

〈論 文〉

순차적 다항식 근사화를 적용한 효율적 선탐색기법의 개발

김민수* · 최동훈**

(1994년 8월 10일 접수)

Development of an Efficient Line Search Method by Using the Sequential Polynomial Approximation

Min-Soo Kim and Dong-Hoon Choi

Key Words: Polynomial Approximation(다항식 근사화), Line Search(선탐색), Optimization(최적화)

Abstract

For the line search of a multi-variable optimization, an efficient algorithm is presented. The algorithm sequentially employs several polynomial approximations such as 2-point quadratic interpolation, 3-point cubic interpolation/extrapolation and 4-point cubic interpolation/extrapolation. The order of polynomial function is automatically increased for improving the accuracy of approximation. The method of approximation (interpolation or extrapolation) is automatically switched by checking the slope information of the sample points. Also, for selecting the initial step length along the descent vector, a new approach is presented. The performance of the proposed method is examined by solving typical test problems such as mathematical problems, mechanical design problems and dynamic response problems.

1. 서 론

기구 및 기계 구조물의 설계 요구 조건이 까다롭고 복잡해짐에 따라, 이에 부합하는 새로운 설계방법이 필요하게 되었다. 이 새로운 방법중에서, 컴퓨터와 해석 기법의 발달에 힘입어 최근에 가장 널리 이용되는 것이 비선형 최적화 기법이다. 비선형 최적화 알고리즘은 감소벡터를 결정하는 방법과 구속조건을 처리하는 방법에 따라 다양한 알고리즘⁽¹⁾이 존재한다. 이 알고리즘들은 거의 공통적으로 감소벡터 방향을 따라 감소함수(descent function)가 최소가 되는 스텝을 정하는 선탐색을 해야만 안정된 수렴성이 보장된다. 따라서, 비선형 최적화 알고리즘의 효율성과 수렴성은 선탐색의 정확도와 효

율성에 많은 영향을 받는다. 그러나, 정확한 선탐색은 많은 함수계산을 필요로 하기 때문에, 계산 시간이 많이 소요되는 공학 분야의 최적설계에 이를 적용하기는 부적합하였다. 따라서, 선탐색의 정확도와 효율성의 상반성을 해결하기 위한 연구가 수학적 알고리즘 분야와 공학적 응용 분야에서 시도되었다.

알고리즘 분야에서는, 부정확한 선탐색(inaccurate line search)을 행하는 연구^(2,3)가 진행되어 왔다. 이들 부정확한 선탐색 방법들(Armijo's rule, Goldstein test, Wolfe-Powell test 등)은 비선형성이 큰 문제 및 최적화의 실용성에서 문제점을 야기시켰다. 즉, 비선형성이 큰 문제에서는, 부정확한 선탐색으로 인하여 $k-1$ 번째와 k 번째 감소벡터간의 정규 직교성(orthonormality)이 유지되지 못하여 감소벡터를 결정하는 알고리즘의 안정성이 떨어졌다. 그로 인하여, 도함수(설계 민감도)와 함수계산

*정회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

**정회원, 한양대학교 기계설계학과

(해석) 횡수가 오히려 증가하거나 수렴에 실패하기도 하였다. 실용성 측면에서 보면, 부정확한 선탐색 중 성능이 가장 우수한 것으로 알려진 Wolfe-Powell test⁽³⁾는 도함수 정보를 요구하기 때문에 도함수(설계 민감도) 해석시간이 많이 소요되는 공학 분야에 적용하기는 곤란하였다.

공학 분야에서는, 원래의 목적함수 및 구속조건 함수를 설계변수에 대한 선형 또는 볼록형(convex)의 명시적 함수(explicit function)로 근사^(4~6)시킨 후, 이를 기존의 최적화 알고리즘으로 해결하는 근사화기법(approximation technique)이 활발히 연구되고 있다. 하지만, 이들 근사화 기법은 상대적으로 함수 형태가 단순한 구조 최적화 분야에서는 많은 연구가 진행되었지만, min-max형 목적함수와 시간 종속적인 구속조건이 있는 동적 반응 최적화(dynamic response optimization) 및 기구(mechanism)의 형상 최적화(configuration optimization) 등에 근사화기법을 적용한 사례는 드물다. 이는 min-max형 동적 반응 문제와 기구 설계 문제는 목적함수와 구속조건을 설계변수의 명시적 함수로 근사화하기가 힘들었기 때문으로 본다. 그래서, 현재까지 이 분야는 정확한 선탐색을 동반하는 알고리즘을 이용하여 최적설계를 수행하는 것이 대부분이다. 따라서, 시간종속적 구속조건을 갖는 동적 반응 최적화 및 비선형성이 큰 기구 최적화 등을 효과적으로 해결하려면 효율성 및 수렴성이 우수한 새로운 선탐색 기법이 절대적으로 요구된다.

본 연구에서는, 구속조건이 없는 비선형 최적화 알고리즘 뿐만 아니라 구속조건이 있는 비선형 최적화 알고리즘에도 적용할 수 있는, 수렴성 및 효율성이 우수한 선탐색 방법을 제안한다. 본 연구에서 제안하는 선탐색 방법은 2점을 이용한 2차 함수 근사화, 3점을 이용한 3차 함수 근사화 및 4점을 이용한 3차 함수 근사화 기법을 상황에 맞추어 순차적으로 적용한다. 또한 설계변수 상/하한치 제한 조건은 부등식 조건에서 분리하여 선탐색 단계에서 직접 처리하는 방법 및 선탐색의 효율에 많은 영향을 끼치는 초기스텝 선정에 대한 새로운 방법도 제시한다.

2. 순차적 다항식 근사화기법

기존의 정확한 선탐색 방법으로는 개략적 구간을 정하고 황금 분할법을 적용하여 선탐색 구간을 줄

이고 이에 다시 4점을 이용한 3차 함수 근사화 기법을 적용하는 방법⁽¹⁾이나, 적절한 구간을 결정하고 3차 함수로 근사화하거나 반복적인 2차 함수로 근사화하는 방법^(2,3) 등이 있었다.

본 연구에서 제안하는 순차적 다항식 근사화 알고리즘이 기존의 선탐색 방법과 다른 점은, 2점을 이용한 2차함수 근사화, 3점을 이용한 3차함수 근사화 및 4점을 이용한 3차함수 근사화 기법을, 선탐색의 진행 상황(감소함수의 기울기, 근사화 오차 등)에 맞추어 자동적으로 변경한다는 점이다. 즉, 감소함수의 기울기에 따라 근사화 방법(내삽법 또는 외삽법)을 선정하고, 근사화의 정확도를 평가하여 수렴여부 및 근사함수의 차수 변경을 판정한다.

순차적 다항식 근사화 알고리즘은 초기시스템에서 계산한 함수값, F^4 가 현재의 함수값, F^0 보다 큰 경우와 초기시스템의 함수값 F^4 가 F^0 보다 적은 경우에 대하여 알고리즘의 진행 방법이 달라진다. 이를 도식적으로 표현한 것이 Fig. 1과 Fig. 2이다. 그림에서 α 는 선탐색의 스텝이고, F 는 그에 상응하는 감소함수 값이며, \sim 는 근사화로 구한 값을 의미한다.

초기시스템(α^0)의 함수값 F^4 가 현재 함수값인 F^0 보다 큰 경우인 Fig. 1은, 적절한 구역이 정해진 것으로 간주하고 다음 단계인 2점(α^0, α^1)의 함수값(F^0, F^1)과 1점(α^0)의 도함수를 이용한 2차 함수 내삽법으로 최소치를 구한다. 이때, 내삽법에서 구한 최소치(\tilde{F}^1)와 실제 함수값(F^1)이 거의 차이가 없으면서 F^1 이 F^0 보다 작으면, 최적 스텝이 구해진 것으로 한다. 2점을 이용한 2차 함수 내삽법에서 구한 F^1 이 F^0 보다 크거나 수렴조건이 만족되지 않았다면, 3점($\alpha^0, \alpha^1, \alpha^1$)의 함수값(F^0, F^1, F^1)과 1점(α^0)의 도함수를 이용하여 3차 함수 내삽법을 적용한다. 3차 함수 내삽법에서 구한 최적해(F^2)에 대하여, 2차 함수 내삽법과 동일한 수렴조건을 점검한다. 이때 수렴조건이 만족하지 않으면, 4점($\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^1$)을 이용한 3차함수 내삽법을 적용한다. 4점을 이용한 3차 함수 내삽법에서 4점의 형태가 " $F^0 > F^1 > F^2 < F^1$ "이면, 내삽법으로 구한 스텝 α^3 이 α^2 보다 클때 만 함수값 F^3 을 계산하고 4점의 형태가 " $F^0 > F^1 < F^2 < F^1$ "이면 항상 F^3 을 계산한다. 이는 감소함수의 비선형성에 따른 근사화 오차를 보정하기 위한 실험적 방법이다. 정확한 선탐색이 요구된다면, α^3 에서 근사치(\tilde{F}^3)와 실제치(F^3)가 거의 유사할 때, 5점($\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^1$)중 함수값이

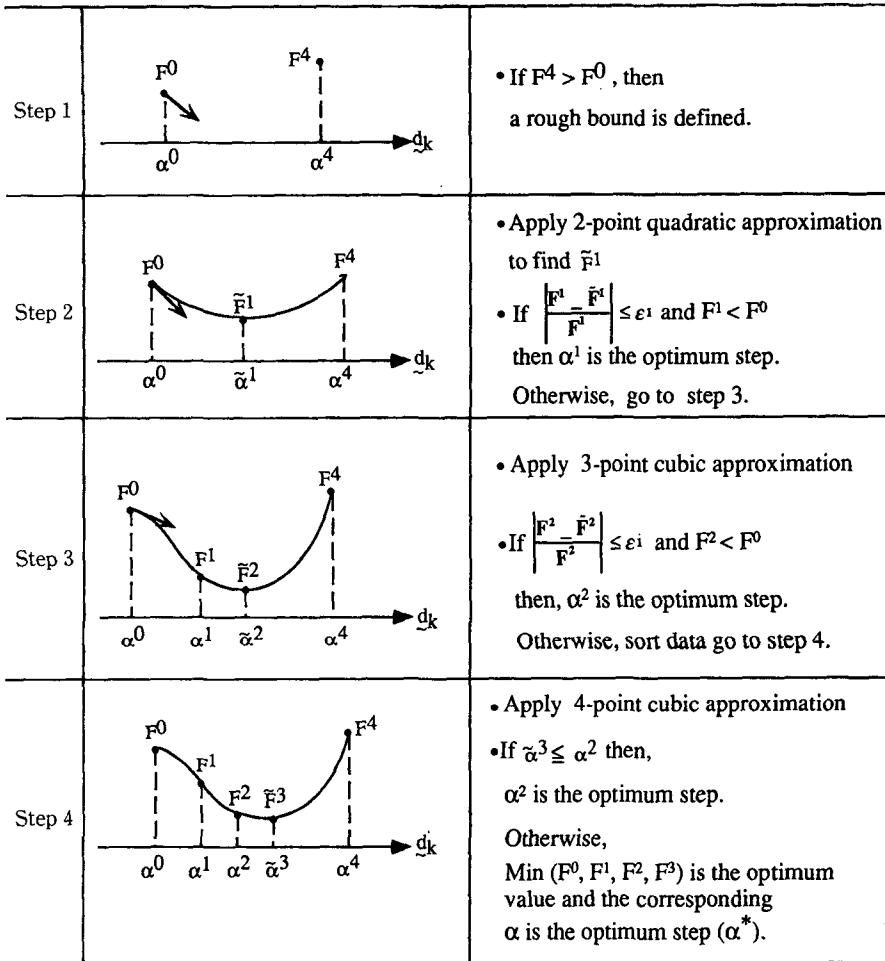


Fig. 1 Line search in case that the rough bound is defined at the initial step

최소인 점에서 가장 멀리 떨어져 있는 한점을 제외한 새로운 4점을 선택하여 3차 함수 내삽법을 한번 더 적용한다.

초기스텝의 함수값, F^4 가 F^0 보다 작은 경우인 Fig. 2는 F^4 를 F^1 에 대입하고 새로운 α^4 를 $|\alpha^1 - \alpha^0|$ 의 1.618배로 늘려서 F^4 를 계산한다.⁽¹⁾ 새로운 F^4 가 F^1 보다 크다면, 앞에서 언급한 Fig. 1의 3점($\alpha^0, \alpha^1, \alpha^4$)과 1점(α^0)의 도함수를 이용하는 3차 함수 내삽법 단계로 간다. F^4 가 F^1 보다 작지만, F^4 와 F^1 사이의 기울기가 F^1 과 F^0 사이의 기울기 보다 작다면, 3점($\alpha^0, \alpha^1, \alpha^4$)을 이용한 외삽법을 적용한다. 그렇지 않으면, F^4 를 F^2 로 하고 스텝을 늘려서 새로운 F^4 를 계산한다. 새로운 F^4 가 F^2 보다 크다면, 4점($\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^4$)을 이용하는 3차 함수 내삽법을 적용한다. 그렇지 않은 경우는, 이들의 기울기

를 검사하여 4점($\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^4$)을 이용한 3차 함수 외삽법을 적용하거나 스텝을 다시 늘린다.

3. 초기스텝 결정

일반적으로 선탐색의 초기스텝 결정은 선탐색의 효율과 수렴성에 큰 영향을 끼친다. 따라서, 본 연구에서는 전체 알고리즘의 수렴 정도와 문제의 비선형성에 가변적으로 대응할 수 있는 새로운 초기스텝 선정 방법을 제시한다. 최적화의 첫번째 초기스텝은 현재의 감소방향을 따라 목적함수가 50% 감소될 정도로 선택하되, 감소 함수의 도함수와 감소벡터의 정규(norm)보다는 적게한다. 또한 감소 방향을 결정하는 빈도수가 증가함에 따라, 초기 설정치는 점점 최적해에 접근해 간다. 따라서, 초기

<p>Step 1</p>		<ul style="list-style-type: none"> • If $F^4 \leq F^0$, then increase the step length • $F^1 \leftarrow F^4$ and $\alpha^1 \leftarrow \alpha^4$ • Increase the step length • new $\alpha^4 = \alpha^0 + 1.61803(\alpha^1 - \alpha^0)$
<p>Step 2</p>	<p>Case-1</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Apply the 3-point cubic interpolation (go to step 3 in Fig. 1)
<p>Step 2</p>	<p>Case-2</p>	<ul style="list-style-type: none"> • If $\theta_1 > \theta_2$ then, $F^2 \leftarrow F^4$ and $\alpha^2 \leftarrow \alpha^4$ go to step 3 • If $\theta_1 \leq \theta_2$ then, $F^2 \leftarrow F^4$ and $\alpha^2 \leftarrow \alpha^4$ • increase step length • If $F^4 > F^2$ or $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ then, go to step 4
<p>Step 3</p>		<ul style="list-style-type: none"> • $F^2 \leftarrow F^4$ and $\alpha^2 \leftarrow \alpha^4$ • Apply the 3-point cubic extrapolation • If $F^4 > F^2$, then go to step 4 • If $F^4 \leq F^2$, then converged.
<p>Step 4</p>		<ul style="list-style-type: none"> • Apply the 4-point cubic interpolation • If $\alpha^3 \leq \alpha^2$ then, α^2 is the optimum step. Otherwise, $\text{Min}(F^0, F^1, F^2, F^3)$ is the optimum value and the corresponding α is the optimum step (α^*).

Fig. 2 Line search in case that the rough bound is not defined at the initial step

스텝이 너무 크면 선탐색이 수렴할 때까지 함수 계산을 많이 할 수 있기 때문에, 선탐색의 초기스텝 크기를 감소벡터 방향을 결정한 누적 횟수로 나눔으로써 점점 줄여간다. 그러나, 알고리즘이 진행되면서 초기스텝이 점점 작아지지만 하면, Fig. 3과 같이 해 근처가 상대적으로 평탄한 문제 또는 비선형성이 큰 문제에서는 함수 계산 횟수가 오히려 증가할 수도 있다. 따라서, 이를 보완하기 위하여 누적된 선탐색의 초기스텝과 최적스텝의 비를 평균하여, 이를 앞에서 결정한 k번째 초기스텝에 곱한다. 초기스텝을 결정하는 알고리즘은 Table 1에

요약한다.

Table 1에서, 하부첨자 k 는 감소방향 벡터를 결

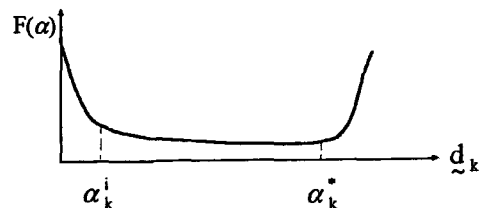


Fig. 3 Geometric interpretation of a flat descent function

Table 1 Pseudo code for the selection of an initial step length

Step 0	Determine and normalize the descent direction, \vec{d}_k^*
Step 1	If $[a_{k-1}^*]$ Then, $a_k^* = \epsilon$ Go to Step 4
Step 2	$\alpha_i = \text{minimum of } \left\{ \frac{1}{k} \left(\frac{0.5 \cdot dF^0}{F^0} \right), \ \nabla F\ , \ \vec{d}_k\ \right\}$
Step 3	$\alpha_k^* = \text{maximum of } \left\{ \alpha_i, \frac{\sum_{j=1}^{k-1} (\alpha_j^*)}{k-1}, \epsilon \right\}$
Step 4	Perform line search

정한 회수이고, 상부첨자 0은 선탐색의 초기스텝을, 상부첨자 *는 선탐색의 최적스텝을 의미한다. F^0 는 선탐색의 초기스텝에서 감소함수값이고 dF^0 는 선탐색의 초기에서 감소함수의 구배를 감소벡터의 방향에 투영한 것($\nabla F \cdot \vec{d}_k^*$)이다. 또한 ϵ 은 선탐색이 결정하는 최소 스텝의 한계치인데, 1×10^{-5} 로 선정하였다. 단, 최소 스텝의 한계치는 감소 벡터는 크기를 단위화(normalization) 하였을 때를 기준으로 정하였다.

4. 설계변수 상/하한치의 직접처리 방법

일반적인 최적화 알고리즘에서는 설계변수의 상/하한치(side constraints)를 부등식 구속조건으로 취급한다. 따라서, 설계변수의 갯수가 많은 구조물 최적화 등에서는 $2N$ 개의 부등식 구속조건이 부가적으로 생기게 된다. 또한, 최적해가 설계변수의 상/하한치에 근접(active)하게 되면, 이들 상/하한치 조건들로 인하여 해근처에서 지그재그(zigzag) 현상이 많이 발생한다. 따라서, 본 연구에서는 이들 상/하한치를 부등식 구속조건과 분리하여 선탐색 단계에서 직접 처리함으로써 알고리즘의 효율을 향상 시키고자 한다.⁽⁷⁾ 이를 위하여 감소벡터의 방향 수정 방법과 선탐색의 스텝을 제한하는 방법을 제안한다.

감소벡터의 방향 수정 방법은, 설계변수가 그들의 상한치 또는 하한치에 거의 근접하였을 때(상대적인 차이가 1×10^{-4} 보다 적을 때) 감소벡터가 이들 상/하한치가 계속 위배되는 방향으로 정해지면, 그에 상응하는 설계변수는 그들의 상/하한치로 정하고 감소벡터 성분은 0으로 한다. 이를 도식적으로 표현하면 Fig. 4와 같다. Fig. 4에서 (a)는 $k+1$ 번째 감소벡터의 방향이 상/하한치 제한 조건에서

멀어지므로 수정할 필요가 없지만, (b)는 상/하한치 제한 조건을 계속 위배하려고 하므로 방향을 수정할 필요가 있다. 감소벡터의 방향 수정은 상/하한치를 계속 위배하려는 방향을 0으로 치환한다. Fig. 4의 (b)에서 \vec{d}_{k+1} 는 수정된 감소벡터의 방향이다.

선탐색의 스텝 제한은, 감소방향 벡터를 따라서 설계변수의 상/하한치를 고려하여 최대 허용 스텝을 다음의 Table 2와 같이 제안한다. 설계변수의 상/하한치 구속조건이 모두 존재하는 최적화 문제는 Table 2에서 설정하는 최대 허용 스텝(a_{max})을

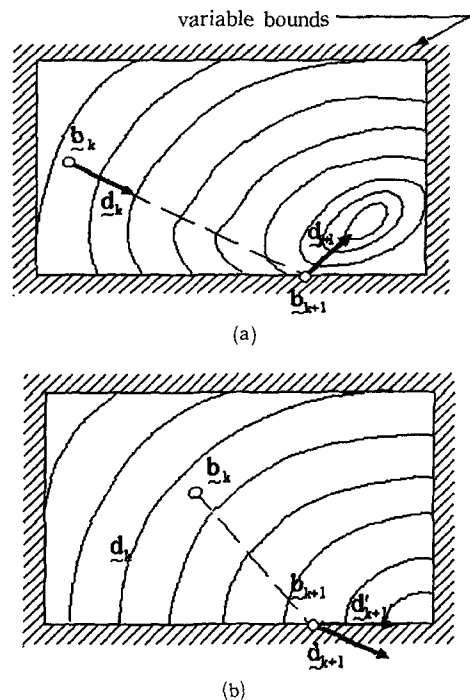


Fig. 4 Modification of the descent direction vector

Table 2 Limitation of the maximum step length for line search

Step 1	IF $d_k(i) > 0$ Then, $\alpha_{max} = \text{Minimum of } \left\{ \frac{(X(i) - X_{max}(i))}{d_k(i)} \right\}, i=1, \dots, N$
Step 2	IF $d_k(i) > 0$ Then, $\alpha_{min} = \text{Minimum of } \left\{ \frac{(X_{min}(i) - X(i))}{d_k(i)} \right\}, i=1, \dots, N$
Step 3	$\alpha_{max} = \text{Minimum of } \{ \alpha_{max}, \alpha_{min} \}$

선택색의 초기스텝으로 정할 수 있다. 하지만, 비선형성이 큰 문제 또는 최적해가 상/하한치에 근접되지 않는 문제 등에서는 구속조건의 위반(violation)이 매우 커져서 수렴을 더욱 힘들게 하거나, 오히려 함수 계산량의 증가시키거나 수렴속도에 나쁜 영향을 끼치기도 한다. 따라서, 본 연구에서는 Table 2에서 설정하는 최대 허용 스텝을 선택색의 스텝 제한으로만 이용한다. 하지만, α_{max} 가 1×10^{-4} 보다 작거나 같으면서, 그에 상응하는 감소함수 $F^{\alpha_{max}}$ 가 선택색이 시작되는 초기상태인 F^0 보다 작으면 선택색은 수행하지 않고 α_{max} 를 최적스텝으로 한다.

5. 예제를 통한 검증

최적화 알고리즘 및 프로그램의 성능 평가를 위하여 많이 이용되는 예제들을 통하여 순차적 다항식 근사화 기법의 효율 및 수렴성을 검증하려고 한다. 검증을 위한 예제들이 구속조건이 있는 비선형 형태이므로, 이를 해결하기 위하여 Integrated Design Optimization Library(IDOL) 2.0⁽⁸⁾을 이용하였다. IDOL 2.0은 비선형 최적화 문제를 풀 수 있는 프로그램인데, 구속조건이 있는 최적화를 위한 알고리즘은 augmented Lagrange multiplier (ALM)방법⁽¹⁾과 sequential Convex-Linearization 방법⁽⁷⁾을, 구속조건이 없는 최적화를 위한 알고리즘은 Quasi-Newton방법^(1~3)과 Conjugate Gradient 방법^(1~3)을 이용한다.

알고리즘의 성능 비교를 위하여, 순차적 다항식 근사화(SPA) 기법을 IDOL 2.0의 선택색 모듈로 추가하고, 이를 기존의 선택색방법인 황금분할 기법을 동반한 3차함수 근사화 선택색방법^(1,9)과 효율 및 수렴성을 비교한다. 구속조건이 있는 비선형 예제를 풀기위한 알고리즘으로 ALM방법과 Quasi-

Newton 알고리즘인 BFGS방법을 기본으로 하였다.

성능 평가를 위한 예제는 수학적인 문제, 기계설계 문제 및 설계시간 구간내에서 최대 과도 응답을 최소화하는 min-max형 동적반응 최적화 문제로 선정하였다. 수학적 것으로는 국부적인 최적해가 많은 Rosen-Suzuki문제⁽¹⁰⁾를, 기계설계는 비선형성이 매우 큰 것으로 알려진 용접보의 치수 설계⁽¹¹⁾, 인장/압축 스프링 설계⁽¹²⁾ 및 기어감속기 설계⁽¹³⁾를 선정하였다. 또한, 동적 반응 최적화 문제는 1 자유도 비선형 완충기 시스템의 설계⁽¹⁴⁾, 2 자유도 선형 진동결연기 시스템의 설계⁽¹⁴⁾ 및 5 자유도 차량 모델의 현가장치 설계⁽¹⁴⁾를 선정하였다.

수학적인 문제와 기계설계는 IBM-PC 486 호환 기종에서, 동적반응 최적화는 IBM RISC System/6000 Power Station 320H에서 수행하였다. 수행 결과는 Table 3과 5에 요약, 정리하였으며, Table에서 B와 F^* 는 설계변수와 목적함수의 최적치이고 NG와 NF는 수렴하기까지 누적된 도함수(설계민감도) 및 함수(해석) 계산 ghl수이다. 수학 및 기계설계 문제의 설계민감도 해석은 전방 차분법(forward difference method)를 적용하였고 동적반응 최적화는 보조변수(adjoint variable)을 이용하는 해석적인 방법⁽¹⁵⁾으로 계산하였다. 또한, 동적 반응 최적화의 min-max형 목적함수는 인위변수를 도입하여 구속조건으로 치환하던 기존의 방법을 적용하지 않고 목적함수로 직접 처리하는 방법을 적용하였다.^(15,16)

5.1 수학적 문제

식(1)~(4)의 Rosen-Suzuki 문제는 국부 최적해가 많은 문제로, 설계변수에 대한 상/하한치 제한 조건은 없고 설계변수는 4개, 비선형 부등식 구속 조건은 3개 이다. 초기점을 (0, 0, 0, 0)으로 할 때 최적해는 (0, 1, 2, -1)로 알려져 있다. 식(1)

Table 3 Comparison of the performance of the two line search methods

	Rosen-Suzuki		Welded beam		Coil spring		Gear reducer	
	Previous	Proposed	Previous	Proposed	Previous	Proposed	Previous	Proposed
b ₁	-0.000	0.000	0.2439	0.2443	11.289	11.249	3.500	3.500
b ₂	1.001	1.001	6.2312	6.2169	0.357	0.357	0.700	0.700
b ₃	2.000	1.999	8.2936	8.2924	0.0517	0.0517	17.000	17.000
b ₄	-0.998	-1.000	0.2443	0.2443			7.300	7.300
b ₅							7.727	7.725
b ₆							3.353	3.351
b ₇							5.287	5.296
F*	56.000	56.000	2.3824	2.3809	0.01268	0.01268	2996.05	3001.04
NG	14	17	24	25	24	24	15	29
NF	97	47	193	79	191	79	110	70

previous: 4-point cubic approximation with a golden section refinement
 proposed: Sequential polynomial approximation

Table 4 Comparison of the efficiency of the side constraints treatment

	Conventional	Proposed
b ₁	3.499	3.500
b ₂	0.699	0.700
b ₃	16.998	17.000
b ₄	7.461	7.300
b ₅	7.714	7.725
b ₆	3.350	3.351
b ₇	5.288	5.296
F*	2995.6	3001.04
NG	73	29
NF	204	70

은 목적함수, 식(2)부터 (4)는 부등식 구속조건이며, *b*는 설계변수이다.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize :} \\
 &f(b) = b_1^2 + b_2^2 + 2b_3^2 + b_4^2 - 5b_1 - 5b_2 \\
 &\quad - 21b_3 + 7b_4 + 100 \quad (1) \\
 &\text{subject to :} \\
 &G_1(b) = 0.125(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_1
 \end{aligned}$$

$$-b_2 + b_3 - b_4) - 1.0 \leq 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 G_2(b) &= 0.1(b_1^2 + 2b_2^2 + b_3^2 + 2b_4^2 \\
 &\quad - b_1 - b_4) - 1.0 \leq 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_3(b) &= 0.2(2b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_1 \\
 &\quad - b_2 - b_4) - 1.0 \leq 0 \quad (4)
 \end{aligned}$$

5.2 기계설계 문제

5.2.1 용접보

용접보의 치수설계는 재료비용을 최소화하는 것이 목적이며, 구속조건은 용접응력, 보의 굽힘응력, 좌굴 및 처짐 등이며 설계변수의 상/하한치 제한이 있다. 설계변수는 Fig. 5에 도시한 용접 사이즈(*b*₁), 용접길이(*b*₂), 보의 폭(*b*₃) 및 높이(*b*₄)이다. 초기설계치는 (1, 7, 4, 2)이다. 참고문헌 (12)에 따르면, 최적해는 (0.2444, 6.2187, 8.2915, 0.2444)이며 목적함수는 2.3811이다.

5.2.2 인장/압축 스프링

인장/압축 스프링설계는 스프링의 중량을 최소화하는 것이 목적이며, 처짐량, 전단응력, 서지 진동수(surge frequency) 및 코일 직경에 대한 기하학적인 구속조건과 설계변수의 상/하한치 제한 조건이 있다. 설계변수는 Fig. 6에 도시한 스프링의 감

Table 5 Comparison of the performances of the two line search methods for dynamic response problems

	Impact absorber		Dynamic absorber		Vehicle model	
	Previous	Proposed	Previous	Proposed	Previous	Proposed
b_1	0.5961	0.5978	1.3276	1.3491	50.00	50.00
b_2	0.5984	0.5975	0.0306	0.0198	200.02	200.03
b_3					280.69	279.73
b_4					48.86	47.87
b_5					77.04	77.11
b_6					80.00	80.00
b_7						
F^*	0.5984	0.5976	2.35618	2.3679	255.25	255.28
NG	23	32	27	12	24	24
NF	167	136	153	38	131	72

Previous: 4-point cubic approximation with a golden section refinement

Proposed: Sequential polynomial approximation

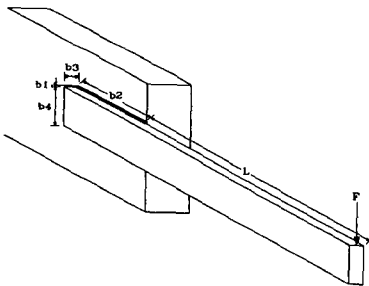


Fig. 5 Welded beam design

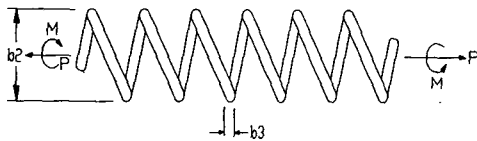


Fig. 6 Tension/Compression spring design

긴 회수(b_1), 코일의 직경(b_2) 및 와이어의 직경(b_3)이다. 이들의 초기치는 (3, 2, 1)로 하였다.

5.2.3 기어감속기

기어감속기 설계는 감속장치의 중량을 최소화하는 것이 목적이며, 기어의 굽힘 및 접촉 응력, 축의 횡방향 처짐 및 응력, 공간적 제약과 경험에 의하여 설정된 기하학적인 구속조건 및 설계변수 상/

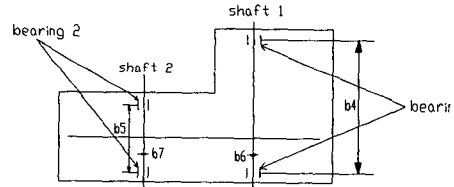


Fig. 7 Gear reducer system design

하한치에 대한 제한조건이 있다. 설계변수는 기어의 치폭(b_1), 모듈(b_2), 피니언의 잇수(b_3)와 Fig. 7에 도시한 베어링 1 사잇거리(b_4), 베어링 2 사잇거리(b_5), 축 1의 직경(b_6)과 축 2의 직경(b_7)이고, 초기설계치는 (2.6, 0.7, 17, 7.3, 7.3, 2.9, 5)이다.

기어감속기 설계의 최적해는 설계변수의 상/하한치에 매우 근접(active)되는 문제인데, 설계변수의 상/하한치를 선탐색에서 직접처리하는 본 연구의 방법과 기존의 부등식 구속조건으로 처리하던 방법과 비교해 보았다. 이들을 요약, 정리한 Table 4에서 보면 직접처리하는 방법이 도함수 계산 횟수는 약 60%, 함수 계산회수는 약 66%를 절감한 것을 알 수 있다. Table 4에서 conventional은 설계변수 상/하한치를 부등식 구속조건으로 처리한 것이고, proposed는 상/하한치를 부등식과 분리하여 직접 처리한 방법을 의미한다.

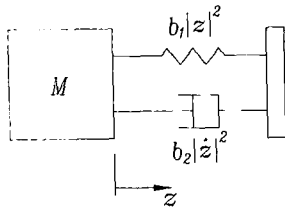


Fig. 8 Single degree of freedom nonlinear impact absorber

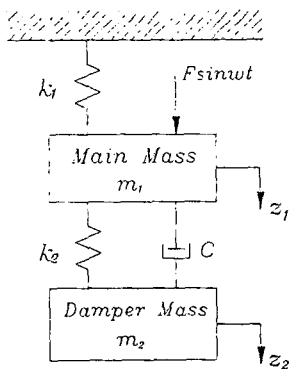


Fig. 9 Two degree of freedom dynamic absorber

5.3 Min-max형 동적 반응 최적화 문제

5.3.1 1 자유도 비선형 완충기 시스템

1자유도 비선형 완충기 시스템의 최적설계는 Fig. 8의 시스템이 $t=0$ 일 때 v_0 의 초기속도로 고정된 벽에 부딪힐 때, 시스템의 질량 M 에 발생하는 가속도의 최대치를 최소화할 수 있도록 스프링 계수(b_1) 및 감쇠계수(b_2)를 결정하는 문제이다. 시간에 종속된 구속조건으로는 시스템 과도 응답의 절대치가 정해진 허용치보다 적어야 한다는 것이다. 총 설계시간은 12초이고, 과도 응답 해석을 위하여 분할한 시간격자(time grids)수는 1200이다. 초기 설계치는 (0.5, 0.5)이다.

5.3.2 2자유도 선형 진동 절연기 시스템

2자유도 선형 진동절연기 시스템의 설계는 Fig. 9의 시스템에 정해진 주파수를 갖는 가진력이 가해질 때, 주질량(main mass)의 과도 응답중 최대치를 최소화하는 문제이다. 고려하는 구속조건으로는 시간에 종속된 상태변수(state variable)에 관한 것과 정상상태(steady-state)에 대한 것이 있고 설계변

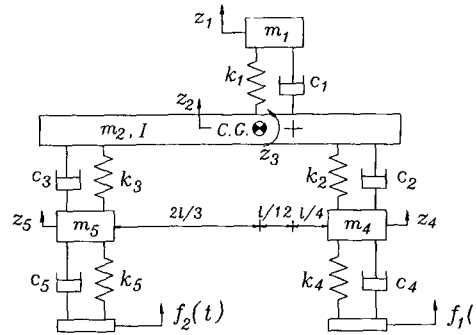


Fig. 10 Five degree of freedom vehicle model

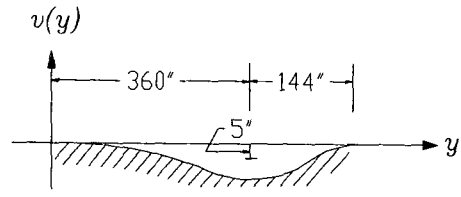


Fig. 11 Road surface profile

수에 대한 상/하한치 제한이 있다. 총 설계시간은 2초이며 해석을 위한 시간 격자수는 1000으로 하였고, 초기 설계치는 (1.6, 0.02)이다.

5.3.3 5자유도 차량 시스템

5자유도 차량모델 현가장치의 최적설계는 Fig. 10의 차량모델이 Fig. 11과 같은 요철이 있는 노면 (road surface profile)을 450 in/sec의 속도로 통과할 때, 운전석 가속도의 최대치가 최소가 되도록 스프링상수(k_1, k_2, k_3)와 감쇠계수(c_1, c_2, c_3)를 설계하는 문제이다. 구속조건으로는 시간에 종속된 5개의 상태변수에 대한 것과 설계변수의 상/하한치 제한이 있다. 총 설계시간은 2.5초이고 해석을 위한 시간 격자수는 1000으로 하였다. 초기 설계치는 (100, 300, 300, 10, 25, 25)이다.

6. 결론

비선형 최적화 문제의 대표적인 예제들을 통하여, 본 연구에서 제안한 순차적 다항식 근사화 선탐색 기법이 기존의 선탐색 방법에 비하여 효율성 및 수렴성이 우수함을 보였다. 본 연구의 결과를 요약, 정리하면 다음과 같다.

(1) 비선형 최적화 알고리즘의 효율향상을 위하여 다항식 근사화 기법을 도입한 새로운 선탐색 알

고리즘을 제시하였다.

(2) 제시한 선탐색 알고리즘은 감소방향 벡터에서 평균 3.5회 미만의 효율적인 함수 계산 만으로도 정확한 최적해를 구할 수 있었다.

(3) 순차적 다항식 근사화기법 뿐만 아니라, 일반적인 선탐색기법에도 적용이 가능한 선탐색 초기 시스템을 설정하는 체계적인 방법을 정립하였다.

(4) 설계변수의 상/하한치를 부등식 구속조건에서 분리하여 선탐색에서 직접처리하였고, 이 방법은 최적 설계치가 설계변수의 상/하한치에 근접(active)한 때에 우수한 효율성을 보였다.

본 연구에서 제안하는 순차적 다항식 근사화 선탐색기법은, 비선형 최적화를 위한 변환기법(transformation method) 알고리즘인 ALM방법 및 벌칙함수(penalty function) 방법뿐만 아니라, 직접기법(primal method)인 feasible direction 방법과 반복 2차계획법(sequential quadratic programming) 등에도 효과적일 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 국방과학 연구소의 기초 연구비 지원(과제 번호 : ADD-90-5-09) 및 한국과학재단 지원터보·동력기계연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Vanderplaats, G. N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill.
- (2) Luenberger, D. G., 1984, *Linear and Non-linear Programming*, Addison-Wesley.
- (3) Fletcher, R., 1897, *Practical Methods of Optimization*, Second Edition, John Wiley & Sons.
- (4) Schmit, L. A. and Miura, H., 1976, "A New Structural Analysis/Synthesis Capability-ACCESS 1," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 5 pp. 661~671.
- (5) Fleury, C., 1979, "Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, pp. 1761~1783.
- (6) Haftka, R. T., 1988, "First-and Second-Order Constraint Approximations in Structural Optimization," *Comp. Mech.*, Vol. 3, pp. 89~104.
- (7) Fleury, C., 1982, "Introductuin to Mathematical Programming Methods," *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach*, Edited by A. J. Morris.
- (8) Kim, M. S. and Choi, D. H., 1993, "IDOL Version 2.0 User's Guide," Technical Report No. AMOD-93-01, Applied Mechanics & Optimal Design Lab., Dept. of Mechanical Design and Production Engineering, Hanyang University.
- (9) 김민수, 김한성, 이재원, 최동훈, 1991, "구속조건이 있는 비선형 최적화문제를 위한 ALM방법의 성능향상," *대한기계학회논문집*, 제15권, 제2호, pp. 544~556.
- (10) Rosen, J. B. and Suzuki, S., 1965, "Construction of Nonlinear Programming Test Problems," *Communication of Association for Computing Machinery*, Vol. 8, pp. 113.
- (11) Reklaitis, G. V., Ravindren, A. and Ragsdell, K. M., 1983, *Engineering Optimization Method and Application*, John Wiley & Sons.
- (12) Belegundu, A. S. and Arora, J. S., 1985, "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization Part I, II," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1583~1623.
- (13) Azam and Li, W. C., 1989, "Multi-Level Design Optimization Using Global Monotonicity Analysis," *ASME*, Vol. 111, pp. 259~263.
- (14) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons.
- (15) Choi, D. H., Park, H. S. & Kim, M. S., 1993, "A Direct Treatment of Min-Max Dynamic Response Optimization Problems," *AIAA-93-1352-CP, 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Lajolla, CA, USA.
- (16) Choi, D. H., Kim, M. S. & Ahn, S. J., 1993, "A Study on Computational Enhancement for Min-Max Dynamic Response Optimization Problems," *Computational Engineering*, Edited by Kwak, B. M. & Tanaka, M., Elsevier, pp. 185~190.