

〈論 文〉

## 회전 외팔보의 면외방향 굽힘진동 해석

유 흥 희\*

(1994년 6월 2일 접수)

### Flapwise Bending Vibration of Rotating Cantilever Beams

H. H. Yoo

**Key Words :** Flapwise Bending Vibration (면외방향 굽힘진동), Rotating Cantilever Beams (회전 외팔보), Motion Induced Stiffness Variation (강체운동에 의한 강성변화), Natural Frequency Variation (고유진동수 변화), Critical Angular Speed (임계 각속도), Dimensionless Variables (무차원 변수들)

#### Abstract

When cantilever beams rotate, their bending stiffnesses change due to the stretching caused by centrifugal inertia forces. Such phenomena result in variations of natural frequencies and mode shapes associated with constant speed rotational motions of the beams. These variations are important in many practical applications such as helicopter blades, turbomachines, and space structures. This paper presents the formulation of a set of linear equations governing the flapwise bending vibration of rotating cantilever beams. These equations can be used to provide accurate predictions of the variations of natural frequencies and mode shapes due to rotation.

#### 1. 서 론

회전하는 외팔보 형태를 가진 공학적 예제들로는 터빈 블레이드, 헬리콥터 회전익, 그리고 인공위성의 안테나 등이 있다. 이들을 설계하거나 혹은 기존시스템의 작동성을 평가하고 개선시키려면 그 동적특성을 정확히 파악하는 것이 매우 중요한 일이라 할 수 있다. 그런데 회전하는 외팔보의 동적특성은 고정된 외팔보의 그것과는 다르다. 회전운동은 원심방향 관성력을 발생시켜 시스템의 강성변화를 가져오며 이는 다시 고유진동수의 변화로 연계된다. 따라서 이러한 동적특성 변화를 예측하기 위한 이론적 정립이 필요하다.

회전하는 구조물의 진동해석에 관해서는 긴 역사와 상당한 분량의 문헌이 존재한다. 초기의 연구문헌으로는 Lamb과 Southwell에<sup>(1)</sup> 의해 발표된 회전하는 원형 디스크에 관한 것과 Southwell과 Gough에<sup>(2)</sup> 의해 발표된 회전하는 (외팔보 형태의) 블레이드에 관한 것이 알려져 있다. 외팔보에 관한 연구는 그후 Liebers<sup>(3)</sup>와 Theodorsen<sup>(4)</sup> 같은 사람들에게 의해 계승 발전되었다. 현재도 많이 인용되고 있는 이 연구문헌들에서는 고유진동수를 구하기 위한 Southwell방정식의 계수들을 에너지관계에 의거하여 유도하였다. 이러한 초기의 연구와는 달리, 1950년대에 들어서서 헬리콥터 회전익 진동에 관한 연구가 진행되면서 운동을 지배하는 편미분 방정식을 직접 유도하여 이로부터 Ritz 방법을 통해 Southwell 방정식의 계수들을 구하는 연구방법들이 개발되었는데 참고문헌 (5), (6), (7)은 이러한

\*정회원, 한양대학교 기계설계학과

연구와 관련되어 흔히 인용되는 문헌들이다. 1960년대 이후 전산기와 수치해석방법의 눈부신 발전에 따라 종래의 해석적 방법을 지양하고 수치해석적인 방법으로 문제를 해결한 연구결과들이<sup>(8,9)</sup> 발표되었다. 이들은 일정 각속도 운동조건에서 원심방향 관성력에 의해 야기되는 인장변위율을 인장방향 운동방정식으로부터 먼저 구한후, 이를 굽힘방향 운동방정식에 대입하여 선형방정식을 구하고 이에 근거하여 굽힘진동해석을 수행하였다. 이 방법을 이용하면, 회전평면의 면내방향(lead-lag)으로는 보의 2차원(면내방향) 운동방정식만 구하면 이로부터 면내 굽힘진동 방정식을 구할 수 있으나, 면외방향(flapwise) 굽힘진동 방정식을 구하기 위해서는 3차원 운동방정식을 유도하여야 하기 때문에 그 복잡성이 한층 증대된다. 면외방향 굽힘진동을 다룬 문헌으로는 참고문헌 (10), (11)이 있다.

본 논문은 기존 방식의 단점들을 극복할 수 있고 회전의외팔보의 면외방향 굽힘진동특성을 효과적으로 예측할 수 있는 정확하고 간명한 방법을 제시하는 것을 목적으로 한다. 참고문헌<sup>(12,13)</sup>에서는 회전하는 외팔보의 선형 동적모델링을 복합변형변수를 이용하여 개발하였고, 그 정확성과 간명성을 규명하였다. 이를 바탕으로 참고문헌 (14)에서는 회전하는 외팔보의 면내방향 굽힘진동해석을 위한 간명한 모델링을 유도하고 정확한 해석결과를 얻었다. 본 연구는 참고문헌 (13)과 (14)에서 이루어진 연구를 연장하여, 회전하는 외팔보의 면외방향 굽힘진동해석을 위한 수학적 모델링을 제공하고 해석결과를 도출, 비교분석하는 것을 그 내용으로 한다.

## 2. 진동방정식 유도

이 절에서는 참고문헌 (12), (13)에서 개발되어 그 효율성이 입증된 복합변형변수를 이용한 선형 동적모델링에 근거하여 회전하는 외팔보의 면외방향 굽힘진동 방정식을 제시하고, 이에 근거하여 무차원 변수들로 이루어진 질량 및 강성행렬을 유도하려한다. 운동방정식의 유도에 관한 상세한 내용은 참고문헌 (13)을 참조할 수 있다. 본 논문에서는 설명의 간명성을 유지하고 외팔보의 회전에 의한 관성력효과와 그에 의한 진동특성 변화에 연구의 초점을 맞추기 위해 다음의 가정들을 전제하였다. 첫째, 외팔보의 단면은 일정하고 대칭이며 재질은 균질(homogeneous)하고 등방성(isotropic)이

다. 둘째, 전단효과와 회전관성효과(rotary inertia effect)는 고려하지 않는다. 셋째, 회전축 각속도의 방향은 일정하며, 축과 변형전 보의 방향은 서로 수직이다. 넷째, 인장방향 운동과의 연성효과는 고려하지 않는다. 다섯째, 회전축의 각속도 영향은 고려하지 않는다. 이 가정들은 큰 어려움 없이 해제될 수 있으며, 앞으로 이들의 해제와 관련된 추가적인 연구가 진행될 것이다.

Fig. 1에 나타난 시스템은 반경  $r$ , 각속도  $\Omega$ 인 회전축에 부착된 길이  $L$ 의 외팔보를 나타내고 있다. 그림에서 면외방향 변위  $u$ 는, Rayleigh-Ritz방법을 이용하여 운동방정식을 유도하기 위해, 모드함수와 일반좌표의 곱으로 이루어진 급수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x) q_i \quad (1)$$

여기서,  $\phi_i$ 는  $i$ 번째 모드함수,  $q_i$ 는 일반좌표, 그리고  $\mu$ 는 사용될 일반좌표의 개수이다. 앞에서 제시된 가정들을 이용하고 참고문헌 (13)에 유도된 운동방정식에 근거하여 면외방향 굽힘진동 방정식을 유도하면 다음과 같다(14).

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu} \left[ \left( \int_0^L \rho \phi_i \phi_j dx \right) \ddot{q}_j + \left( \int_0^L EI \phi_{i,xx} \phi_{j,xx} dx \right) q_j \right. \\ & \left. + \Omega^2 \left\{ r \int_0^L \rho (L-x) \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \int_0^L \rho (L^2 - x^2) \phi_{i,x} \phi_{j,xx} dx \right\} q_j \right] \\ & = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\rho$ 는 보의 단위길이당 질량,  $E$ 는 영률,  $I$ 는 보의 면외굽힘방향 2차 면적모멘트를 각각 나타내며,  $\phi_{i,x}$ 와  $\phi_{i,xx}$ 는  $\phi_i$ 의  $x$ 에 관한 1차 미분과 2차 미분값을 각각 나타낸다.

식(2)를 무차원화된 방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 무차원 변수들을 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (3)$$

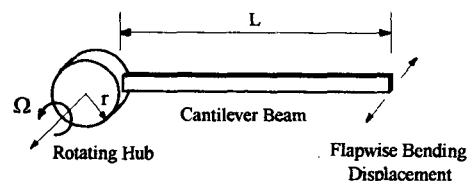


Fig. 1 Cantilever beam attached to a rotating hub

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \tag{4}$$

$$\vartheta_j \equiv \frac{q_j}{L} \tag{5}$$

$$\delta \equiv \frac{r}{L} \tag{6}$$

$$\gamma \equiv T\Omega \tag{7}$$

여기서,

$$T = \left( \frac{\rho L^4}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

식(3~8)를 이용하면 식(2)는 다음과 같이 무차원하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu} \left[ \left( \int_0^1 \psi_i \psi_j d\xi \right) \ddot{\vartheta}_j + \left( \int_0^1 \psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\xi\xi} d\xi \right) \vartheta_j \right. \\ \left. + \gamma^2 \left\{ \delta \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \right\} \vartheta_j \right] \\ = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \tag{9} \end{aligned}$$

여기서,  $\psi_j$ 는  $\phi_j$ 와 동일한 함수값을 가지나  $\xi$ 의 함수이며,  $\ddot{\vartheta}_j$ 은  $\vartheta$ 의  $\tau$ 에 관한 2차 미분을 나타낸다. 무차원화된 식(9)에는, 진동방정식 강성항의 변화가, 축반경과 회전속도의 변화에 의해 어떻게 영향을 받는지 잘 나타나있다.

식(9)에서  $\vartheta_j$ 들이 시간에 대한 조화함수(harmonic function)들이라 가정하면,  $\vartheta_j$ 들로 이루어진 기둥(column) 행렬  $\underline{\vartheta}$ 는, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{\vartheta} = e^{j\omega\tau} \underline{\Theta} \tag{10}$$

여기서,  $j$ 는 허수를 나타내는 표시이며  $\omega$ 는 고유진동수에  $T$ 를 곱한 무차원 변수이며  $\underline{\Theta}$ 는 모드형상을 대표하는 기둥행렬이다. 식(10)을 (9)에 대입하여 정리하면,

$$\omega^2 M \underline{\Theta} = K \underline{\Theta} \tag{11}$$

여기서,  $M$ 과  $K$ 는  $(\mu \times \mu)$  크기의 정방행렬(square matrices)들로 그 요소들은 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_0^1 \psi_i \psi_j d\xi \tag{12}$$

$$\begin{aligned} K_{ij} = \int_0^1 \psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\xi\xi} d\xi + \gamma^2 \left\{ \delta \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \right\} \tag{13} \end{aligned}$$

### 3. 수치해석

#### 3.1 해석결과와 정성적 특징

본 연구에서는 고정된 외팔보의 굽힘진동모드들을 가상모드(assumed modes)들로 사용하여 수치해석을 수행하였다. Fig. 2는  $\delta=1, \gamma=100$ 일때, 해석에 사용된 모드수 증가에 따른 고유진동수들의 수렴을 보여주고 있다. 그림에서 모드수가 10개일 때 3개의 고유진동수들이 거의 일정한 값에 수렴한 것을 알 수 있다. 수치적으로 모드수가 9개 일때와 10개 일때를 비교하면 서로 최대 0.1 % 정도의 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 이 정도의 차이를 해의 충분한 수렴으로 간주하고, 이후의 결과를 얻기 위해 10개의 모드들을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

Fig. 3은 회전속도 증가에 따른 가장 낮은 3개의

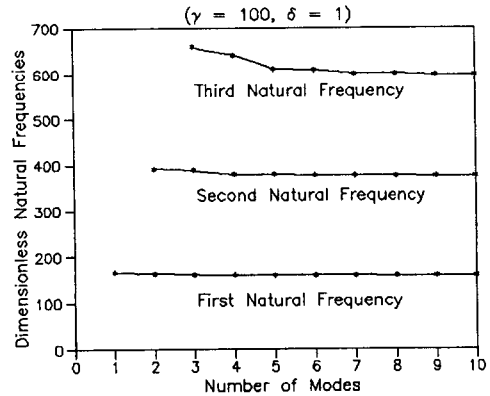


Fig. 2 Convergence of natural frequencies

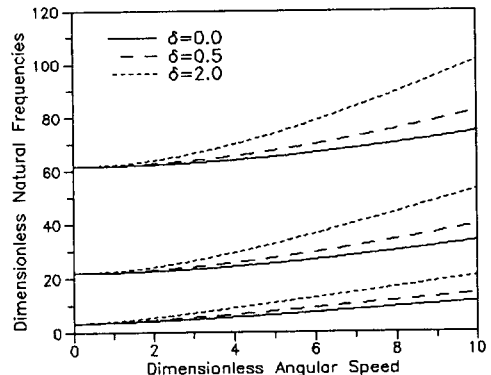


Fig. 3 Natural frequency variation vs angular speed

면외방향 굽힘진동 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 여기서 관찰할 수 있듯이 고유진동수들은 외팔보의 회전각속도( $\gamma$ )가 커질수록 증가하며, 축반경( $\delta$ )이 커지면 이러한 증가율이 가속된다. 이러한 정성적 특성들은 직관적으로도 예측될 수 있는 것이다. 즉, 축반경이 크고 회전속도가 클수록 원심관성력이 증가되어 이것이 시스템강성의 증가를 가져오고 결국 고유진동수의 증가로 귀결되는 것이다.

### 3.2 해석결과의 정확성 고찰

Table 1과 2에는 여러가지 회전속도와 축반경비에 대해서 본 논문에서 제시된 방법에 의해 구한 수치해석결과들과 Southwell 방정식<sup>(5,8)</sup> 이용하여 얻은 결과들을 비교하고 있다. 두 표의 결과들 뒤에 P가 붙은 것들이 본연구의 모델링에 의한 것이며 S가 붙은 것들은 Southwell 방정식에 의한 것이다. 여기서 보듯이 두 결과들은 비교적 잘 일치하고 있다. (최대 2% 정도의 차이를 가짐) 이 결과에서는 그러나 축의 반경이나 회전속도가 커짐에 따라 그 차이가 증가하고 있는 것을 보여주고 있다. 이러한 차이는 Southwell 방정식이 축반경과 회전속도가 증가할수록 그 예측능력의 한계를 갖기 때문인데 참고문헌 (14)에서는 이러한 한계를 면내 굽힘진동의 경우에 대해 규명하고 있다.

Table 1 Comparison of the first natural frequency

	$\gamma=1$	$\gamma=5$	$\gamma=10$
$\delta=0.0$	3.68 P	6.45 P	11.20 P
	3.68 S	6.46 S	11.39 S
$\delta=0.5$	3.79 S	7.80 P	14.17 P
	3.78 S	7.82 S	14.40 S
$\delta=2.0$	4.09 S	10.86 P	20.61 P
	4.08 S	10.94 S	21.10 S

Table 2 Comparison of the second natural frequency

	$\gamma=1$	$\gamma=5$	$\gamma=10$
$\delta=0.0$	22.18 P	25.45 P	33.64 P
	22.18 S	25.40 S	33.52 S
$\delta=0.5$	22.28 P	27.47 P	39.41 P
	22.28 S	27.44 S	39.43 S
$\delta=2.0$	22.57 P	32.76 P	52.81 P
	22.57 S	32.81 S	53.38 S

### 3.3 임계 각속도와 Southwell상수

회전시 외팔보의 각속도와 고유진동수가 만일 일치한다면 이는 공진현상을 야기시킬 것이다. 이 각속도를 임계 각속도(critical angular speed)라 부르며 참고문헌(14)에서는 이러한 각속도가 면내 굽힘진동의 경우 특정한 축반경비 내에서 존재함을 보여주었다. 그러나 면외 굽힘진동의 경우는 면내 굽힘진동의 경우와 달리 임계 각속도가 존재하지 않는 것이 본 연구에서 밝혀졌다. Fig. 4는 이러한 사실을 뒷받침하는데,  $\delta=0$ ,  $\delta=0.5$ ,  $\delta=2$ 일 때 임계 각속도가 존재하지 않는 것을 보여준다. 좀더 일반적으로 모든  $\delta$ 값에 대해서 이러한 결론이 성립함을 규명하기 위해서는 다음과 같은 방법을 사용할 수 있다. 즉 임계 각속도가 존재하기 위해서는 고유진동수가 회전 각속도와 일치해야 하므로 그래프에서  $\omega=\gamma$ 가 되는 직선이 (예를 들어 Fig. 3이나 4에 나타난) 고유진동수의 변화곡선들과 만나야 한다. 이것이 가능하기 위해서는  $\gamma$ 가 큰 값이 될 때 고유진동수 변화곡선들의 점근선의 증가 기울기가 1보다 작아야 한다. 식(13)에서  $\gamma$ 가  $\infty$ 로 갈 때 우변항들 중 첫째 항은 다른항들에 비해 무시할 수 있게 되며 식(11)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\lambda^2 M \Theta = K^* \Theta \quad (14)$$

여기서,  $M$ 은 식(12)에 주어진 값과 같으며  $K^*$ 의 요소와  $\lambda$ 의 정의는 다음과 같다.

$$K^*_{ij} = \delta \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\xi \quad (15)$$

$$\lambda \equiv \frac{\omega}{\gamma} \quad (16)$$

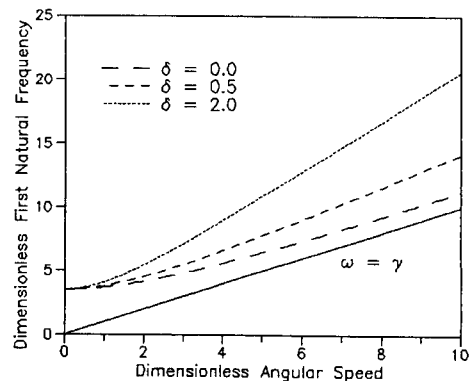


Fig. 4 Search for critical angular speed

$\lambda$ 는 정의로부터  $\gamma$ 가  $\infty$ 로 갈 때 점근선의 기울기를 나타낸다. 즉,  $\lambda=1$ 일 때  $\omega=\gamma$ 가 되므로,  $\lambda=1$ 이 되는  $\delta$ 값의 존재여부에 따라 임계 각속도의 존재여부가 결정된다. Fig. 5는  $\delta$ 의 증가에 따른  $\lambda$ 의 변화를 (점근선의 기울기) 가장 낮은 세개의 고유진동수에 대해 나타내고 있다. 그림에서 세개의 고유진동수에 해당하는  $\lambda$ 값들은  $\delta$ 의 증가에 따라 점점 커지며, 그 값들은 1보다 항상 큰 것을 관찰할 수 있다. 또한 높은 고유진동수에서는 그 값들이 더 커지므로 (예를 들어, 2번째 고유진동수의  $\lambda$ 값은 첫번째의  $\lambda$ 값보다 크고 3번째 고유진동수의  $\lambda$ 값은 2번째의  $\lambda$ 값보다 큼) 임계 각속도는 어느 경우에도 존재하지 않는 것을 알 수 있다.

식(16)에서 정의된  $\lambda$ 값은 Southwell 방정식에 등장하는 Southwell 상수와 밀접한 관계를 갖고있다. Southwell 방정식은 다음과 같이 알려져 있다.

$$\omega_{ni}^2 = \omega_{si}^2 + S_i \Omega^2 \quad (17)$$

여기서,  $\omega_{ni}$ 는 회전보의  $i$ 번째 고유진동수,  $\omega_{si}$ 는 회전운동이 없을 때의  $i$ 번째 고유진동수, 그리고  $\Omega$ 는 보의 회전각속도를 나타내며,  $S_i$ 는 Southwell 상수라 부른다. 식(17)에서 보듯이  $\Omega$ 가 커지면  $S_i$ 의 제곱근이 회전 각속도의 변화에 따른 고유진동수 제곱의 기울기를 나타내며 식(16)에서 정의된  $\lambda$ 와 같은 의미를 지니게 되는 것이다. 따라서 식(14)는 Southwell 방정식에 등장하는 상수값들을 결정하는 데도 쓰일 수 있는 것이다. 다시말해서 본 논문에서 소개한 방법으로 축반경비의 변화에 따른 정확한 Southwell 방정식을 구할 수도 있는 것이다.

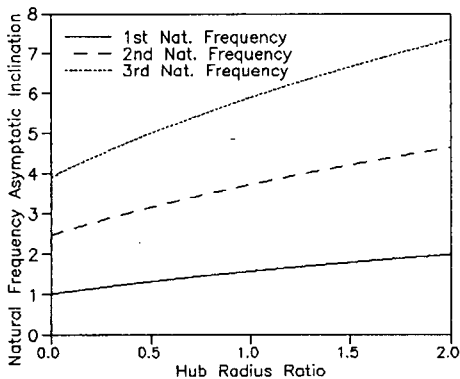


Fig. 5 Asymptotic slope vs hub radius ratio

### 3.4 회전에 의한 모드형상 변화

모드형상 특히 절점(nodes)이나 반절점(antinodes)의 위치는 진동제어를 목적으로 하는 경우 상당한 중요성을 가질 수 있다. Fig. 6에는  $\gamma=100$ ,  $\delta=1$ 일 때 세번째 모드까지의 회전에 의한 모드형상과 절점위치의 변화를 보여주고 있다. 두번째 모드의 경우 절점위치는 보 전체길이의 1%까지 바깥으로 이동하고 있으며 세번째 모드의 경우는 고정단에서 본 첫째 절점과 둘째 절점이 각각 7%와 5% 바깥으로 이동하는 위치 변화를 보여주고 있다. 이러한 변화들은 참고문헌 (14)에서도 (면내 굽힘진동의 경우) 유사하게 보여주었는데 회전관성에 의해 모드형태가 바깥방향으로 인장되는 현상이라 할 수 있다.

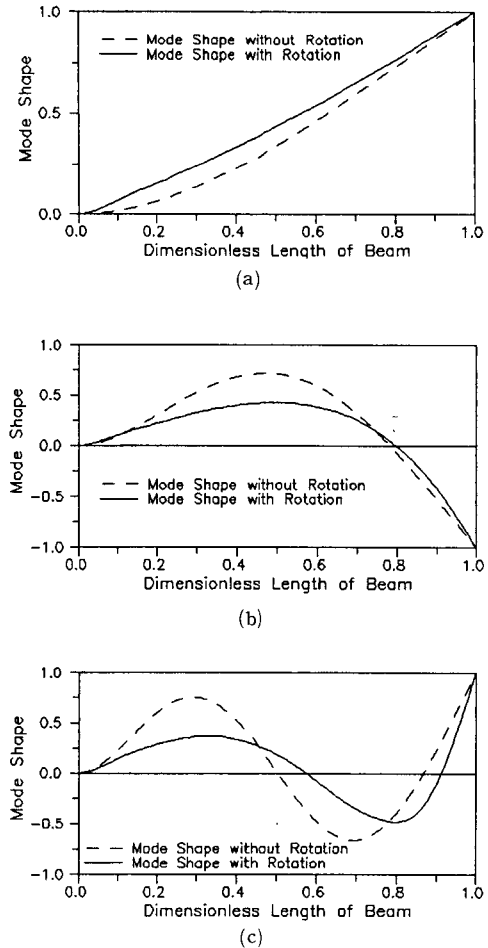


Fig. 6 Variations of first three mode shapes

#### 4. 결 론

본 논문에서는 회전하는 외팔보의 면외방향 굽힘진동특성을 예측하기 위한 진동 방정식이 제시되었으며 이를 이용한 해석결과가 도출되었다. 해석결과는 회전속도의 증가에 따른 외팔보의 고유진동수 증가를 보여주었고 축반경의 증가에 따라 이 현상이 가속되는 것을 보여주었다. 또한 고속회전시 모드형상과 그 절점위치가 상당히 변화하는 것을 발견하였다. 이는 면내 굽힘진동의 경우와 정성적으로 동일한 결과라 할 수 있다. 본 연구에서는 그러나 회전 외팔보의 면외 굽힘진동의 경우는 면내 굽힘진동의 경우와는 달리, 회전 각속도와 고유진동수가 일치하는 임계 각속도가 존재하지 않음을 규명하였다. 본 논문에서 제시한 방법은 정확성과 유도과정 및 최종 방정식의 간명성을 장점으로 갖는다. 따라서 관련분야의 엔지니어가 쉽게 이해하고 응용하여 쓸 수 있을 것이다.

#### 후 기

본 논문의 연구는 1993년도 교육부 학술연구 조성비(ME93-D-12)에 의해 지원을 받아 수행되었으며, 이에 관계자에게 감사사를 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Lamb, H. and Southwell, R., 1921 "The Vibrations of a Spinning Disk," *Proceedings of Royal Society of London*, A99, pp. 272~280.
- (2) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766*.
- (3) Liebers, F., 1930, "Contribution to the Theory of Propeller Vibrations," *NACA TM No. 568*.
- (4) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force," *NACA TN No. 516*.
- (5) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (6) Carnegie, W., 1959, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," *J. Mech. Engng Sci.*, 1, pp. 235~240.
- (7) Yntema, R., 1955, "Simplified Procedures and Charts for the Rapid Estimation of Bending Frequencies of Rotating Beams," *NACA 3459*.
- (8) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175~185.
- (9) Bhat, R., 1986. "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," *J. Sound and Vibration*, 1977, 105(2), pp. 199~210.
- (10) Kaza, K. and Kvaternik, R., "Nonlinear Aeroelastic Equations for Combined Flapwise Bending, Chordwise Bending, Torsion and Extension of Twisted Nonuniform Rotor Blades in Forward Flight," *NASA TM-74059*.
- (11) Houbolt, J. and Brooks, G., 1958, "Differential Equations of Motion for Combined Flapwise Bending, Chordwise Bending, and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades," *NACA TR-1346*.
- (12) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. Guidance Control, and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (13) 유홍희, 1991, "회전 구조물의 복합 변형변수를 이용한 선형 동적 모델링," 한국항공우주학회지, 제19권, 제3호, pp. 32~39.
- (14) 유홍희, 1991, "회전 외팔보의 굽힘진동 해석," 대한기계학회논문집, 제16권, 제5호, pp. 891~898.