 수 있다. 자세한 계산과정은 생략하고, 그 결과만을 정리하면 다음

과 같다.

$$M_1^{(n)} = \frac{\rho_2(\rho_F D_3 + \rho_3 D_F)}{\rho_3 \rho_F D_2 - \rho_1(\rho_F D_3 + \rho_3 D_F)} M_2^{(n)} \quad (19)$$

여기서, D_3, D_F 는 판 3과 프랜지판의 휨감성이며, ρ_1 등은 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_1 = \frac{\sinh \frac{n\pi c}{a} \cosh \frac{n\pi c}{a} - \frac{n\pi c}{a}}{2 \frac{n\pi}{a} \sinh^2 \frac{n\pi c}{a}}$$

$$\rho_2 = \frac{\frac{n\pi c}{a} \cosh \frac{n\pi x}{a} - \sinh \frac{n\pi c}{a}}{2 \frac{n\pi}{a} \sinh^2 \frac{n\pi c}{a}}$$

$$\rho_3 = \frac{a}{2n\pi c \cosh \frac{n\pi d}{2a}} \left[\frac{n\pi d}{2a \cosh \frac{n\pi d}{2a}} + \sinh \frac{n\pi d}{2a} \right]$$

$$\rho_F = \frac{\frac{\nu+1}{\nu-1} + \frac{\nu-1}{2} \left(\frac{n\pi e}{a} \right)^2 - \frac{1+\nu}{2} \sinh^2 \frac{n\pi e}{a} - \cosh^2 \frac{n\pi e}{a}}{(\nu+3) \sinh \frac{n\pi e}{a} \cosh \frac{n\pi e}{a} + (1-\nu) \frac{n\pi e}{a}} \frac{a}{n\pi}$$

여기서, ρ_1, ρ_2 등도 n 의 값에 의존하나 편의상 상첨자 (n)를 생략하였다.

이제 식(19)를 식(20)에 대입하여 그 결과를 정리하면 다음과 같이 컴플라이언스를 구할 수 있다.

$$\frac{1}{\zeta^{(n)}} = \frac{((\rho_2^2 - \rho_1^2)(\rho_3 D_F + \rho_F D_3) + \rho_1 \rho_3 \rho_F D_2)}{D_2(\rho_3 \rho_F D_2 - \rho_1(\rho_3 D_F + \rho_F D_3))}$$

무차원 컴플라이언스 $\zeta^{(n)}$ 는 식(10)의 정의를 이용하여 얻는데, $b=d, D=D_2$ 의 조건을 대입하면 다음의 최종결과를 얻는다.

$$\zeta^{(n)} = \frac{2((\rho_2^2 - \rho_1^2)(\rho_3 D_F + \rho_F D_3) + \rho_1 \rho_3 \rho_F D_2)}{b(\rho_3 \rho_F D_2 - \rho_1(\rho_3 D_F + \rho_F D_3))} \quad (20)$$

그러나 식(20)의 $\zeta^{(n)}$ 는 지지판들에 가해지는 압축력을 전혀 고려하지 않은 결과이므로, 이 결과를 그대로 식(9)에 대입하여 좌굴응력을 구하면 많은 오차를 유발하게 된다. 따라서 압축력을 고려하여 이를 보상해주어야만 하는데, 이를 위해 본 논문에서는 Bleich가 직사각형 단면에 적용하여 만족스런 결과를 얻은 보상기법을 응용하고자 한다. 그러나 이 보상기법을 모자형 단면 형상에 적용하기 위해서는 모자형 사각 단면 부재의 좌굴거동을 물리적으로 이해하여 다음과 같은 적절한 가정을 수립하지 않으면 해석을 수행할 수 없다.

첫째로, $t_1 = t_3$ 이고⁽³⁾ 판 3의 양단에 두꺼운 프랜

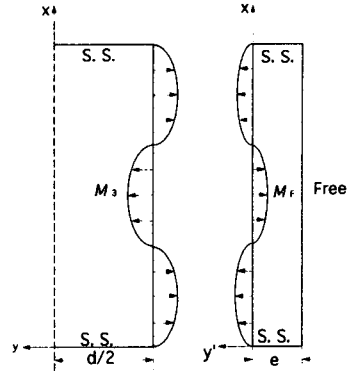


Fig. 4 The boundary conditions for plate 3 and flange

지가 달려 있기 때문에 어떠한 b/c 에 대해서도 판 1의 좌굴이 판 3의 좌굴보다 먼저 일어날 것이다. 따라서 판 1이 좌굴되어도 판 3은 좌굴되지 않고 볼 수 있을 것이므로, 이 판에 대한 압축력 효과의 보상은 생략한다. 둘째로, $c \rightarrow 0$ 으로 되는 경우 판 1의 양단이 마치 고정되는 것과 같은 효과를 주어 무차원 컴플라이언스 ζ 가 0으로 되어야 할 것이다. 식(20)을 살펴보면 $c \rightarrow 0$ 인 경우 $\zeta \rightarrow 0$ 이어 이 조건을 만족시킨다. 셋째로, c 가 b 보다 커서 (실제로 이런 경우는 고려하지 않지만 ζ 의 수정을 위해 필요하다.) 판 1과 판 2(그리고 판 4)가 동시에 좌굴이 되는 경우 판 1과 판 2가 만나는 부분의 경계조건을 단순지지로 접근하게 될 것이다. 따라서 이 때에는 판 2에 의한 컴플라이언스 ζ 는 무한대로 접근해야 할 것이다.

세번째 가정을 고려하기 위해서는 먼저 이러한 상태가 되는 c 를 구하면 ζ 를 보정할 수 있는데, 판 1과 판 2의 경계가 단순지지로 접근할 때 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$\sigma_{cr}|_{plate 1} = \sigma_{cr}|_{plate 2} \quad (21a)$$

여기서,

$$\sigma_{cr}|_{plate 1} = 4 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_1}{b} \right)^2 \quad (21b)$$

$$\sigma_{cr}|_{plate 2} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_2}{c} \right)^2 \quad (21c)$$

식(21b)는 판 1이 양단 단순지지인 경우의 좌굴응력 값이며 식(21c)는 판 2가 한 단 ($z=c$)에서 단순지지, 그리고 단 ($z=0$)에서 탄성지지인 경우의 좌굴응력 값이며, 이때의 k 값은 Fig. 5에서처럼 z

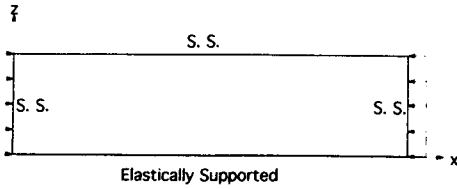


Fig. 5 The boundary condition for plate 2. This condition is used to estimate ζ_2

=0에서의 무차원 컴플라이언스 ζ_2 를 얻은 후 $\sigma_{cr}|_{plate2}$ 를 구하면 결정된다.

ζ_2 의 값은 판 3과 프랜지판에 대해서 앞에서와 비슷한 해석을 수행하여 판 3과 프랜지에 의한 컴플라이언스 $\zeta_2^{(n)}$ 를 구하면 다음과 같이 주어진다.

$$\zeta_2^{(n)} = -\frac{2\rho_3\rho_F D_2}{c(\rho_F D_3 + \rho_3 D_F)} \quad (22)$$

물론 식(22)의 ζ_2 를 평가할 때에도 판 3과 프랜지판에 작용하는 압축력의 효과를 보상해 주어야 하나, 판 3의 좌굴응력이 판 2의 좌굴응력보다 매우 클 것이므로 위에서 가정하였듯이 판 3의 좌굴응력에 의한 압축력은 생략한다. Fig. 5의 평판에 대한 좌굴응력값 μ' 은 식(22)를 이용하여 식(9)을 얻은 방법과 유사한 방법으로 얻을 수 있는 다음 식으로부터 계산할 수 있다.

$$\frac{\sqrt{\mu'+1}}{\tanh\left(\pi\sqrt{\mu'+1}\frac{nc}{a}\right)} - \frac{\sqrt{\mu'-1}}{\tanh\left(\pi\sqrt{\mu'-1}\frac{nc}{a}\right)} + \pi\zeta_2\mu'\frac{nc}{a} = 0 \quad (23)$$

끝으로 (23)의 해 μ' 로부터 식(21)의 k 값을 구한 후, 식(21a)의 조건이 성립될 때 ζ 가 무한대로 접근하도록 앞에서 구한 ζ 를 다음 식과 같이 수정해 준다. 이렇게 얻어진 ζ 를 식(9)에 대입하고 식(4)로부터 최소가 되는 좌굴응력 σ_{cr} 을 구할 수 있다. 또한 그 때의 n 값이 좌굴모드를 나타내는 반파장 개수이다.

$$\zeta^{(n)} \rightarrow \zeta^{(n)} \frac{1}{1 - \frac{4}{k} \left(\frac{t_1 c}{t_2 b}\right)^2} = \frac{2((\rho_2^2 - \rho_1^2)(\rho_3 D_F + \rho_F D_3) + \rho_1 \rho_3 \rho_F D_2)}{b(\rho_3 \rho_F D_2 - \rho_1(\rho_3 D_F + \rho_F D_3))} \frac{1}{1 - \frac{4}{k} \left(\frac{t_1 c}{t_2 b}\right)^2} \quad (24)$$

3. 수치해석 결과

위에서 제안한 좌굴응력 해석기법에 의한 결과와 ABAQUS 유한요소 결과와 본 해석결과를 비교하기 위해 다음과 같이 모델을 살펴보았다. 해석모델은 Table 1에서와 같이 자동차의 측면부재와 유사한 치수를 갖도록 선정하였다.

Table 1에 사용된 재료의 물성치는 E (중탄성계수)=150 GPa, ν (푸아송비)=0.3로 하였으며, 앞 절에서 언급한 바와 같이 길이방향(x 방향)의 양단은 단순지지 경계조건으로 수치해석을 수행하였다.

ABAQUS에서 제공되는 4절점 쉘요소(S4R5)와 8절점 쉘요소(S8R5)의 요소 수를 증가해 가면서 유한요소해석 결과의 수렴성을 조사해 보았다. (Table 2, Table 3) 이 결과로부터 4절점 쉘요소의 수렴성, 특히 좌굴모드에 대한 수렴성이 매우 나쁨을 알 수 있다. 또한 모델 2에 대해서는 8절점 쉘요소에서도 수렴성이 떨어지는데, 이들 결과로부터 정확한 좌굴해석을 수행하기 위해서는 매우 상세한 모델링이 필요함을 알 수 있다. 서론에서도 언급한 바와 같이 탄성좌굴해석의 좌굴모드는 측면 부재의 초기 결함위치를 선정하는데 사용될 수 있기 때문에 정확한 좌굴모드의 평가는 상당히 중요하다. 각 모델에 대한 좌굴 양상도 살펴보았는데, 그 중 모델 2의 좌굴 양상을 Fig. 6에 실어 보았다.

한편 본 논문에서 제시한 해석기법을 Table 1의 여러 모델에 대해 적용하여 좌굴해석을 수행하여 얻은 결과를 Table 4에 정리하였다. Table 4에서는 모자형 단면 부재의 프랜지 부분이 없다고 가정하여 직사각 단면 부재라고 보고 Bleich의 직사각 단면 부재의 좌굴해석이론을 적용하여 얻은 결과

Table 1 The dimension of analysis models ($t_1=t_2=t_3=t_4=1.2$ mm, $t_r=2.4$ mm)

Unit : mm	a	b	c	d	e
Model 1	800	60	60	60	20
Model 2	800	80	60	80	20
Model 3	800	110	60	110	20
Model 4	800	160	60	160	20

Table 2 ABAQUS buckling analysis with the four-node shell element(S4R5) (min=Number of node, σ_{cr} =Buckling stress, n=Half wave number in x the direction)

nen	Model 1		Model 2		Model 3		Model 4	
	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n
656	305.8	15	184.5	12	102.1	10	51.5	7
1312	259.1	13	163.9	11	90.6	9	44.6	7
2592	258.2	15	163.4	12	90.7	9	44.5	7
5184	250.4	14	159.2	12	88.3	9	43.4	7
10304	250.2	15	159.1	12	88.3	9	43.4	7

Table 3 ABAQUS buckling analysis with the eight-node shell element(S8R5) (nen =Number of node, σ_{cr} =Buckling stress, n=Half wave number in x the direction)

nen	Model 1		Model 2		Model 3		Model 4	
	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n
656	262.7	15	161.3	12	89.7	9	49.8	7
1312	249.5	14	158.5	12	87.8	9	43.2	7
2592	248.8	15	158.9	13	87.8	9	43.1	7
5184	247.9	15	157.8	12	87.5	9	43.0	7
10304	249.0	15	157.8	12	87.5	9	43.0	7

(Approx. 로 표시됨)와 ABAQUS(S8R5)의 수렴된 결과를 함께 실어 본 논문에서 제시한 해석 기법에 의한 결과와 비교하였다.

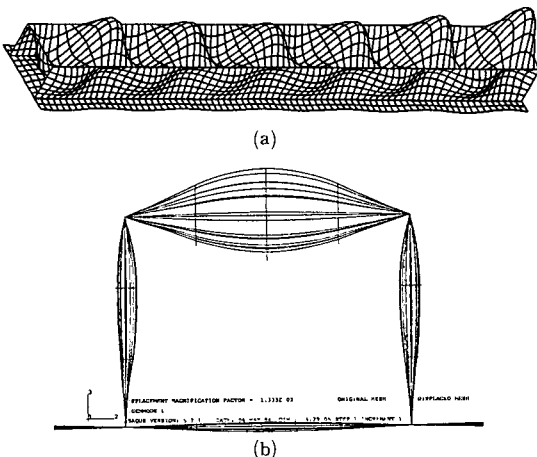


Fig. 6 Buckling pattern of the member obtained from ABAQUS

Table 4에서 보듯이, 프랜지의 영향을 무시한 근사 해석시, 좌굴응력 값에 대해서는 본 해석 결과와 약 10%정도 차이로 비교적 근접하지만 좌굴모드를 나타내는 n 의 값은 모델에 따라 타당하지 않은 결과를 얻게 되므로 실제 모자형 단면을 갖는 부재에서는 이와 같은 근사해석을 사용할 수 없음을 알 수 있다. 본 논문의 해석결과는 수렴된 ABAQUS 결과와 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

마지막으로 프랜지 부분의 크기가 좌굴응력과 좌굴모드에 미치는 영향을 고려하기 위해 $a=800, b=80, c=60, d=80$ (단위 mm)로 고정된 후 e 값을 현실적으로 가능한 범위(점용점에 필요한 범위)에서 변화시켜 가면서 해석을 수행해 보았다. Fig. 7의 결과는 프랜지판의 크기 e 가 증가함에 따라 ABAQUS결과와 본 해석결과 모두 좌굴응력이 증가한다고 예측하고 있다. 그러나 $e=10$ 에서 $e=40$ 으로 4배나 증가함에도 불구하고 좌굴응력 값이 1%이내로 변화하여, 좌굴응력 평가시 실제 점용점에 필요한 프랜지판의 크기 범위 내에서는 이 프랜

Table 4 The comparison of Present results with results obtained from other methods (σ_{cr} =Buckling stress, n=Half wave number in x the direction)

nen	Model 1		Model 2		Model 3		Model 4	
	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n	σ_{cr} (MPa)	n
Present	244.8	15	154.6	12	86.7	9	43.1	7
Approx.	217.0	13	143.2	12	80.4	9	39.9	6
FEM(S8R5)	249.0	15	157.8	12	87.5	9	43.0	7

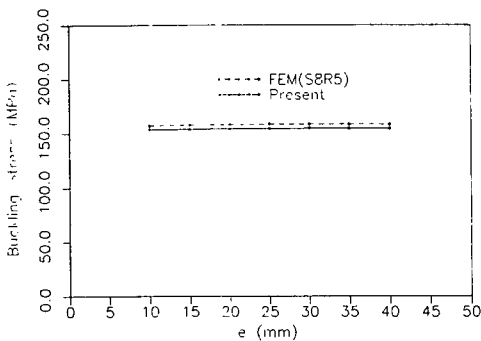


Fig. 7 The effect of the flange size "e" on the buckling stress σ_{cr}

지판의 영향을 무시할 수 있음을 알 수 있다. 그러나 앞에서 살펴본 Table 3의 결과가 시사하듯이 프랜지판의 유무는 해석 결과에 상당한 영향을 줄 수 있음에 유의하여야 한다.

4. 결 론

본 연구에서는 모자형 단면을 갖는 구조물의 좌굴응력과 좌굴모드를 해석적인 방법으로 구하였다. 좌굴이 발생할 때 모자형 사각 단면 부재를 좌굴판과 지지판으로 나누어 해석하였고, 이 때의 컴플라이언스를 평가하는 방법 및 지지판의 압축효과를 고려하는 방법을 제시하였다. ABAQUS 유한요소 해석 결과와 본 해석결과를 비교해 보면 좌굴응력에서는 매우 근소한 차이로 일치하며, 좌굴모드도 동일하게 얻어짐을 알 수 있었다. 또한 구조물의 프랜지는 좌굴을 구속하는 효과로 인하여 프랜지가 없는 경우와 상이한 좌굴응력, 좌굴모드 등이 얻어

지나 프랜지의 크기에 대해서는 탄성좌굴 특성이 별로 영향을 받지 않음을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) 김윤영, 강신유, 1993, "충돌하중을 받는 측면 부재의 붕괴해석 및 실험에 관한 연구," 제1회 G7 차세대자동차기술 Workshop, pp. 183~188.
- (2) Mahmood, H. F. and Paluszny, A., 1981, "Design of Thin Walled Columns for Crash Energy Management-Their Strength and Mode of Collapse," SAE No. 811302.
- (3) Li, S. and Reid, S. R., 1990, "Relationship Between the Elastic Buckling of Square Tubes and Rectangular Plates," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 969~973.
- (4) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1963, *Theory of Elastic Stability*, 2nd. ed., McGraw-Hill Co., New York.
- (5) Bleich, F., 1952, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Co., New York.
- (6) 김천욱, 한병기, 1994, "박판 상형 부재의 붕괴 특성연구," 한국자동차공학회논문집, SAE No. 943705.
- (7) Lundquist, E. E., 1939, "Local Instability of Symmetrical Rectangular Tubes," *NACA Tech. Note 686*.
- (8) Stowell, E. Z. and Lundquist, E. E., 1939, "Local Instability of Columns with I-, Z-, Channel- and Rectangular-Tube Sections," *NACA Tech. Note 743*.