

〈論 文〉

비압축성 유동장내 2차원 익형의 혼돈거동

정성원* · 이동기** · 이상환***

(1995년 1월 14일 접수)

Chaotic Behavior of 2-Dimensional Airfoil in Incompressible Flow

Seong-Weon Jeong, Dong-Ki Lee and Sang-Hwan Lee

Key Words : Cubic Stiffness(3차 강성), Poincaré Map(푸앵카레 선도), Crisis(갈림), Bifurcation(분기), Parameter Map(매개변수 선도), Chaos Theory(혼돈이론), Feigenbaum Number(파이젠바움수), Dynamical System Method(동역학계 방법), Lyapunov exponent(리아프노프지수)

Abstract

The self-excited vibrations of airfoil is related to the classical flutter problems, and it has been studied as a system with linear stiffness and small damping. However, since the actual aircraft wing and the many mechanical elements of airfoil type have various design variables and parameters, some of these could have strong nonlinearities, and the nonlinearities could be unexpectedly strong as the parameters vary. This abrupt chaotic behavior undergoes ordered routes, and the behaviors after these routes are uncontrollable and unexpected since it is extremely sensitive to initial conditions. In order to study the chaotic behavior of the system, three parameters are considered, i.e., free-stream velocity, elastic distance and zero-lift angle. If the chaotic parameter region can be identified from the mathematically modeled nonlinear differential equation system, the designs which avoid chaotic regions could be suggested. In this study, by using recently developed dynamically system methods, and chaotic regions on the parameter plane will be found and the safe design variables will be suggested.

기 호 설 명

| | |
|--|--|
| X, Y : 절대좌표[m] | D : 감쇠에너지[kg m ² /s ²] |
| η, ζ : 상대좌표[m] | L : 라그랑지안[kg m ² /s ²] |
| θ, y : 상대변위[m] | A : 단면적[m ²] |
| KE : 운동에너지[kg m ² /s ²] | m : 단위스팬당 총질량[kg/m ³] |
| PE : 위치에너지[kg m ² /s ²] | v : 단면적의 단위부피당 밀도[kg/m ³] |
| | J_{θ} : 단위스팬의 극관성 모멘트[kg m ² /m] |
| | S_x : 단위스팬당 정적관성[kg m/m] |
| | k_y : 하첨자 단위스팬당 굽힘강성계수[N/m/m] |
| | k_{θ} : 단위스팬당 비틀림 강성계수[N m/rad/m] |
| | ζ_y : 상하운동에 대한 감쇠계수 |

*한양대학교 대학원 정밀기계공학과

**쌍용자동차(주) 기술연구소

***한양대학교 기계설계학과

| | |
|-----------------|------------------------------|
| ζ_0 | : 비틀림운동에 대한 감쇠계수 |
| ω_y | : 비연성 굽힘 고유진동수[rad/s] |
| ω_θ | : 비연성 비틀림 고유진동수[rad/s] |
| β | : 비선형상수 |
| c | : 코드길이[m] |
| a | : 탄성중심에서 항공역학중심까지의 거리[m] |
| b | : 코드의 절반길이[m] |
| p | : 공기의 밀도[kg/m ³] |
| U | : 자유유동속도[m/c] |
| C_L | : 양력계수 |
| C_D | : 항력계수 |
| C_M | : 모멘트계수 |
| α | : 양각[rad] |
| F_L | : 항공역학중심에서의 양력[N] |
| F_D | : 항공역학중심에서의 항력[N] |
| F_θ | : 항공역학중심에서의 모멘트[N m] |
| F_L' | : 탄성축에서의 양력[N] |
| F_θ' | : 탄성축에서의 모멘트[N m] |
| R_c | : 특수반경[m] |
| C_y | : 수직력 계수 |
| X_{cg} | : 탄성중심에서 중력중심까지의 무차원 거리 |
| r_{co} | : 탄성중심에 대한 익형의 회전반경 |
| r | : 비연성 고유진동수 비 |
| μ | : 무차원 질량 |
| V | : 무차원 유속 |
| d | : 무차원 탄성거리 |
| τ | : 무차원 시간 |
| ϕ | : 수직운동에 대한 무차원 좌표 |
| γ | : 비틀림운동에 대한 무차원 좌표 |
| z | : 제로 리프트각 |

1. 서 론

2차원 익형의 거동은 고전적 자력진동과 밀접한 관계를 가지는 문제로서, 다년간에 걸쳐 많은 공력탄성학자들에 의해 연구가 되어왔으며, 다양한 이론과 많은 실험적 연구결과를 보여왔다. 여기서 발생하는 발산(divergence), 플러터(flutter), 조종면(control surface)의 반전, 돌발적 응답 등의 현상들은 선형화된 모델에 의해 주로 해석이 되어져 왔다. Scanlan 과 Rosenbaum,⁽¹⁾ Fung,⁽²⁾ Bisplinghoff, Ashley 그리고 Halfman⁽³⁾ 등은 이러한 공력 탄성학적인 현상을 고전적 선형모델을 이용하

여 연구하였고, 최근에 이르러 Forsching⁽⁵⁾과 Dowell et al.^(6,12,17)등에 의하여 비선형 특성에 관한 보다 명확한 특성을 규명하려는 연구가 수행된 바 있다. 한편, Ashley 등⁽⁷⁾은 공력탄성학의 공학적 응용이라는 주류를 형성하게 되었고, 항공공학과 자동차공학 등의 보다 구체적이고 현실적인 분야에 이를 응용하였다.

한편, 일반적인 동역학계에 내재되어 있는 비선형 효과는, 과거에는 이론적 결과와 실험적 결과의 차이를 설명하기 위해 도입되곤 했었지만, 최근 이에 대한 연구가 활발히 진행됨에 따라, 계에 내재된 비선형성이 종종 지배방정식의 중요한 항이되고 계의 운동에 결정적인 효과로 작용할 수 있다는 것을 알게 되었다. Dowell의 연구⁽¹⁸⁾에서는 유동장 내에서 거동하는 실제 판의 거동이 어떤 정량적인 비선형성을 내포하고 있음을 밝힌 바 있다.

특히, Yang과 Zhao^(8,9)의 연구에서는 판의 플러터현상에서 나타나는 한계사이클(limit cycle)에 대한 연구에서부터, 판과 유사한 계로 모델링 할 수 있는 익형을 모델링하여 계수선도(parameter map)에서 나타나는 혼돈운동(chaotic motion)의 존재여부와 그 정성적인 거동의 형태를 2단계 근사해석법(two step approximate analysis method)에 의해 규명하고자 하는 연구를 수행하였다.

본 연구에서는 최근 급격히 발달하고 있는 혼돈이론(chaos theory)^(14~16)에서 그 방법론으로 제시하고 있는 다양한 dynamical system방법중, time history analysis와 phase plot을 사용하여 위상평면의 거동을 관찰하고, Poincaré map에 의해 혼돈 거동으로 보이는 계수공간상의 계수값에서, strange attractor의 존재를 발견하였으며 분기선도(bifurcation diagram)를 사용하여, 3차 강성을 도입한 2차원 익형의 모델의 거동이 주기배가(periodic doubling)라는 혼돈의 징후를 거쳐 혼돈 거동을 겪게 되며 이 주기배가의 형태가 혼돈이론의 정량적 연구에 관한 척도가 되는 Feigenbaum 수와 밀접한 관계를 가지고 있음을 발견하였다.

또한, 두개의 계수공간상에서 볼때, 하나의 계수를 기준으로한 경우, 각 계수에 대한 분기선도의 집합이라고 할 수 있는 매개변수 선도를 구성하여 2단계 근사해석법에 근거한 결과와 비교하여 또다른 주기를 자지는 혼돈영역의 존재를 발견할 수 있었다.

연구모델로는 굽힘강성과 비틀림강성으로 지지

되어있고 각각의 감쇠를 가지는 2차원 익형을 사용하였으며, 비틀림 강성에 3차 강성(cubic stiffness effect)을 고려한 비선형 강성을 도입하였다. 비선형 parameter로는 비행속도와 탄성거리(elastic distance)를 먼저 사용하였고, 보다 일반적인 익형의 형상을 고려하기 위하여, 만곡(camber)의 효과로 나타나는 zero-lift각을 추가도입하였다.

2. 모델링 및 운동방정식

Fig. 1은 2차원 익형의 모델을 나타내고 있다.⁽¹¹⁾ 절대좌표 $\{X, Y\}$ 는 아래의 식과 같은 좌표변환을 이용하여 일반좌표 $\{\eta, \xi\}$ 로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta - \pi/2) & -\sin(\theta - \pi/2) \\ \sin(\theta - \pi/2) & \cos(\theta - \pi/2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

θ 가 충분히 작으면 $\sin\theta \cong \theta$, $\cos\theta \cong 1$ 이므로 다음과 같은 관계로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} X &= \eta\theta + \xi & Y &= y + \xi\theta - \eta \\ \dot{X} &= \eta\dot{\theta} & \dot{Y} &= \dot{y} + \dot{\xi}\theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

운동에너지 KE , 위치에너지 PE , 감쇠에너지 D , 그리고 Lagrangian L 을 구하면 다음과 같다.

$$KE = \frac{1}{2}m\dot{y} + \frac{1}{2}J_\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}S_x\dot{\theta}^2 \quad (2.3)$$

여기서,

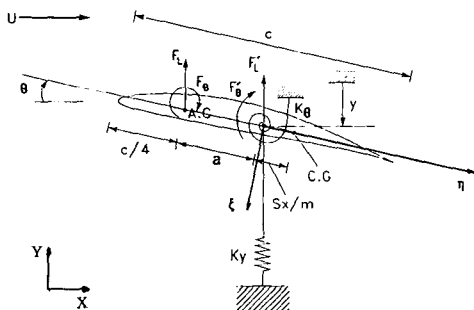


Fig. 1 2-D airfoil section supported by vertical and torsional springs. A. C. is the aerodynamic center and C. G. denotes the center of mass. X, Y is the absolute coordinates and η, ξ is the relative coordinates

$$\begin{aligned} J_\theta &= \int_A (\xi^2 + \eta^2) \nu d\xi d\eta \\ m &= \int_A \nu d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$S_x = \int_A \xi \nu d\xi d\eta$$

ν : 단면A의 부피당 밀도

$$PE = \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 \quad (2.5)$$

$$D = \frac{1}{2}c_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2}c_\theta \dot{\theta}^2 \quad (2.6)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_\theta\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}S_x\dot{\theta} - \frac{1}{2}k_y y^2 - \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 \quad (2.7)$$

일반좌표 q_i , 외력 Q_i 에 대한 Lagrangian formulation은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (2.8)$$

Fig. 1의 모델에 적용하면 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right] - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = F'_y \quad (2.9a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F'_\theta \quad (2.9b)$$

일반좌표 y, θ 의 비연성 고유진동수를 각각 ω_y, ω_θ 라고 놓으면, 감쇠계수는 각각, $c_y = 2m\zeta_y\omega_y, c_\theta = 2J_\theta\zeta_\theta\omega_\theta$ 의 관계를 가지므로, Fig. 1과 같은 2차원 익형모델에 대한 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$m\ddot{y} + S_x\ddot{\theta} + 2m\zeta_y\omega_y\dot{y} = F'_y \quad (2.10a)$$

$$J_\theta\ddot{\theta} + S_x\dot{y} + 2J_\theta\zeta_\theta\omega_\theta\dot{\theta} + k_\theta(\theta + \beta\theta^3) = F'_\theta \quad (2.10b)$$

여기서, y 는 수직변위, F'_y 는 탄성축에서 단위 길이당 수직력, θ 는 비틀림각, F'_θ 는 탄성축에서의 단위길이당 모멘트, k_y, k_θ 는 단위길이당 강성 계수 ζ_y, ζ_θ 는 감쇠율이다. 위와 유사한 진동계에서 일반적으로 나타나는 비선형 요소인 3차 강성을 비틀림운동에 고려하면 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$m\ddot{y} + S_x\ddot{\theta} + 2m\zeta_y\omega_y\dot{y} = F'_y \quad (2.11a)$$

$$J_\theta\ddot{\theta} + S_x\dot{y} + 2J_\theta\zeta_\theta\omega_\theta\dot{\theta} + k_\theta(\theta + \beta\theta^3) = F'_\theta \quad (2.11b)$$

여기서, β 는 비선형 상수이다. 익형의 단위길이당 항력, 양력, 모멘트는 일반적으로 다음과 같이 비행속도 U 와 항력, 양력, 모멘트계수의 함수로 나타내어진다.

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2} \rho U^2 c C_L \\ F_D &= \frac{1}{2} \rho U^2 c C_D \\ F_M &= \rho U^2 c C_M \end{aligned} \quad (2.12)$$

여기서, ρ 는 공기의 밀도, c 는 chord의 길이를 나타내며, C_L , C_D , C_M 은 양각(attack angle)과 Reynolds수의 함수이다. 양력계수 C_L 은 일반적으로 $\pm 8^\circ$ 내의 양각에 대해서는 그 구배가 아주 좋은 선형성을 보이며, 항력과 모멘트계수, C_D , C_M 은 이 각도범위내에서는 아주 작은값을 나타낸다. 그러나 각도가 $\pm 8^\circ$ 이상으로 커지면, 양력의 감소와 함께 항력이 급격히 증가하게 된다. $\pm 8^\circ$ 이내에서의 각 계수들은 다음과 같은 관계를 보인다.⁽¹¹⁾

$$\begin{aligned} C_L &= 2\pi(\alpha - z) \\ C_D &= \text{order of } 10^{-2} \\ C_M &= \text{order of } 10^{-2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

여기서,

α : 양각(attack angle)
 z : zero-lift각

위의 관계에서 C_D 와 C_M 은 C_L 에 비해 무시할 수 있을만큼의 작은값을 가짐을 알 수 있다. Zero-lift 각은 대칭성의 익형에 있어서는 0의 값을 가지며, 익형의 형상, 즉 만곡의 정도에 따라 변하는 값이다.⁽¹⁰⁾

양각 α 를 결정하는 방법에는 일반적으로 다음과 같은 두가지의 해석법이 있는데, 첫째로 양각을 비틀림각과 같다고 가정하는 ($\alpha = \theta$) 정상상태이론과, 두번째로 식(2.14)와 같이 순간적인 양각에서의 날개의 수직방향과 각방향의 속도를 고려한 준정상상태이론이 있다.

$$\alpha = \theta - \frac{R_c \theta}{U} + \frac{y}{U} \quad (2.14)$$

여기서, R_c 는 탄성축에 대한 특성반지름(characteristic radius)이다. 다만 이 이론은 다음과 같은 높은 reduced velocity에서만 유효하다는 요구사항을 가지고 있다.

$$\frac{U}{f_n D} > 20 \quad (2.15)$$

여기서, f_n 는 계의 고유진동수이며, D 는 공기의 흐름에 수직인 단면의 나비이다. 위의 요구조건에 의하면, 후자의 방법은 $1 < \frac{U}{f_n D} < 20$ 의 범위에서 일어나는 flutter현상의 해석에는 적합하지 않으므로, 본 연구에서는 정상상태이론을 사용하였다.

식(2.10)의 탄성축에서의 수직력 F'_y 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F'_y = F_y = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_y = -F_L \cos \alpha - F_D \sin \alpha \quad (2.16)$$

C_y 는 α 의 함수이므로 이를 급수전개하면 다음과 같다.

$$C_y = C_y|_{\alpha=0} + \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} |_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2) \quad (2.17)$$

식(2.13), (2.16), (2.17)을 이용하면 C_y 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} C_y &= -C_L \cos \alpha - C_D \sin \alpha \\ &= -C_L |_{\alpha=0} - \left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D \right]_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2) \\ &= -2\pi \alpha \end{aligned} \quad (2.18)$$

탄성축 모멘트 F'_θ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F'_\theta = F_\theta + a F_L \quad (2.19)$$

항공역학적중심(aerodynamic center)의 모멘트 F_θ 는 매우 작아서 무시할 수 있으므로 결과적으로 모멘트는 양력의 지배를 받게 된다.

$$F'_\theta \cong a F_L \quad (2.20)$$

F'_y 와 F'_θ 를 정리하여 쓰면 다음과 같다.

$$F'_y = -\rho \pi U^2 c a \quad (2.21a)$$

$$F'_\theta = \rho \pi U^2 c a a \quad (2.21b)$$

식(2.21)을 식(2.10)에 대입하고, $a = \theta$ 라고 놓으면, 다음과 같은식을 얻는다.

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + 2m \zeta_y \omega_y \dot{y} + k_y + S_x \ddot{\theta} + \rho \pi U^2 c (\theta - z) \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.22a)$$

$$\begin{aligned} J_\theta \ddot{\theta} + 2J_\theta \zeta_\theta \omega_\theta \dot{\theta} + S_x \dot{y} + (k_\theta - \rho \pi U^2 c a) \theta k_\theta \beta \theta^3 \\ + \rho \pi U^2 \rho a z = 0 \end{aligned} \quad (2.22b)$$

운동방정식을 무차원화하기 위하여 대표길이를 chord c 의 절반인 b 로 정하고, 식(2.22)를 $\pi \rho b s^2$ 으로 나눈 후 무차원 질량을 $\mu = m / \pi \rho b^2$ 으로 놓으면 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\mu \dot{y} + 2\mu \zeta_y \omega_y \dot{y} + \mu \omega^2 y + \mu b x_{cg} \dot{\theta} + 2 \frac{U^2}{b} (\theta - z) = 0 \quad (2.23a)$$

$$\mu b^2 r_{cg}^2 \dot{\theta} + 2\mu b^2 r_{cg}^2 \zeta_\theta \omega_\theta \dot{\theta} + \mu b x_{cg} \dot{y} + (\mu b^2 r_{cg}^2 \omega_\theta^2 - \frac{2U^2 a}{b}) \theta + \mu b^2 r_{cg}^2 \omega^2 \beta \theta^3 + \frac{2U^2 a}{b} z = 0 \quad (2.23b)$$

여기서, $x_{cg} = \frac{Sx}{mb}$, $r_{cg}^2 = \frac{J_\theta}{mb^2}$, $\omega_y^2 = \frac{k_y}{m}$, $\omega_\theta^2 = \frac{k_\theta}{J_\theta}$

일반좌표 y, θ 를 무차원화하기 위하여, 양변을 ω_θ^2 으로 나누고, 비연성 고유진동수비 $r = \omega y / \omega_\theta$, 무차원 속도 $V = U / (b\omega_\theta)$ 라고 두면 다음과 같이 표현된다.

$$\mu \frac{\ddot{y}}{\omega_\theta^2} + 2\mu \zeta_y r + \mu r^2 y + \mu b x_{cg} \frac{\ddot{\theta}}{\omega_\theta^2} + 2bV^2(\theta - z) = 0 \quad (2.24a)$$

$$\mu b^2 r_{cg}^2 \frac{\ddot{\theta}}{\omega_\theta^2} + \mu b^2 r_{cg}^2 \zeta_\theta \frac{\dot{\theta}}{\omega_\theta} + \mu b x_{cg} \frac{\dot{y}}{\omega_\theta} + (\mu b^2 r_{cg}^2 - 2abV^2) \theta + \mu b^2 r_{cg}^2 \omega_\theta^2 \beta \theta^3 + 2baV^2 z = 0 \quad (2.24b)$$

무차원 탄성거리 $d = a/b$, 무차원 시간을 $\tau = \omega t$ 라고 하면 $y(t)$ 와 $\theta(t)$ 에 의한 운동방정식은 무차원 좌표, $\phi(\tau) = y(t)/b$, $r(\tau) = \theta(t)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\mu \phi'' + 2\mu \zeta_y r \phi' + \mu r^2 \phi + \mu x_{cg} r'' + 2V^2(r - z) = 0 \quad (2.25a)$$

$$\mu r_{cg}^2 r'' + 2\mu r_{cg}^2 \zeta_\theta r' + \mu x_{cg} r'' + (\mu r_{cg}^2 - 2dV^2) r + \mu r_{cg}^2 \beta r^3 + 2dV = 0 \quad (2.25b)$$

수치해석을 위해, 다음과 같은 각 계수를 선택하여 대입하면,

$\mu = 50$, $\zeta_y = 0.01$, $\zeta_\theta = 0.03$, $x_{cg} = 0.25$, $r_{cg}^2 = 0.25$, $r = 0.472$ 이며, ⁽¹¹⁾ 최종적인 운동방정식은 다음과 같다.

$$50 \phi'' + 0.472 \phi' + 11.139 \phi + 12.5 r'' + 2V^2(r - z) = 0 \quad (2.26a)$$

$$12.5 r'' + 0.75 r' + 12.5 \phi + (12.5 - 2dV^2) r + 12.5 \beta r^3 + 2dV^2 z = 0 \quad (2.25a)$$

3. 수치해석 및 고찰

모델링에 의하여 세워진 연성된 2자유도 미분방정식은 간단한 조작으로 다음과 같이 연성된 4개의 1계 상미분방정식으로 표시될 수 있다.

$$\frac{dq_i}{dt} = f(q_i) \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (3.1)$$

여기서, $q_1 = \phi'$, $q_2 = \phi$, $q_3 = r'$, $q_4 = r$ 를 나타낸다. 위상평면과 분기선도(bifurcation diagram), 그리고 Poincare' map를 얻기 위한 수치해법으로는 계산시간의 절약과 보다 높은 정확성을 얻기 위하여 가변시간간격(variable time step)을 이용하여 수치적분오차를 보상하는 4차의 Runge-Kutta-Fehlberg 알고리즘을 사용하였고, 혼돈거동여부를 판별하는 Lyapunov exponent의 계산은 모든 변수를 포함하는 위상공간에서 행하여졌으며, 이를 위하여 일정한 시간간격을 사용하는 4차의 Runge-Kutta 알고리즘을 사용하였다.

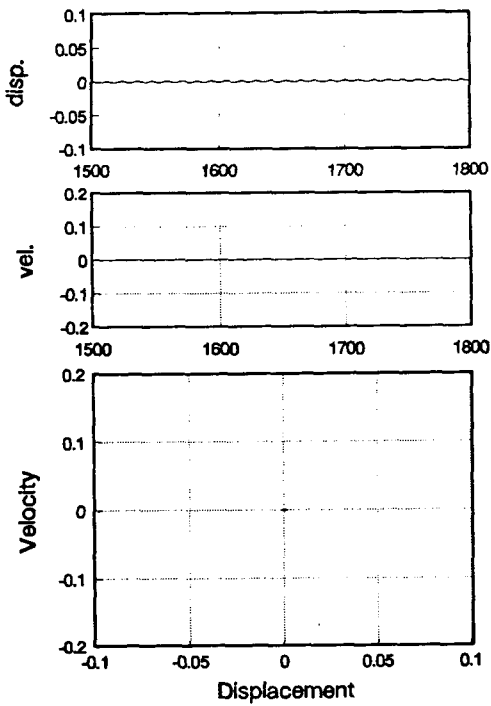
단, Runge-kutta-Fehlberg 알고리즘에서 각 시간간격(time step)은 10^{-4} 이상으로 커지지는 않는다는 조건을 주었고, 평균적인 시간간격은 약 10^{-6} order이다.

수치해석을 위한 초기조건은 모두 일정하게 $(\phi', \phi, r', r) = (0, 0, 0, 1)$ 로 주었으며, 과도한 운동영역을 피하기 위하여 무차원 시간 τ 가 1500 sec 이상이고 3000 sec 이내인 범위의 data만 사용하였다. Parameter값의 범위는 무차원속도를 $V = 1.0 \sim 6.0$ 무차원 탄성거리를 $d = 0.0 \sim 1.0$, zero-lift angle을 $z = 1 \sim 0.15$ 의 범위에서 선택하여, 이를 변화시켜 가며 수치계산을 수행하였으며, 계산은 IBM RS/6000 series Workstation을 사용하였다.

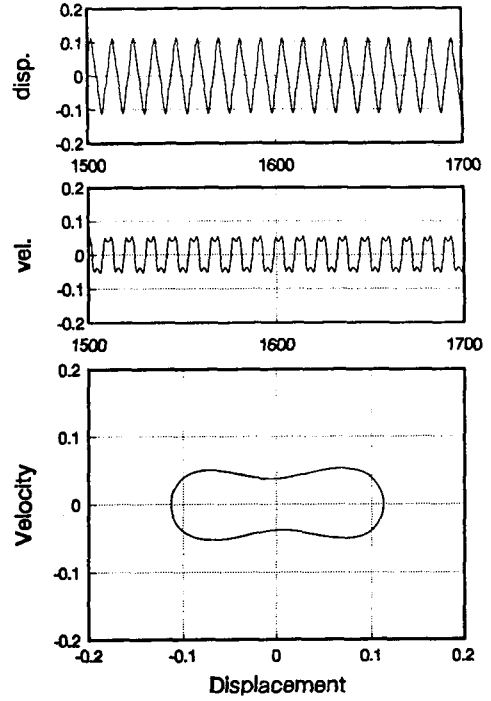
3.1 위상평면 해석

위성선도는 변위와 속도간의 관계를 나타낸 것으로 궤적의 형태에 따르는 거동의 안정과 불안정 여부를 나타낸다. 비선형항이 도입된 비틀림운동이 본 연구의 주된 관심의 대상이 되므로 무차원 각변위 r 와 무차원 각속도 r' 의 위상평면과, 속도와 변위에 대한 time history로 그 해석을 국한시켰으며, 정상상태라고 간주할 수 있는 시간영역에서의 거동을 관찰하기 위하여 무차원시간 τ 가 1500 sec 이내인 범위는 과도영역으로 간주하고, 그 이후의 값만을 사용하였다.

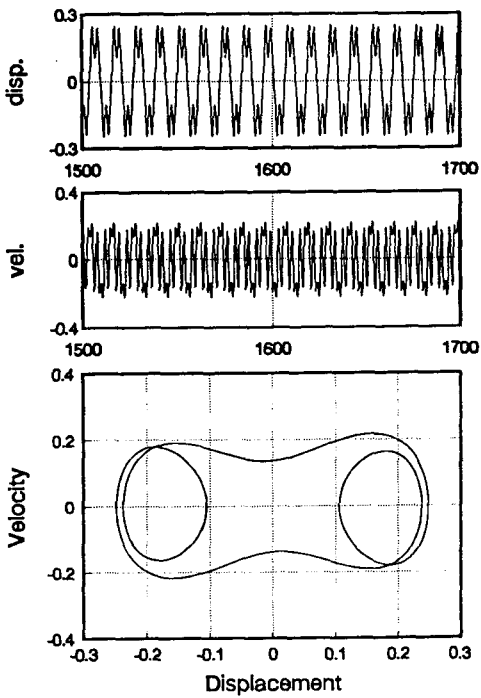
Fig. 2는 무차원 탄성거리 d 를 0.5로 고정시킨 다음 무차원속도 V 를 변화시켰을 때, 이에 따라 나타나는 거동의 대표적인 형태를 보여주고 있다. 저속일 경우에는 과도적인 현상 이후 안정되는 운동을 보이다가 무차원속도 V 가 점차 증가함에 따라,



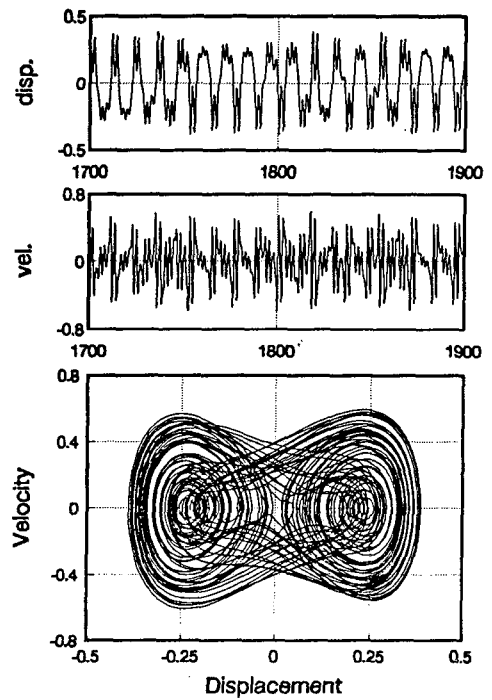
(a) $V=2.0$



(b) $V=2.5$

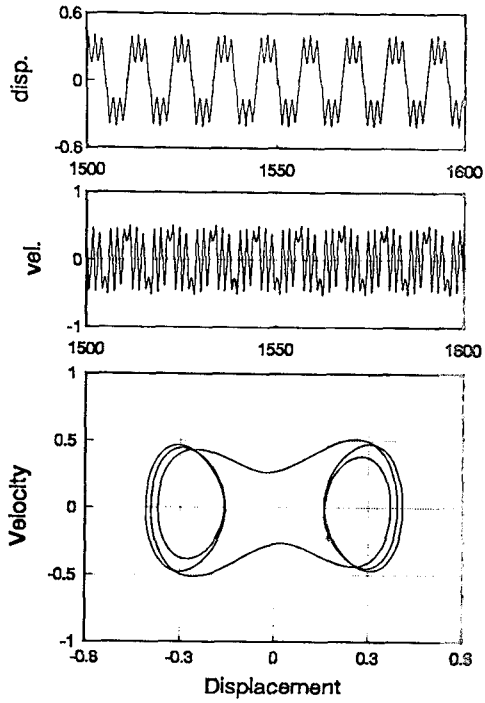


(c) $V=3.5$

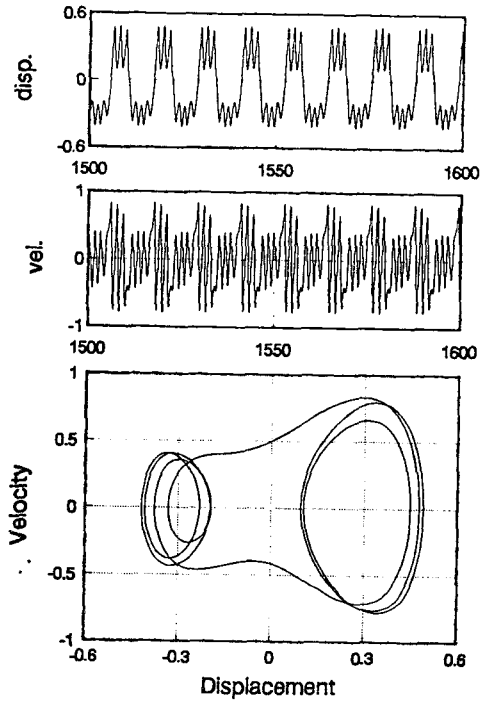


(d) $V=4.0$

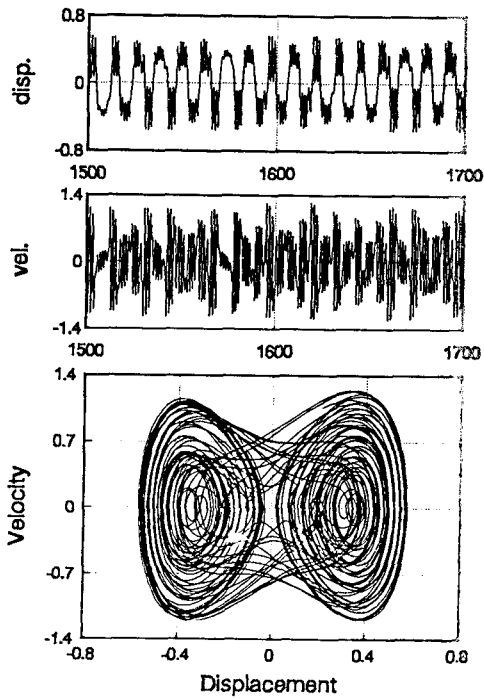
Fig. 2 Continued



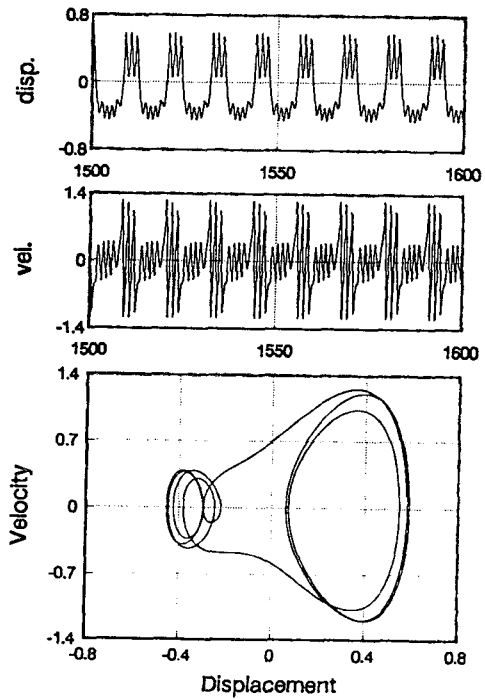
(e) $V = 5.0$



(f) $V = 5.2$



(g) $V = 5.5$



(h) $V = 5.9$

Fig. 2 Time histories and phase plane portraits, elastic distance, $d=0.5$

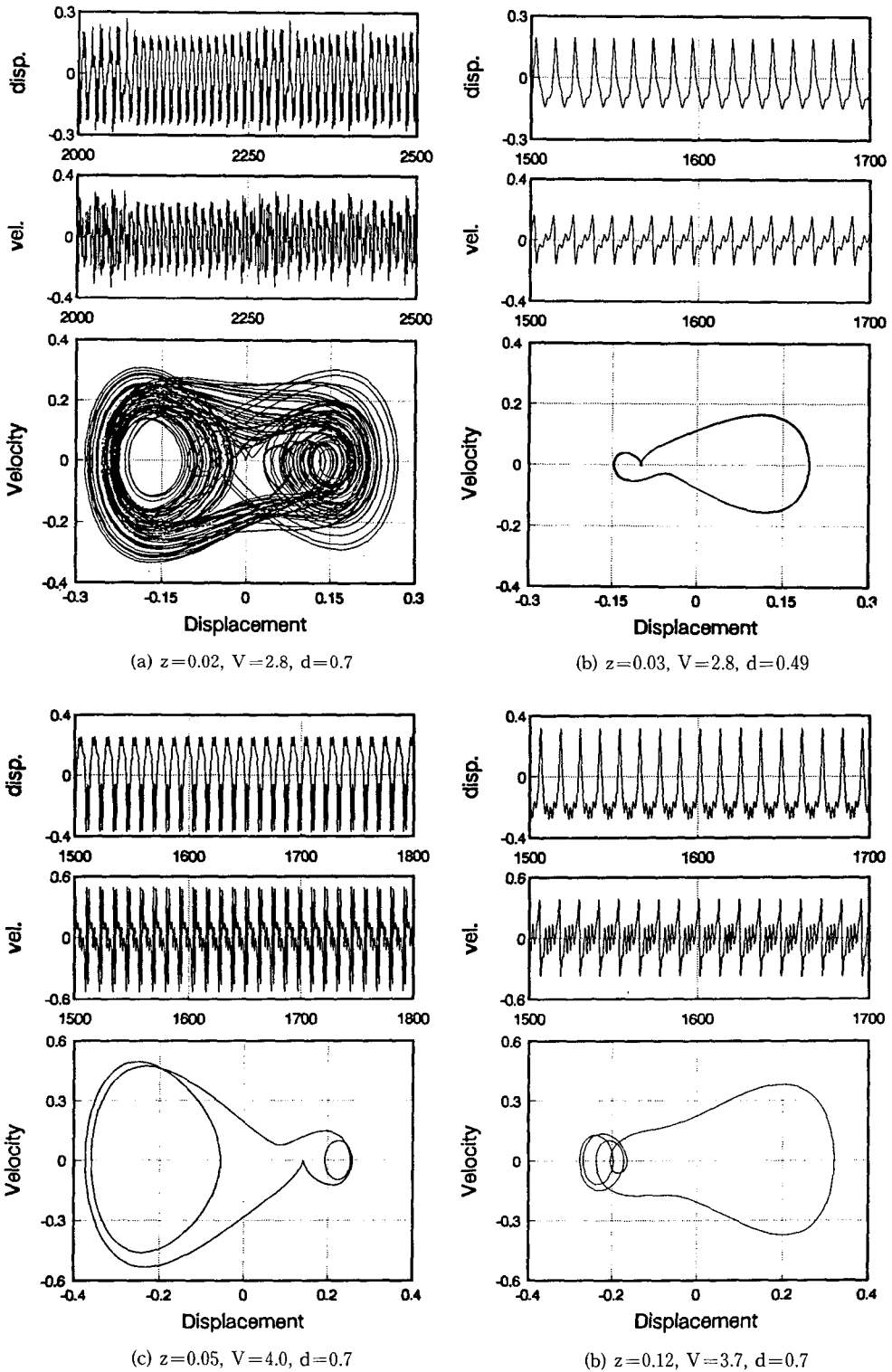


Fig. 3 Time history and phase portraits for various periodic and chaotic attractors

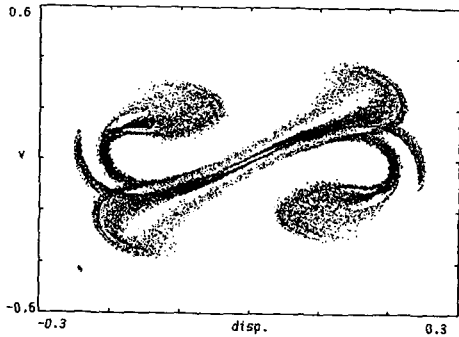
homoclinic orbit이 등장하게 되고, 이러한 orbit이 깨어진 후의 거동은, 변위나 속도의 변화량이 점차 커지며 다주기화 함을 볼 수 있다. 또한 이와같은 주기변화 중에 간헐적으로 혼돈거동을 보이는 속도 영역이 존재함을 관찰할 수 있다. Fig. 3은 각각 다른 parameter값에 의한 다양한 형태에 거동을 보여주는 time history와 위상선도이며, zero-lift 각, α 가 존재하는 경우이다.

3.2 Poincare' map

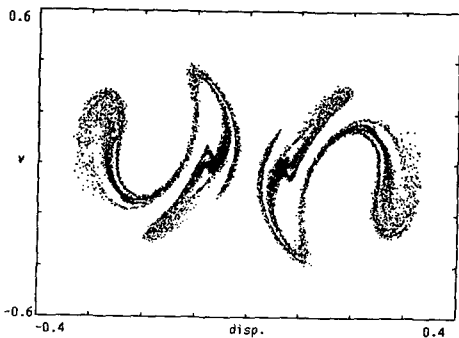
혼돈거동의 성격을 좀더 자세히 관찰하고 그 성질을 규명하기 위해서는 time history와는 다른 표현방식을 고려해 봐야한다. Poincare' map은 시간에 따라 연속적인 궤적이 공간상의 어떤 평면이나 표면을 통과할 때 생기는 위상평면의 일련의 이산화된 점의 집합으로, 혼돈운동의 경우에는 특이한 형태의 fractal구조의 strange attractor를 가지며, 이러한 구조는 혼돈운동과 그 밖의 주기운동을 보다 명확히 구별해주는 척도가 된다. 주기적인 외력

을 받는 계의 경우에는 속도와 변위로 이루어진 위상평면에서, 시간을 가진력의 함수로 나눈 나머지, 즉 가진주기의 위상차에대한 Poincare' map을 구할 수 있으나, 자러진동계에서는 외부가진이 존재하지 않으므로 공간상의 임의의 평면을 추출조건으로 선택하여야만 한다.

따라서 본 연구에서는 수직방향과 비틀림방향에 대한 속도와 변위 (ϕ', r', ϕ, r)를 4개의 축으로 하는 4차원 공간을 가정하고 그 공간상에서 운동하는 궤적을 수직방향의 변위 $\phi=0$ 인 경우와 수직방향의 속도 $\phi'=0$ 인 두가지 경우를 각각의 추출조건으로 하여, r 와 r' 에 대한 위상평면상에 투영하는 방법을 사용하였다. Fig. 4과 5는 혼돈거동을 보이는 경우에 해당하는 Poincare' map으로서 특이한 모양의 fractal구조를 가지는 strange attractor를 보여주고 있다. Fig. 5의 각기 다른 추출조건에 의한 2개의 그림은 Fig. 4에 비하여 fractal구조가 좀더 복잡하게 발달되어 있음을 관찰할 수 있으며, 이는 무차원 속도와 무차원 탄성거리가 증가할수

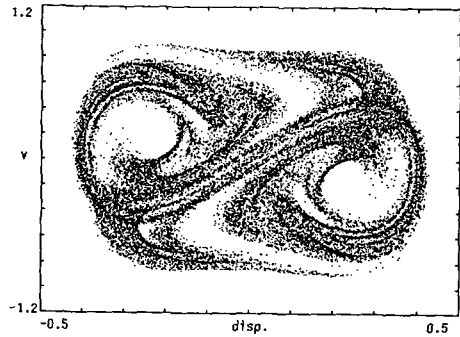


(a) $\phi=0$

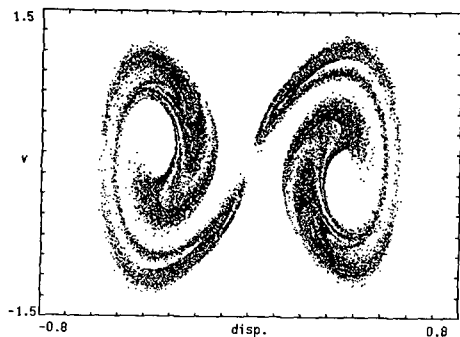


(b) $\phi'=0$

Fig. 4 Poincare' maps of a strange attractor for two different sampling conditions on the $r'-r$ plane, $V=4.0$, $d=0.5$:



(a) $\phi=0$



(b) $\phi'=0$

Fig. 5 Poincare' maps of a strange attractor for two different sampling conditions on the $r'-r$ plane, $V=4.8$, $d=0.85$

록, parameter의 변화에 따라서 간헐적으로 나타나는 혼돈들의 양상이 점차 발달하여 감을 보여주고 있는 것이다.

Fig. 6은 zero-lift각, z 가 존재할때, 혼돈거동이 존재하는 경우의 Poincare' map으로서 Fig. 4(a)와 비교해 보면, z 의 영향으로 원점에 대한 대칭성이 깨어지는 현상을 볼 수 있다. 한편, Fig. 7(a)의 위

상평면상에서 끊은채적으로 나타나는 거동은, Fig. 7(b)의 Poincare' map에서 관찰할 수 있는 두개의 폐곡선으로 보아, 이 거동이 준주기운동(quasi-periodic motion)임을 알 수 있으며, 이는 위상평면에서 나타나는 운동의 성격에 대한 구분이 힘든 경우, Poincare' map이 좋은 판별법이 됨을 보여주고 있다.

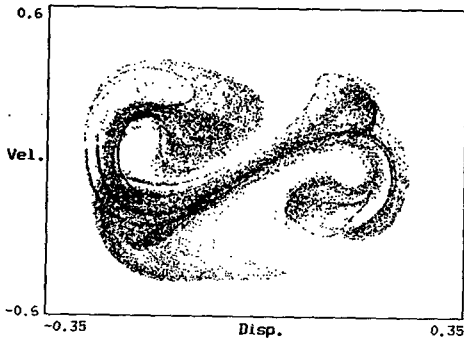


Fig. 6 Poincare' maps of a strange attractor with zero liftj angle effect on the $r'-r$ plane : $z=0.02, V=3.7, d=0.7, \phi=0$

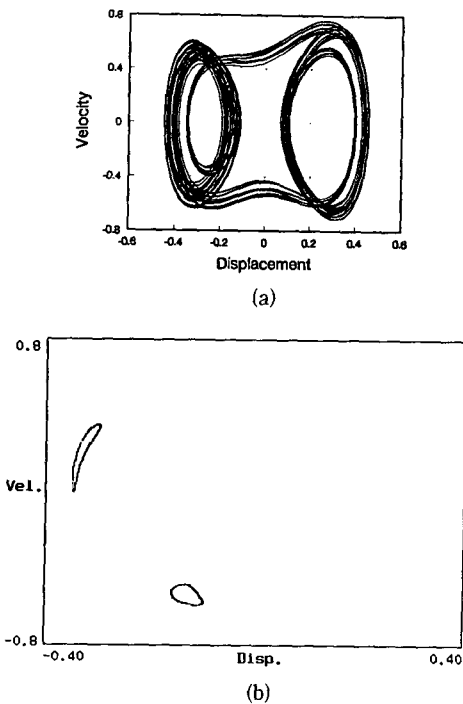


Fig. 7 Phase plane portrait of a quasi-periodic motion and its Poincare' map on the $r'-r$ plane : $z=0.05, V=4.3, d=0.7, \phi=0$

3.3 분기선도

분기선도는 parameter값의 변화에 따른 평행해의 분기(bifurcation)현상을 나타낸 것이다. 위상평면상의 속도가 0이 될 때의 변위값을 관심이 있는 parameter값에 대하여 2차원 평면상에 나타낸

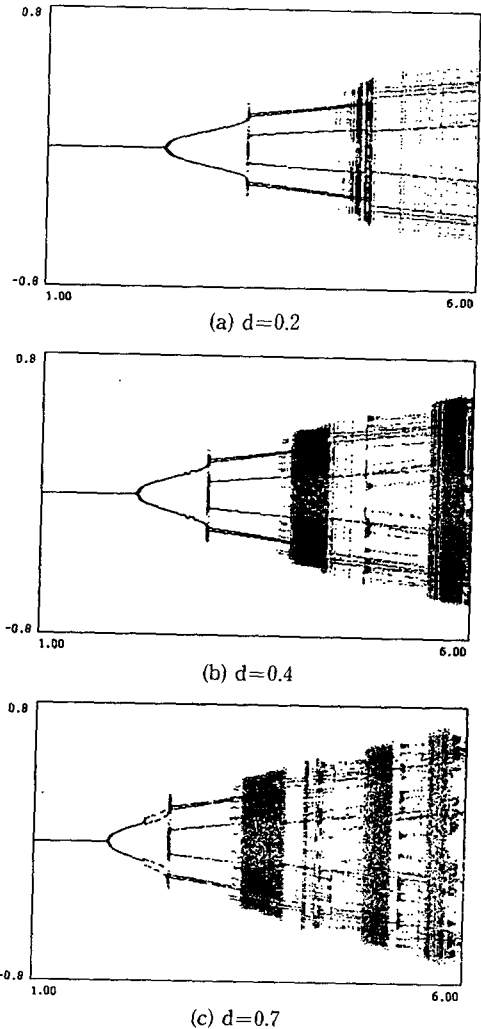
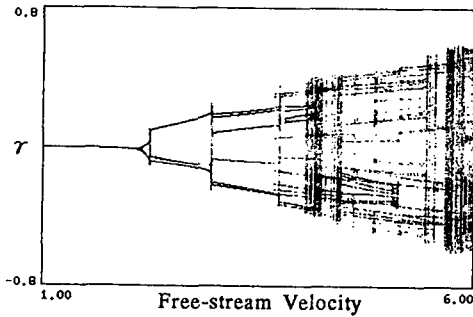


Fig. 8 Bifurcation diagrams on the $r-V$ plane ($z=0$)

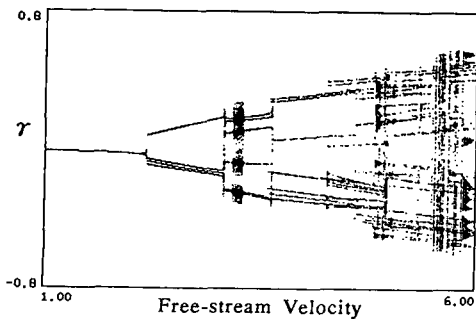
것으로, parameter의 변화에 따라 계가 혼돈으로 가는 경로를 관찰할 수 있게 한다. 분기선도상에 나타나는 계를 혼돈으로 이끄는 일반적인 경로로는 무한주기 배가폭포(infinite periodic doubling cascades, IPDC)와 급작스런 주기의 변화를 보이는 갈림(crisis), 불규칙적이고 간헐적인 혼돈을 보이는 중단(intermittence), 초기의 혼돈운동에서 주기운동으로부터 준주기운동으로 변화하는 과도혼돈(transient chaos)등이 있다.

Fig. 8은 무차원 속도 V 의 변화에 따른 분기선도들로서 각각 다른 d 값에 대하여 계산을 행한 결과이다. 전반적으로 저속부분에서 나타나는 hopf bifurcation과 그 이후의 급작스런 주기의 변화, 즉 갈림이 지배적으로 나타나고 있으며, 이러한 혼돈의 징후들이 부분적으로 나타나며 혼돈영역을 예고하고 있다. 또한, d 값이 증가함에 따라 혼돈영역이 점차 저속영역으로 당겨지면서 주기변화의 양상이 보다 복잡하게 나타나고 있음을 관찰할 수 있다.

또한, Fig. 8(c)의 경우 주기배가현상으로 1주기에서 8주기까지 발전해 가는 과정에서 각 주기의



(a) $z=0.04, d=0.4$



(b) $z=0.06, d=0.4$

Fig. 9 Bifurcation diagrams on the $r - V$ plane

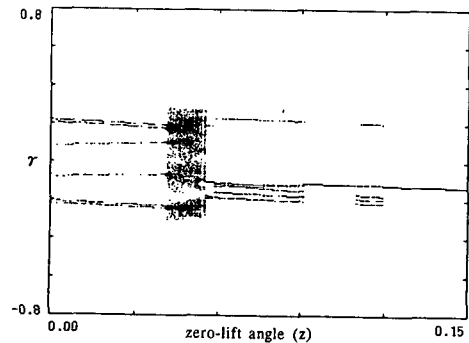
parameter범위간의 비로 정의되는 값이 Micheal Feigenbaum에 의해 발견된 Feigenbaum수의 $1/2$ 인 $2.3346\dots$ 임을 알 수 있었다.^(14,15)

Fig. 9는 Fig. 8(b)의 경우에, 만곡효과가 고려된 경우의 분기선도인데, z 의 영향으로 대칭성이 깨어지며, Fig. 8(b)와는 매우 다른 양상을 보이고 있다. 한편, Fig. 10은 z 의 변화에 범위를 0에서 $0.15(=8.5^\circ)$ 까지로 제한하였다.

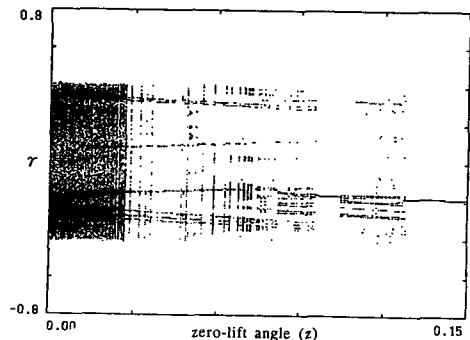
그림에서 관찰할 수 있듯이 z 값이 변화함에 따라 급격한 주기의 변화를 관찰할 수 있으며, 이러한 주기의 변화 이후에 변위가 0이 아닌 일정한 값을 가지는 안정영역이 나타남을 볼 수 있다. 이러한 현상은 zero-lift각이 bifurcation parameter가 될 수 있음을 증명해 주고있다.

3.4 라아프노프계수

위상평면에서 거동하는 어떤 궤적에 매우 작은 섭동을 주었을 경우, 인접한 두개의 궤적사이에는 시간의 경과에 따라 끌림(attraction)이나 분기



(a) $z=2.8, d=0.7$



(b) $V=3.7, d=0.7$

Fig. 10 Bifurcation diagrams on the $r - V$ plane

(separation)이 발생하게 되고, 일정한 시간후에 두 궤적 사이의 거리는 시간에 대하여 지수적인 함수를 가지게 되는데, 이러한 거리의 변화율을 시간 간격 T 에 대하여 충분한 시간에 걸쳐 계산하여, 평균한 값을 Lyapunov exponent라고 한다. 이는 거동의 수렴과 발산의 정도를 나타내는 값이되며, 그 중에서 특히, 양의 값은 혼돈거동을 나타내는 정량적인 기준이 된다.

수치해석을 위해서는 시간간격 τ 를 가지는 4차의 Runge-Kutta 알고리즘을 이용한 수치적분 과정과, 시간간격 T 를 가지는 상미분방정식의 Jacobian 행렬값을 이용한 변분식(variational equation)의 계산과정이 동시에 이루어져야 하는데, Lyapunov exponent는 일반적으로 다음과 같은 식으로 표현된다.⁽¹⁴⁾

$$\lambda = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^N \log \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})} \quad (3.2)$$

- 여기서, λ : 리아프노프지수
- $d_0(t_{k-1})$: 두개의 출발점 사이의 초기거리
- $d(t_k)$: 추출간격, τ 초 후의 거리
- t_0 : 시간간격
- t_N : $t_N = t_0 + \tau N$
- $\lambda \leq 0$: Regular motion
- $\lambda > 0$: Chaotic motion

수치적분에서 사용되는 시간간격으로는 무차원 시간 $\tau=0.01$, $T=0.1(=10\tau)$ 를 선택하였다. Fig. 11은 혼돈거동을 보이는 계의 Lyapunov exponent를 시간이 지남에 따라 나타낸 Lyapunov spectrum으로서 시간이 경과함에 따라서 그 값이 점차 수렴해 감을 관찰할 수 있으며, 수렴성을 보장하기 위하여, 충분히 긴 시간에 걸친 계산이 필요하다.

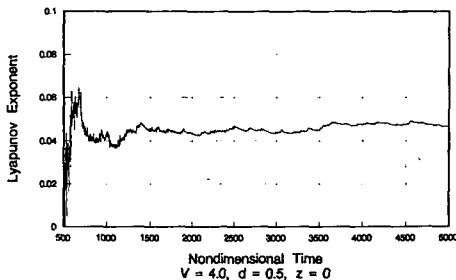


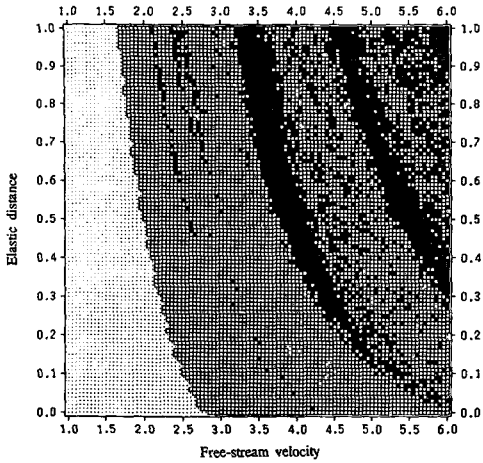
Fig. 11 Calculation of the Lyapunov exponent for chaotic motion as a function of the total time record: $\lambda = 0.466$ (converged)

3.5 Parameter Map

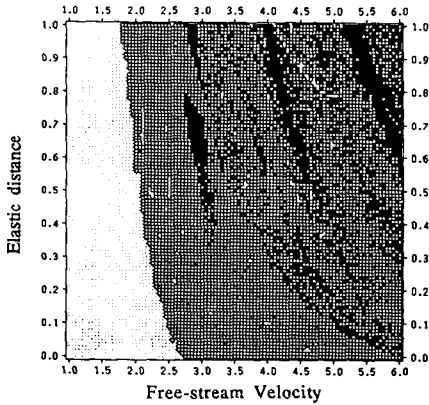
Parameter의 변화에 따른 운동의 양상과 계가 혼돈으로 이르는 경로를 보다 거시적으로 관찰하기 위하여, 무차원 탄성거리와 무차원 속도로 이루어진 2차원 평면상에서 parameter map를 구성하였다. 위상평면해석과 분기선도의 결과를 이용하여, parameter map를 구성하는 방법이 있지만,^(19,20) 이는 매우 긴 계산시간과 번거로운 수작업이 필요하며, 요구되는 해상도를 얻기에는 어려운 단점이 있기때문에 3, 4절에서 언급한 Lyapunov exponent를 이용하여 이러한 단점을 해결하였다. 이 방법에 의한 결과는 시간상의 큰 장점이 있는 반면에, 긴 시간에 걸쳐 계산된 평균값으로 구해지는 Lyapunov exponent를 사용하기 때문에, 초기에 다소 긴 혼돈현상을 보이다가 일정한 시간이 경과한 후에 주기적인 거동을 하거나, 안정되는 경우, 즉 과도적인 혼돈거동에는 그 정확성을 보장할 수 없다는 단점이 있다. 따라서, 이를 해결하기 위해 무차원 시간을, 과도적인 혼돈이 많이 나타나는 영역인 $\tau_1=300\sim 1000$ 과 전반적으로 안정된 끝개를 가지는 영역인 $\tau_2=1500\sim 3000$ 로 나누어 각각 따로 계산하고, 그 결과로 얻어지는 두 data를 비교하여 운동 안정(stable focus), 주기(periodic & quasi-periodic), 과도혼돈(transient chaos), 혼돈(chaos)의 네가지 현상으로 구분하였다.

Fig. 12(a)는 만족이 없는($z=0$) 익형의 경우로서, 전반적으로 짧은 탄성거리에서는 안정영역이 넓게 존재하였으며, 긴 탄성거리에서는 저속인 경우에는 좁은 안정영역을 보이다가 속도의 증가에 따라 혼돈거동과 다주기 운동이 지배적으로 나타나고 있음을 알 수 있다. 또한 전반적인 영역에 걸쳐 속도와 탄성거리가 증가할 수록 거동의 양상이 매우 복잡하게 변화함을 관찰할 수 있으며, 주기운동과는 뚜렷이 구별되는 3개의 혼돈대(chaotic band)가 존재함을 발견할 수 있다, 이는 분기선도에서 고찰하였던 바와 같이, parameter공간을 구성하는 각 분기선도들이 각각 Feigenbaum수와의 관계를 내포하고 있기 때문인 것으로 사려되지만, 이에 대한 규명은 본 연구에서는 제외하였다.

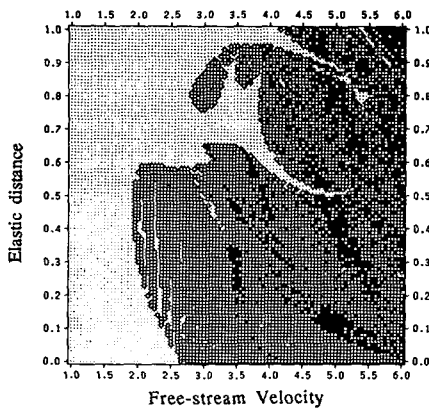
Fig. 12(b)는 $z=0.05$ 의 경우인데, $V=3.0$, $d=0.7$ 부근에서 새로운 혼돈영역이 나타나고 있으며, Fig. 12(a)의 진하고 넓게 나타났던 혼돈대가 Fig. 12(b)에서는 상당히 그 폭이 좁아진 것을 볼 수 있으며, 명확한 혼돈영역이 점차 사라지면서 과



(a) $z=0.0$



(b) $z=0.05$



(c) $z=0.1$

Transient chaos Chaos
 Periodic & Quasi-periodic Stables forcus

Fig. 12 Parameter maps on the elastic distance-free stream velocity plane with variations of zero-lift angle, z

도적인 혼돈과 다주기 거동의 형태로 변환하고 있음을 관찰할 수 있다. 또한, 고속의 긴 탄성거리에서 새로운 혼돈대가 관찰된다.

Fig. 12(c)는 $z=0.1$ 인 경우의 거동인데, 앞의 Fig. 12(a), (b)에서는 거의 변화가 없었던 안정영역이 $d > 0.5$ 에서 확장되어 넓게 나타나고 있으며, 우측 상단의 고속부근에서, 작고 다소 불규칙한 안정영역이 나타남을 관찰할 수 있다.

4. 결 론

비압축성 유동장내 2차원 익형의 혼돈거동에 관한 연구를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 비선형 강성항인 3차강성의 영향으로 인하여 각방향 거동에 유속, 탄성거리, zero-lift각 등의 매개변수의 변화에 혼돈거동이 존재함을 발견하였다.

(2) 수직운동의 변화에 속도값을 추출조건으로 하여 비틀림 운동의 위상평면에 투영한 Poincare' map에서 새로운 형태의 strange attractor의 존재를 확인하였다.

(3) 분기선도를 해석함으로써 혼돈속의 질서를 나타내는 척도로 알려진 Feigenbaum수와 본 연구에서 모델링한 계의 주기배가 현상이 1:2의 정수비율을 가짐을 발견하였다.

(4) Poincare' map을 통하여 짧은 탄성거리의 저속부근영역에서 넓게 존재하는 안정탄성 영역과 긴 탄성거리의 고속부근에서 지배적으로 나타나는 뚜렷한 혼돈영역이 관찰되었다.

(5) 만곡효과가 증가함에 따라 긴 탄성거리의 저속부근에서 안정영역이 넓게 존재하였으며, 긴 탄성거리의 고속부근에서도, 일정한 변형을 한 이후에 안정되는 운동영역이 존재함을 발견하였다.

(6) 두가지 시간척도를 이용한 Lyapunov exponent spectrum을 사용하여, 고려하고자 하는 bifurcation parameter의 전체적인 영역에 걸쳐 혼돈과 비 혼돈거동의 여부를 확인할 수 있는 parameter map을 구성하는 각 bifurcation parameter간의 관계를 규명할 수 있게 하였다.

참고문헌

(1) Scanlan R. H. and Rosenbaum, R., 1951, *Intro-*

- duction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*, The McMillan Company, New York.
- (2) Fung, Y. C., 1955, *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- (3) Bisplinghoff, R. L. Ashley H. and Halfman, R. L., 1955, *Aeroelasticity*, Addison-Wesly Publishing Company, Cambridge.
- (4) Sano M. and Sawada, Y., "Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series," *Physics Review Letter*, Vol. 55, No. 10, pp. 1082~1085.
- (5) Forshing, H. W., 1974, "Fundamental of Aeroelasticity, in German," Springer Verlag, Berlin.
- (6) Dowell, E. H. Curtiss, H. C. Scanlan R. H. and Sisto, F. 1980, *Modern Course in Aeroelasticity*, Sijthoff and Noordhoff.
- (7) Ashely, H., 1982, "The Constructive Uses of Aeroelasticity," *Polish Academy of Science, Engineering Trans.*, Vol. 30, No. 34, pp. 369~396.
- (8) Yang Z. C. and Zhao, L., 1988, "Analysis of Limit Cycle of Flutter of a Airfoil in Incompressible Flow," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 123, pp. 1~13
- (9) Yang Z. C. and Zhao, L., 1990, "Chaotic Motion of an Airfoil with Non-Linear Stiffness in Incompressible Flow," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 138(2), pp. 245~254.
- (10) Katz J. and Plotkin, A., 1991, *Low Speed Aerodynamics 2nd ed.* McGraw-Hill, Inc., pp. 104~152.
- (11) Rovert, D. B., 1990, *Flow Induced Vibration, 2nd ed.* Van Nostrand Reinhold, New York. pp. 141~142.
- (12) Dowell, E. H., 1986, *Unsteady Transonic Aerodynamics and Aeroelasticity in Recent Advances in Aerodynamics and Aeroacoustics*, Springer Verlag, New York.
- (13) Kubicek M. and Marek, M., 1983, *Computational Method in Bifurcation Theory and Dissipative Structures*, Springer Verlag.
- (14) Moon, F. C., 1987, *Chaotic Vibration-An Intriduction for Applied Scinencists and Engineers*, John Wiley and Sons.
- (15) Wiggings, S., 1988, *Global Bifurcation and Chaos*, Springer Verlag, New York.
- (16) Gukenheimer J. and Holmes, P., 1983, *Non-linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Verlags.
- (17) Dowell E. H. and Ilgamov, M., 1988, *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*, Springer Verlag, New York.
- (18) Dowell, E. H., 1990, "Flutter of a Buckled Plate as an Example of Chaotic Motion of a Deterministic Autonomous System," *J. of Sound and Vibration*, pp. 289~328.
- (19) 정성원, 이동기, 이상환, 김광식, "비압축성 유동장에서 비선형 강성과 감쇠를 가지는 항공기 날개의 혼돈거동에 관한 연구," 1991년 소음진동 공학회 추계학술대회.
- (20) 정성원, 이동기, 이상환, 김광식, "매개변수의 변화에 따른 항공기 날개의 비선형 플러터 현상," 1992년 대한기계학회 춘계학술대회.