

〈論 文〉

접촉면에서 모든 적합조건을 만족시키는 동적인 접촉현상의 해법

이 기 수*

(1994년 9월 5일 접수)

Dynamic Contact Analysis Satisfying All the Compatibility Conditions on the Contact Surface

Kisu Lee

Key Words : Dynamic Contact(동적접촉), Velocity and Acceleration Compatibility(속도 및 가속도 적합성), Time Integration(시간적분), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract

For the numerical solution of frictional dynamic contact problems, correct contact points and displacements are determined by iteratively reducing the displacement error vector monotonically toward zero. And spurious oscillations are prevented from the solution by enforcing the velocity and acceleration compatibilities of the contact points with the corresponding error vectors. Numerical simulations are conducted to demonstrate the accuracy of the solution and the necessity of the velocity and acceleration compatibilities on the contact surface.

1. 서 론

본 논문에서는 움직이고 있는 탄성체와 강체 사이의 동접촉문제의 해를 수치해석적으로 구하는 방법을 제시한다. 동접촉문제의 해를 수치해석방법에 의하여 구하기 위하여는 운동방정식을 정확히 시간적분하면서 동시에 접촉면 위에서 접촉조건을 만족시켜야 한다. 그리고 현실적인 공학문제의 경우 접촉조건은 대개 변위와 접촉력을 이용하여 표시된다. 그런데 유한요소법 및 수치해석을 이용한 해법의 경우, 매 시간간격(time step)마다 이러한 접촉조건이 부과되고 표준형의 시간적분이 적용되면 그 해에는 심한 인위적 진동이 포함된다.^(1~2) 이렇게 수치해에 포함된 인위적 진동의 기본적 원인은 접

촉면 위에서 속도 및 가속도 적합조건이 만족되지 않기 때문이며, 이러한 문제를 해결하기 위한 몇가지 방법이 제안되었다. Hughes 등⁽³⁾은 접촉점에서 운동량 보존법칙을 이용한 충돌 개시 및 분리조건을 적용하여 속도 및 가속도 적합조건을 적용하였으며 Newmark 시간적분에서 표준형의 계수를 사용하지 않았다. Ko와 Kwak⁽⁴⁾도 운동량 보존법칙을 적용하여 충돌 후의 접촉점의 속도를 구하였으며 Huh와 Kwak⁽⁵⁾은 접촉점에서의 속도불연속을 고려하였다. Taylor와 Papadopoulos⁽¹⁾는 접촉점에서의 속도 및 가속도는 변위와는 다른 적분에 의하여 구한다는 가정에 의하여 속도 및 가속도 적합조건을 적용하였으며 Newmark 시간적분의 계수를 일부 변경하였다. 또 Chaudhary와 Bathe⁽⁶⁾는 운동량 보존법칙이 만족되도록 Newmark 시간적분의 계수를 수정하였다.

그러나 접촉면은 운동중인 탄성체의 일부분이며,

*정회원, 전북대학교 기계공학과

접촉점의 속도 및 가속도는 접촉력 뿐만 아니라 탄성체의 탄성력에 의하여도 영향을 받을 것이며 따라서 표준형의 시간적분법이 적용되면 그 해의 정확도는 증가할 것이다. 이와 같은 목적에서 참고문헌 (7)에서는 참고문헌 (8)과 (9)에서 사용된 반복계산법을 이용하여 접촉 가능면에서의 변위, 속도 및 가속도 적합조건을 모두 만족시키는 방법을 제시하였는데, 여기에서는 마찰력이 존재하는 경우까지 고려하여 참고문헌 (7)의 방법을 확대하기로 한다. 본 논문에서는 변위오차 벡터를 반복계산법에 의하여 0으로 감소시켜 정확한 접촉점 및 변위를 계산하며 접촉점에서의 속도 및 가속도 오차를 반복계산법에 의하여 0으로 감소시켜 접촉점에서의 속도 및 가속도 적합 조건을 만족시킨다. 접촉점에서의 속도 및 가속도 적합조건이 매시간 간격마다 만족되므로 이로 인한 수치적 진동은 거의 발생하지 않는다. 여기에서는 표준 Newmark 시간적분법이 사용되며 반복계산법에서 Newton Raphson 반복법이 사용되지 않으므로 큰 행렬을 삼각형 형태로 분해할 필요가 없으며 따라서 빠른 속도의 계산이 가능하다.

2. 기본 방정식 및 접촉조건

본 논문에서는 선형 탄성체가 강체로 된 벽과 충돌하는 문제를 해석하기로 한다. 일반적인 유한요소법을 적용하면 탄성체의 운동방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{u} + Ku = f + \tau(p) \tag{1}$$

위에서 M 은 질량행렬, K 는 강성도행렬, u 는 변위벡터, f 는 기지의 외력벡터이고, p 는 미지의 접촉력이며 접촉면에 수직인 좌표계에 의하여 정의되고, τ 는 접촉력 p 를 전체의 관성좌표계로 변환한 것이다. Newmark 시간적분⁽¹⁰⁾을 적용하면 시간 $t + \Delta t$ 에서 식(1)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} (K + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}M)u^{t+\Delta t} &= M(\frac{1}{\alpha\Delta t}u^t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}^t \\ &+ (\frac{1}{2\alpha} - 1)\ddot{u}^t) + f^{t+\Delta t} + \tau(p^{t+\Delta t}) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\dot{u}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(u^{t+\Delta t} - u^t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}^t - (\frac{1}{2\alpha} - 1)\ddot{u}^t \tag{3}$$

$$\dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^t + \Delta t(1 - \delta)\ddot{u}^t + \delta\Delta t\ddot{u}^{t+\Delta t} \tag{4}$$

위에서 α 와 δ 는 Newmark 상수이며 Δt 는 시간 간격의 크기이다. 식(2)로부터 접촉 가능면 위에서의 변위를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{u}^{t+\Delta t} = \bar{w}^{t+\Delta t} + Cp^{t+\Delta t} \tag{5}$$

위에서 \bar{u} 는 접촉 가능면에서의 변위로서 접촉면에 수직인 성분과 평행인 성분으로 구성되어 있다(참고로 u 는 물체 전체에서의 변위이며 전체 좌표계에 의하여 정의된다). \bar{w} 는 접촉력 이외의 효과에 의한 접촉 가능면에서의 변위이며, 행렬 C 는 $(K + M/\alpha\Delta t^2)^{-1}$ 의 부분 행렬에 의하여 얻어지며 양정(positive definite)이다. 접촉 가능면의 절점에서 간격 벡터 s 를 다음과 같이 정의한다.

$$s^{t+\Delta t} = \bar{u}^{t+\Delta t} - d^{t+\Delta t} \tag{6}$$

위에서 d 는 접촉 가능면 위의 절점의 초기 간격을 나타낸다. 그러면 Coulomb 마찰법칙을 사용할 경우 접촉 가능면 위에서의 접촉조건을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{in}^{t+\Delta t} &\leq 0 \\ s_{in}^{t+\Delta t} &\leq 0 \\ p_{in}^{t+\Delta t} &= 0 \text{ if } s_{in}^{t+\Delta t} < 0 \\ s_{ie}^{t+\Delta t} &= 0 \text{ if } |p_{ie}^{t+\Delta t}| < \mu|p_{in}^{t+\Delta t}| \\ \text{sign}(s_{ie}^{t+\Delta t}) &= -\text{sign}(p_{ie}^{t+\Delta t}) \\ &\text{if } |p_{ie}^{t+\Delta t}| = \mu|p_{in}^{t+\Delta t}| \text{ and } p_{in}^{t+\Delta t} < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

위에서 μ 는 마찰계수이고 하첨자 i 와 n 는 각각 절선과 법선방향을 표시한다.

접촉조건 식(7)에 의하여 접촉 가능면 위에서의 힘과 변위가 동시에 미지수가 되므로, 조건 (7)을 만족시키는 방정식 (2)의 해를 구하는 것은 일반적으로 쉽지 않다. 그러나 만약 접촉력 $p^{t+\Delta t}$ 가 사전에 지정된다면 방정식 (2)는 간단히 풀린다. 또한 정확한 접촉력이 주어지면 접촉조건 (7)은 식 (2)의 해에 의하여 자동적으로 만족된다. 본 논문에서는 이러한 사항을 근거로하여 정확한 접촉력을 반복계산법에 의하여 계산하여 접촉조건 (7)이 만족되도록 한다. 이러한 목적으로 참고문헌 (8)과 동일한 방법으로 다음과 같이 위치오차 벡터 $v^{t+\Delta t}$ 를 접촉면 위에서 정의한다.

$$\begin{aligned} v_{in}^{t+\Delta t} &= s_{in}^{t+\Delta t} \text{ if } p_{in}^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } s_{in}^{t+\Delta t} > 0 \\ &= 0 \text{ if } p_{in}^{t+\Delta t} \geq 0 \text{ and } s_{in}^{t+\Delta t} \leq 0 \\ v_{ie}^{t+\Delta t} &= s_{ie}^{t+\Delta t} \text{ if } |p_{ie}^{t+\Delta t}| < h_i \text{ or if } \{\text{sign}(p_{ie}^{t+\Delta t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{sign}(s_{i\epsilon}^{t+\Delta t} \text{ and } h_i > 0) \\
 &= 0 \text{ if } \{|p_{i\epsilon}^{t+\Delta t}| \geq h_i \text{ and } \text{sign}(p_{i\epsilon}^{t+\Delta t}) \\
 &= -\text{sign}(s_{i\epsilon}^{t+\Delta t} \text{ or if } h_i \leq 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

위의 h_i 는 다음과 같이 정의되며, 접촉조건 (7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 h_i &= \mu |p_{i\eta}^{t+\Delta t}| \\
 p_{i\eta}^{t+\Delta t} &\leq 0 \\
 |p_{i\epsilon}^{t+\Delta t}| &\leq h_i \\
 v &= 0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

3. 계산방법

3.1 반복계산법, 속도오차, 가속도오차

힘 $p^{t+\Delta t}$ 가 주어지면 식(2)에 의하여 변위 $u^{t+\Delta t}$ 가 결정되므로 정확한 접촉력이 주어지면 접촉조건 (7)은 식(2)의 해에 의하여 만족된다. 본 논문에서는 다음의 반복계산법에 의하여 변위오차 벡터 $v^{t+\Delta t}$ 를 0으로 감소시키는 방법에 의하여 접촉력 $p^{t+\Delta t}$ 를 계산한다.

$$\begin{aligned}
 \bar{p}^{t+\Delta t, m} &= p^{t+\Delta t, m-1} - \bar{b} A_n v^{t+\Delta t, m-1} / \|C\|_\infty \\
 p_{i\eta}^{t+\Delta t, m} &= \min(0, \bar{p}_{i\eta}^{t+\Delta t, m}) \\
 p_{i\epsilon}^{t+\Delta t, m} &= \text{sign}(\bar{p}_{i\epsilon}^{t+\Delta t, m}) \min(|\bar{p}_{i\epsilon}^{t+\Delta t, m}|, h_i^m) \\
 &\quad \text{if } v_{i\epsilon}^{t+\Delta t, m-1} = s_{i\epsilon}^{t+\Delta t, m-1} \\
 &= \text{sign}(\bar{p}_{i\epsilon}^{t+\Delta t, m}) h_i^m \text{ if } v_{i\epsilon}^{t+\Delta t, m-1} \\
 &= 0 \neq s_{i\epsilon}^{t+\Delta t, m-1} \quad (10)
 \end{aligned}$$

위에서 h_i^m 는 원칙적으로 다음과 같이 정의되는 점 i 에서 허용되는 최대 마찰력의 크기인데

$$h_i^m = \mu |\bar{p}_{i\eta}^{t+\Delta t, m}| \quad (11)$$

빠른 수렴속도를 위하여 계산가속기법이 적용되는 경우 (또는 수렴에 문제가 생기는 경우)에는 이전 시간 t 에서 결정된 $p_{i\eta}^t$ 의 절대치에 마찰계수를 곱한 값을 h_i^m 으로 취하여 근사적으로 계산한다. 위에서 m 과 $m-1$ 은 반복계산의 회수이고, \bar{b} 는 상수로서 참고문헌 (7)과 (8)에서 설명되어 있으며 A_n 과 C 는 참고문헌 (7), (8), (9)에서 도입된 계산속도가속을 위한 행렬이며 부록에 설명되어 있다. 위에서 $v^{t+\Delta t, m-1}$ 는 접촉력 $p^{t+\Delta t, m-1}$ 을 대입하여 식(2), (5), (6) 및 (8)에 의하여 계산된 변위 오차를 뜻한다. 그리고 $v^{t+\Delta t, m}$ 역시 접촉력 $p^{t+\Delta t, m}$ 가 주어지면 식(2), (5), (6) 및 (8)에 의하여 계산된다. 위치오차 벡터 $v^{t+\Delta t}$ 가 반복계산법

(10)에 의하여 단조 감소함은 참고문헌 (8)에 의하여 증명되어 있다. 본 논문에서 매 시간단위(time step)에서의 변위는 반복계산법 (10)에 의한 해에 의하여 결정된다.

전술한 바와 같이, 접촉조건 (7) (또는 (9))이 만족되더라도 접촉점에서의 속도 및 가속도 적합성은 일반적으로 만족되지 않는다. 본 논문에서는 계산시 접촉점에서의 속도 및 가속도 적합성을 만족시켜 주기 위하여 다음과 같이 속도오차 벡터 \bar{v} 와 가속도오차 벡터 \bar{v} 를 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_{i\eta}^{t+\Delta t} &= \bar{u}_{i\eta}^{t+\Delta t} \text{ if } v_{i\eta}^{t+\Delta t} = s_{i\eta}^{t+\Delta t} \\
 &= 0 \text{ if } v_{i\eta}^{t+\Delta t} = 0 \neq s_{i\eta}^{t+\Delta t} \\
 \bar{v}_{i\epsilon}^{t+\Delta t} &= \bar{u}_{i\epsilon}^{t+\Delta t} \text{ if } v_{i\epsilon}^{t+\Delta t} = s_{i\epsilon}^{t+\Delta t} \\
 &= 0 \text{ if } v_{i\epsilon}^{t+\Delta t} = 0 \neq s_{i\epsilon}^{t+\Delta t} \quad (12) \\
 \bar{v}_{i\eta}^{t+\Delta t} &= \bar{u}_{i\eta}^{t+\Delta t} \text{ if } v_{i\eta}^{t+\Delta t} = s_{i\eta}^{t+\Delta t} \text{ and } v_{i\eta}^t = s_{i\eta}^t \\
 &= 0 \text{ if } v_{i\eta}^{t+\Delta t} = 0 \neq s_{i\eta}^{t+\Delta t} \text{ or } v_{i\eta}^t = 0 \neq s_{i\eta}^t \\
 \bar{v}_{i\epsilon}^{t+\Delta t} &= \bar{u}_{i\epsilon}^{t+\Delta t} \text{ if } v_{i\eta}^{t+\Delta t} = s_{i\epsilon}^{t+\Delta t} \text{ and } v_{i\epsilon}^t = s_{i\epsilon}^t \\
 &= 0 \text{ if } v_{i\epsilon}^{t+\Delta t} = 0 \neq s_{i\epsilon}^{t+\Delta t} \text{ or } v_{i\epsilon}^t = 0 \neq s_{i\epsilon}^t \quad (13)
 \end{aligned}$$

처음으로 강제와 접촉한 점에서 발생하는 극심한 가속도의 변화는 Newmark 시간적분법과 같은 시간적분법에 의하여는 합리적으로 계산되기 어려우므로, 위의 식(13)에서 시간 t 에서 접촉하지 않은 점에 대하여는 시간 $t+\Delta t$ 에서 가속도 적합성을 적용하지 않았다.

위에서 정의한 속도오차 벡터를 이용하여, 시간 $t+\Delta t$ 에서의 속도는 다음 반복계산법의 접촉력 $p^{t+\Delta t}$ 를 이용한 식(2), (3), (4)의 해에 의하여 결정된다.

$$p^{t+\Delta t, m} = p^{t+\Delta t, m-1} - \bar{b} A_n \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} / \|C\|_\infty \quad (14)$$

위에서 \bar{b} 는 위의 식이 수렴하기 위하여 필요한 상수이며 다음 절에서 자세히 설명된다. 그리고 시간 $t+\Delta t$ 에서의 가속도는 다음 반복계산법의 접촉력 $p^{t+\Delta t}$ 를 이용한 식(2)와 (3)의 해에 의하여 결정된다.

$$p^{t+\Delta t, m} = p^{t+\Delta t, m-1} - \bar{b} A_n \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} / \|C\|_\infty \quad (15)$$

위에서 \bar{b} 는 위의 식이 수렴하기 위하여 필요한 상수이며 다음 절에서 자세히 설명된다.

3.2 반복계산법의 수렴에 대한 설명

반복계산법 (10)에 의하여 접촉력을 계산한 후

식(2)를 시간적분하면 변위가 구해지며 따라서 식(8)에 의하여 변위오차 벡터 v 가 계산된다. 변위오차 벡터 v 가 반복계산법(10)에 의하여 0을 향하여 단조 감소함은 참고문헌(8)에 의하여 설명되었으므로, 본 논문에서는 이에 대한 설명은 생략하고, 속도오차 벡터 \bar{v} 및 가속도오차 $\bar{\dot{v}}$ 가 반복계산법(14) 및(15)에 의하여 0을 향하여 단조 감소하는 것만 설명한다.

먼저 속도오차 벡터 \bar{v} 의 단조 감소에 대하여 설명한다. 식(2)~(6), (12), (14) 및 부록에서 정의된 행렬 C' 에 의하여 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \bar{v}^{t+\Delta t, m} - \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} &= \frac{\delta}{\alpha\Delta t} C' (p^{t+\Delta t, m} - p^{t+\Delta t, m-1}) \\ &= \frac{-\bar{b}\delta}{\alpha\Delta t} C' A_n \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} / \|C'\|_\infty \end{aligned} \tag{16}$$

식(16), (A.7)에 의하여 다음식이 얻어진다.

$$\bar{v}^{t+\Delta t, m} = (I - \frac{\bar{b}\delta}{\alpha\Delta t} C_n) \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} \tag{17}$$

따라서 \bar{b} 가 다음 조건을 만족시키면 식(17)의 괄호 속에 있는 행렬의 최대 고유치는 1보다 작게 되며, 속도오차 벡터 $\bar{v}^{t+\Delta t, m}$ 는 $\bar{v}^{t+\Delta t, m-1}$ 보다 작게 되고 $\bar{v}^{t+\Delta t}$ 는 0을 향하여 단조 감소한다.

$$0 < \bar{b} < \frac{\alpha\Delta t}{\delta} \frac{2}{(\Lambda_n)_{\max}} \tag{18}$$

위에서 $(\Lambda_n)_{\max}$ 는 행렬 C_n 의 최대 고유치이며 \bar{b} 가 다음과 같은 값을 취할때 계산은 최대로 효율적이 된다(즉 식(17)의 괄호 속의 행렬의 최대 고유치가 최소로 된다).

$$\bar{b} = \frac{\alpha\Delta t}{\delta} \frac{2}{\omega_n + \epsilon_n} \tag{19}$$

다음에 반복계산법(15)에 의한 가속도오차 벡터(13)의 단조 감소를 검토한다. 식(2)~(6), (13) 및(15)에 의하여 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \bar{v}^{t+\Delta t, m} - \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2} C' (p^{t+\Delta t, m} - p^{t+\Delta t, m-1}) \\ &= \frac{-\bar{b}}{\alpha\Delta t^2} C' A_n \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} / \|C'\|_\infty \end{aligned} \tag{20}$$

식(20) 및 (A.7)에 의하여 다음 식이 얻어진다

$$\bar{v}^{t+\Delta t, m} (I - \frac{-\bar{b}}{\alpha\Delta t^2} C_n) \bar{v}^{t+\Delta t, m-1} \tag{21}$$

따라서 다음과 같이 \bar{b} 가 주어지면

$$\bar{b} = \alpha\Delta t^2 \frac{2}{\omega_n + \epsilon_n} \tag{22}$$

식(21)의 괄호 속에 있는 행렬의 최대 고유치는 1보다 작게 되며, 가속도오차 벡터 $\bar{v}^{t+\Delta t, m}$ 는 $\bar{v}^{t+\Delta t, m-1}$ 보다 작게 되고 $\bar{v}^{t+\Delta t}$ 는 0을 향하여 단조 감소하며 \bar{b} 의 최적치는 속도오차 벡터인 경우와 동일한 방법으로 구한다.

3.3 전산기에 의한 계산 순서

본 논문의 계산방법은 기본적으로 참고문헌(7), (8), (9)의 계산방법과 동일하며 또한 이들 참고문헌에 상세히 설명되어 있으므로 여기에서는 시간 $t + \Delta t$ 에서의 계산순서를 다음과 같이 약술한다.

첫째, 일반 유한요소법 절차에 의하여 물체의 강성도행렬, 질량행렬 및 외력벡터를 계산한다. 식(2)의 행렬 $K + M/\alpha\Delta t^2$ 을 삼각형 형태로 분해하고 식(5)의 행렬 C 를 계산한다.

둘째, 시간 t 에서의 u^t, \dot{u}^t , 와 \ddot{u}^t 를 이용하여 식(5)의 $\bar{w}^{t+\Delta t}$ 를 계산한다.

셋째, 변위오차 v 및 반복계산법(10)을 이용하여 방정식(2) 및 점촉조건(7)의 해를 구한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 변위는 여기에서 결정되며 자세한 계산과정은 참고문헌(8)과 동일하다.

넷째, 속도오차 \bar{v} 및 반복계산법(14)를 이용하여 속도 적합조건을 만족시키는 방정식(2)~(4)의 해를 구한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 속도는 여기에서 결정된다.

다섯째, 가속도오차 $\bar{\dot{v}}$ 및 반복계산법(15)를 이용하여 가속도 적합조건을 만족시키는 방정식(2), (3)의 해를 구한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 가속도는 여기에서 결정된다.

여섯째, 다음 시간단위(time step)에서의 계산을 step 1부터 시작한다.

4. 예제 계산

본 예제에서는 참고문헌(1)과 같이 반경이 8인 구형의 탄성체가 강체 벽과 충돌하는 경우에 대하여 계산하여 그 결과를 검토하기로 한다. 탄성체의 종탄성 계수는 500, 푸아송비는 0.3, 밀도는 1이며 충돌 전의 속도는 1이다. 물체는 Fig.1과 같이 9개의 절점을 가진 축대칭 요소를 사용하여 유한요

소법을 적용한다. Consistent mass matrix가 사용되며 $\delta=1/2, \alpha=1/4$ 인 표준형의 Newmark 시간적분법이 적용된다. 계산에서 반복계산법 (10), (14), (15)의 허용 오차는 각각 $10^{-5}, 10^{-5}\delta/\alpha\Delta t, 10^{-5}/\alpha\Delta t^2$ 으로 하였다.

마찰계수를 0으로 하여 계산한 결과 및 정확도는 참고문헌 (7)에서 검토되어 있는데 시간간격 Δt 를 변경시키며 계산한 결과를 추가로 검토한다. Δt 가 작은 경우, 본 논문과 같이 속도 및 가속도 적합조건을 고려하면 Figs. 2, 3처럼 정확한 해⁽¹⁾가

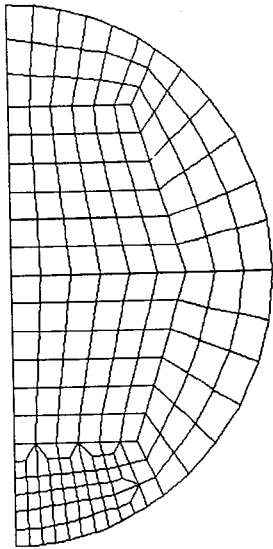


Fig. 1 FEM mesh of sphere

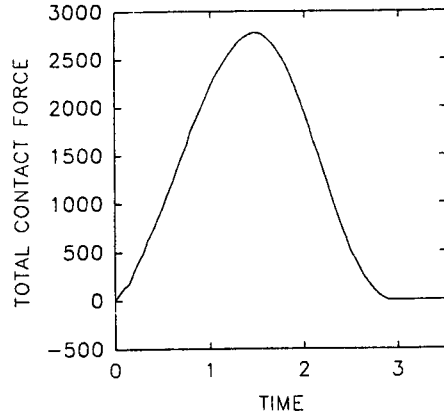


Fig. 3 Variation of the total contact force obtained with the velocity and acceleration compatibilities ($\Delta t=0.01$)

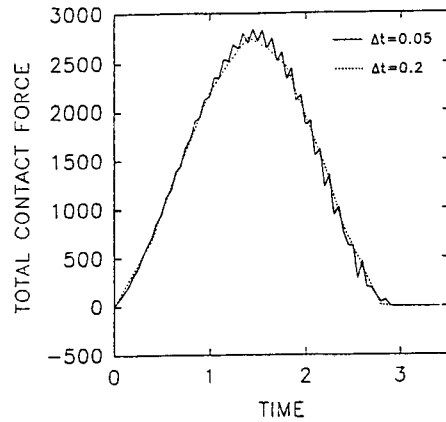


Fig. 4 Variations of the total contact force obtained without the velocity and acceleration compatibilities ($\Delta t=0.05$ and $\Delta t=0.2$)

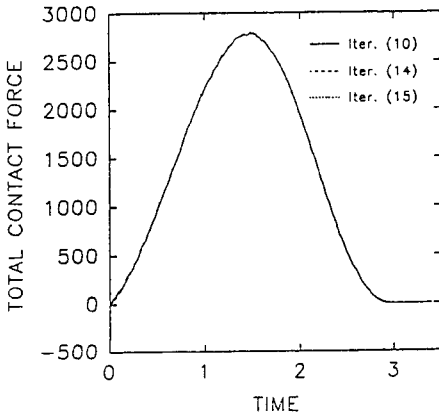


Fig. 2 Variation of the total contact force obtained with the velocity and acceleration compatibilities ($\Delta t=0.02$)

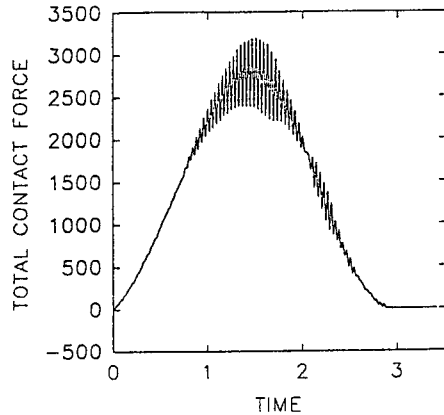


Fig. 5 Variations of the total contact forces obtained without the velocity and acceleration compatibilities ($\Delta t=0.02$)

얻어지며 세가지 반복계산법에 의한 계산이 거의 일치하지만 그렇지 않으면(즉 반복계산법 (14)와 (15)를 사용하지 않으면) Figs. 4~6처럼 수치적 진동이 발생한다. 한편 이들 경우 탄성체 전체의 에너지 변화가 Figs. 7~9에 비교되어 있는데 본 논문의 방법에 의하여 속도 및 가속도 적합조건을 고려하여야 정확한 해가 얻어짐을 알 수있으며, Δt 가 작은 경우 속도 및 가속도 적합조건이 사용되지 않으면 그 해에는 커다란 오차가 포함됨을 알 수 있다. 또 속도 및 가속도 적합조건이 고려되지 않는 경우 해의 오차는 탄성체가 접촉에서 분리되

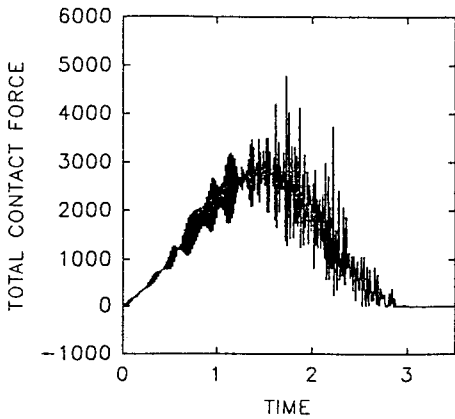


Fig. 6 Variations of the total contact forces obtained without the velocity and acceleration compatibilities ($\Delta t=0.01$)

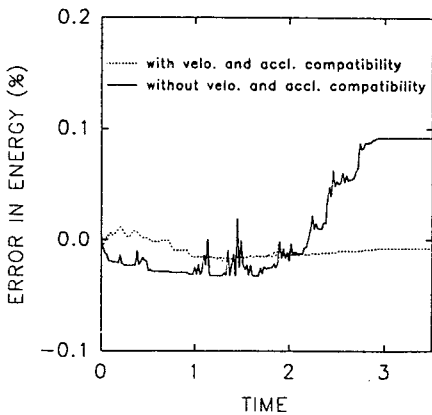


Fig. 7 Comparison of the error in energy between the method enforcing the velocity and acceleration compatibilities and the method without the velocity and acceleration compatibilities ($\Delta t=0.02$)

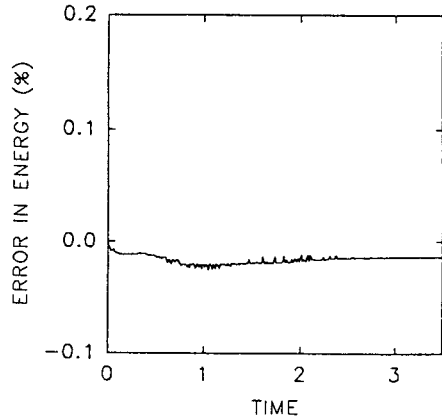


Fig. 8 Variation of the error in energy obtained with the velocity and acceleration compatibilities ($\Delta t=0.01$)

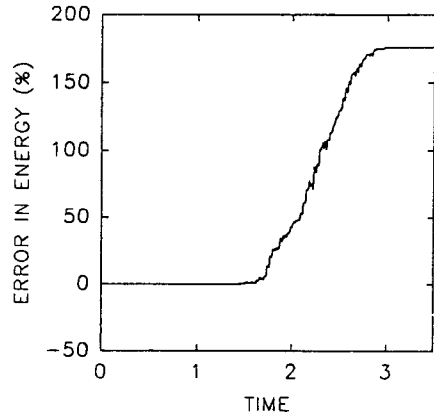


Fig. 9 Variation of the error in energy obtained without the velocity and acceleration compatibilities ($\Delta t=0.01$)

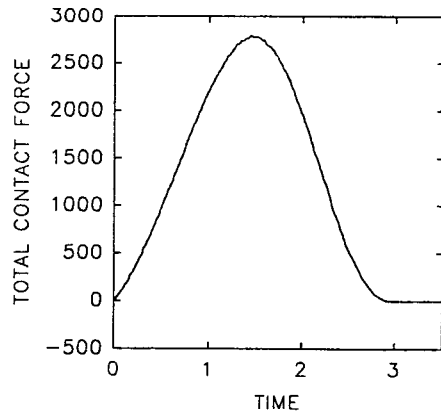


Fig. 10 Variations of the total normal contact forces obtained with the velocity and acceleration compatibilities ($\mu=0.3, \Delta t=0.05$)

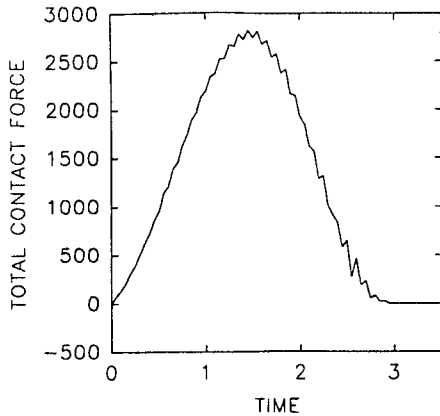


Fig. 11 Variations of the total normal contact forces obtained without the velocity and acceleration compatibilities ($\mu=0.3, \Delta t=0.05$)

기 시작하는 단계에서 크게 발생함을 알 수 있는데, 대부분의 참고문헌에서는 이와 같은 사실을 무시하였다(즉 접촉이 처음 시작되는 점에서만 운동량 보존법칙 등을 이용하여 속도 또는 가속도를 수정하였다).

한편 마찰계수가 0.3인 경우의 접촉력 (표면에 수직인 방향의 힘)의 변화가 Figs. 10, 11에 비교되어 있으며 마찰력이 없는 경우와 동일하게 속도 및 가속도 적합성이 고려되지 않으면 불필요한 진동이 포함됨을 알 수 있다(여기에서 시간 $t+\Delta t$ 에서의 식(11)의 h^n 는 이전 시간 t 에서 결정된 p_{in}^n 의 절대치에 마찰계수를 곱한 값을 취하여 근사적으로 계산했음).

5. 결론

동접촉을 유한요소법 및 수치 시간적분을 이용하여 해석한 경우에 접촉면에서 속도 및 가속도 적합조건을 적용하여 신뢰성 있는 해를 얻을 수 있음을 입증하였다. 본 논문의 방법과 같이 속도 및 가속도오차 벡터를 이용하여 이들 적합성을 효율적으로 적용할 수 있음을 이론 및 예제 계산을 통하여 설명하였다. 예제에서 에너지 보존법칙 및 접촉력을 이용하여 계산결과의 정확도를 점검하였다.

후 기

이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 공모과

제 연구비에 의하여 연구되었음

참고문헌

- (1) Taylor, R. L. and Papadopoulos, P., 1993, "On a Finite Element Method for Dynamic Contact Impact Problems," *Int. J. Numer. Method Engng.*, Vol. 36, pp. 2123~2140.
- (2) Zhong, Z. H., 1993, *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, New York.
- (3) Hughes, T. J. R., Taylor, R. L., Sackman, J. L., Curnier, A. and Kanoknukulchai, W., 1976, "A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems," *Comput. Method Appl. Mech. Engng.*, Vol. 8, pp. 249~276.
- (4) Ko, S. H. and Kwak, B. M., 1992, "Frictional Dynamic Contact Analysis Using Finite Element Nodal Displacement Description," *Comp. Struct.*, Vol. 42, pp. 797~807.
- (5) Huh, G. J. and Kwak, B. M. 1991, "Constrained Variational Approach for Dynamic Analysis of Elastic Contact Problems," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 10, pp. 125~136.
- (6) Chaudhary, A. B. and Bathe, K. J., 1986, "A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction," *Comp. Struct.*, Vol. 24, pp. 855~873.
- (7) Lee, K., 1994, "A Numerical Solution for Dynamic Contact Problems Satisfying the Velocity and Acceleration Compatibilities on the Contact Surface," *Comp. Mech.*, Vol. 15, pp. 189~200.
- (8) Lee, K., 1989, "An Efficient Solution Method for Frictional Contact Problems," *Comp. Struct.*, Vol. 32, pp. 1~11.
- (9) Lee, K., 1993, "An Accelerated Iterative Method for the Dynamics of Constrained Multibody Systems," *Comp. Mech.*, Vol. 12, pp. 27~38.
- (10) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey.

부 록

효율적인 계산을 위하여 참고문헌 (7), (8), (9)에서 사용된 계산가속기법이 본 논문에서 사용되고 있으므로 여기에서 이에 필요한 행렬을 정의한다. 식(5)의 행렬 C 에 의하여 다음의 행렬 C' 가 정의된다.

$$C' = E(v)CE(v) \quad (\text{A. 1})$$

위에서 $E(v)$ 는 대각선행렬이며 그 k 번째 성분은 v 의 k 번째 성분이 식(8)에 의하여 s 를 이용하여 정의되면 1이고 그렇지 않으면 (즉, v 의 k 번째 성분이 0이면) 0이다. 위에서 v 는 반복계산법 (10), (14) 및 (15)의 $v^{\ell+\Delta\ell, m-1}$, $\hat{v}^{\ell+\Delta\ell, m-1}$ 및 $\tilde{v}^{\ell+\Delta\ell, m-1}$ 에 대응한다. 행렬 C' 로부터 일군의 행렬 C_n 이 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} C_n &= C' / \|C'\|_\infty \text{ if } n=1 \\ &= C_{n-1}(b_n I - C_{n-1}) \text{ if } n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

위에서

$$b_n = \varepsilon_{n-1} + \omega_{n-1} (n \geq 2) \quad (\text{A. 3})$$

$$\begin{aligned} \omega_n &= 1 \text{ if } n=1 \\ &= (b_n)^2/4 \text{ if } n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \bar{\varepsilon}_1 \text{ if } n=1 \\ &= \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1} \text{ if } n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

위에서 n 은 정수이고 $\bar{\varepsilon}_1$ 은 행렬 C' 의 최소 고유치의 근사치로서 참고문헌 (8)의 방법에 의하여 계산된다. 그리고 행렬 A_n 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A_n &= I \text{ if } n=1 \\ &= (b_n - C_{n-1})A_{n-1} \text{ if } n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{A. 6})$$

그리고 식(A.2)와 (A.6)에 의하여 다음 식이 얻어진다.

$$C_n = C' / \|C'\|_\infty A_n \quad (\text{A. 7})$$

윗 식들에 의하여 행렬 C_n 의 최대 고유치와 최소 고유치의 비는 n 의 값이 증가함에 따라서 1에 가까워지며 따라서 반복계산법 (10), (14) 및 (15)의 수렴속도는 대단히 빨라진다.