

〈論 文〉

균열을 내재한 회전체의 에너지방출률

이 태 원*

The Energy Release Rate for Cracks in a Rotating Continuum

Tae Won Lee

Key Words : Energy Release Rate(에너지방출률), Stress Intensity Factor(응력확대계수), J Integral(J 적분), Shape Design Sensitivity(형상설계 민감도), Material Derivative(편미분), Centrifugal Load(원심력)

Abstract

For a rotating body with cracks, the new energy release rate equation is presented. The derived equation is different from the other researcher's results. It is a path-independent integral which excluded the derivatives of displacements near the crack tip, thereby improving the numerical accuracy of the energy release rate computation. Moreover, as the equation was derived on basis of the energy principle and non-linear elasticity without assumptions, it can applied to the cracked body with arbitrary shape under elastic-plastic deformation. Several examples are treated to demonstrate the efficiency and accuracy of the proposed method compared to existing methods.

기 호 설 명

a : 균열길이
 E : 종탄성계수
 f_i : 단위 체적당 체적력
 G : 에너지방출률
 K_I : 모드 I 응력확대계수
 n_i : 경계에서의 단위 수직벡터 성분
 T_i : 표면력
 u_i : 변위텐서
 v_i : 속도장
 W : 단위 체적당 에너지밀도
 Γ : 연속체의 경계
 δ : 증분량
 ϵ_{ij} : 변형률텐서
 ν : 푸아송비
 Π : 연속체의 전체 에너지

ρ : 단위 체적당 밀도
 σ_{ij} : 응력텐서
 Ω : 연속체의 영역
 ω : 회전체의 각속도
 \cdot : 변수의 전미분
 i, j, k, l : 텐서의 방향성분
 $,$: 편미분

1. 서 론

현대산업에서 고속 회전하는 기계의 사용이 증가하여 과거에 무시하였던 원심력이 재료의 파단에 중요한 역할을 한다. 그러므로, 기계의 안전을 판단하기 위하여 원심력하의 균열해석에 관심이 집중되었고 결과로서 많은 해석적 및 수치적 방법들이 제안되었다.

먼저 Rooke와 Tweed⁽¹⁾는 평면변형률 조건에서

*정회원, 금오공과대학교 기계설계공학과

반경보다 작은 선단균열을 가진 회전 원판에 대한 응력확대계수(stress intensity factor)를 특이적분 형태로 유도하였고, Gregory⁽²⁾는 사상(mapping) 이론을 적용하여 임의길이의 선단균열에 대한 응력 확대계수식을 제안하였다. 또한, Isida⁽³⁾는 복소수 응력 포텐셜함수를 이용하여 회전체 내부의 임의 위치에 있는 균열문제를 해결하였다. 이러한 해석적방법은 응력확대계수값을 정확히 구할 수 있으나, 회전중심이 원 중심인 원판의 균열문제와 같은 특수 형상을 갖는 회전체에만 적용 가능하다. 뿐만 아니라, 문헌의 응력확대계수식들은 수학적 접근방법에 따라 각각 다른 복잡한 형태로 표현되어 최종적으로는 수치해법에 의존하여야 한다.

회전체 형상 및 최종해의 계산에 관한 해석적방법의 단점을 해결하기 위하여 특정형상 균열문제의 응력확대계수값을 도표화하거나⁽⁴⁾ 근사적으로 구하는 단면방법⁽⁵⁾등이 제시되었으나 일반적으로 임의의 형상을 갖는 연속체의 균열해석은 균열 폐경로 적분(crack closure integral)⁽⁶⁾ 및 J적분 등과 같은 방법을 사용한다. 이들 방법 중 균열 폐경로 적분법은 균열선단부 응력해의 정확도가 응력확대계수나 에너지방출률(energy release rate)의 수치결과에 민감한 영향을 미치므로 보다 정확한 값을 얻기 위하여 J적분법이 추천된다. Rice⁽⁷⁾가 제안한 J적분은 선형탄성뿐 아니라 비선형 문제까지 적용되며 균열부를 둘러싼 임의의 적분경로에 무관하므로 비록 균열선단부의 해가 부정확하여도 경로적분을 잘 선정하면 정확한 값을 얻을 수 있다. 이 J적분은 균열성장에 따른 연속체의 에너지 변화량인 에너지방출률과 동일하고 선형탄성 균열문제의 응력확대계수와 밀접한 관계가 있다. 그러므로, De Lorenzi,⁽⁸⁾ Kishimoto 등⁽⁹⁾과 Sakata 등⁽¹⁰⁾은 J적분을 확장하여 임의의 하중조건까지 적용되는 에너지 방출률식을 유도하였다. 이 식들에서 내력으로 인한 에너지방출률 식은 Rice의 J적분 외에 변위의 편미분으로 표현된 균열선단부의 영역적분항이 추가된다. 그러나, 변위의 변미분은 균열선단부 거리의 제곱근에 반비례하는 특이성(singularity)을 갖기때문에 에너지방출률의 수치계산시 큰 오차가 발생된다.

한편, 기존의 시각과 달리 새로운 접근방법으로서 Lee와 Grosse⁽¹¹⁾는 형상 최적화기법에 의존하여 에너지방출률 식을 유도하였다. 그들은 균열성장을 연속체의 형상변화로 보고 연속체의 전체 포텐셜

에너지를 목적함수로 설정하여 균열문제를 형상최적화문제로 변환하였다. 이 때 형상변화로 인한 목적함수의 변화를 설명하는 형상설계 민감계수(shape design sensitivity coefficient)가 바로 에너지방출률이 된다. 문헌^(11,12)들의 결과식은 내력이 존재하는 경우도 기존의 J적분식과 달리 균열선단부 영역적분항이 특이함수가 아닌 변위와 내력의 전미분(material derivative)으로 표현되었고 이로 인하여 에너지방출률 수치해의 정확도가 향상되었다. 물론, 유도된 에너지방출률 식은 적분경로에 무관하고 탄소성 균열문제도 다룰 수 있다. 이러한 장점에도 불구하고 문헌⁽¹¹⁾의 식으로부터 내력조건 하에서 에너지방출률을 계산하기 위하여 전체조건으로 내력의 전미분을 해석적으로 결정하여야 하는 어려움이 있다. 실제로 내력은 여러형태가 있고 수학적으로도 각각 다른 함수로 표현되므로, 균열길이의 변화에 따른 내력의 변화인 내력의 전미분은 내력의 종류에 따라 다른 형태로 유도된다. 문헌⁽¹¹⁾은 이에 대한 상세한 설명은 없고 단지 중력의 경우만 적용예제에서 다루었다.(중력은 내력의 전미분이 0 이다.)

회전체의 균열해석은 그 중요성에도 불구하고 살펴본 바와 같이 현재까지 제안된 해석적 방법 및 수치적 방법들은 각각 문제점을 갖고 있다. 이러한 사실로부터 수치적관점에서 가장 적합한 방법을 찾기위하여 본 연구는 Lee와 Grosse의 접근방법을 기초로 원심력을 고려한 균열문제의 새로운 에너지 방출률 식을 유도하였다. 유도식은 기존 J적분식의 장점을 그대로 유지한다. 그러나, 결과식의 형태에서 특이함수에 대한 균열선단부의 영역적분항이 제거되어 수치계산의 정확도가 향상된 것이 무엇보다도 중요하다. 이를 수치적으로 증명하기 위하여 2개의 적용예제가 다루어졌다.

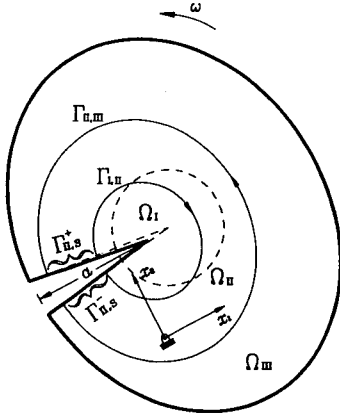
2. 균열을 내재한 회전체의 에너지방출률

2.1 지배방정식

Fig. 1과 같이 일정한 각속도로 회전하는 2차원 연속체를 고려하자. 연속체의 단위체적당 질량을 ρ 라 하고 회전중심에서 균열방향을 x_1 좌표로 설정하면, 임의의 위치 x_1 에 단위 체적당 원심력

$$f_i = \rho \omega^2 x_i \quad (1)$$

이 발생한다. 이 때 전 영역과 경계로 구성된 연속



$$\Gamma_u - \Gamma_n + \Gamma_{n,s}^+ + \Gamma_{n,s}^- + \Gamma_{n,m}$$

Fig. 1 The rotating body with a crack and virtual crack extension

체의 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad \text{on } \Gamma_T \quad (4)$$

위 식에서 σ_{ij} 는 응력, u_i 는 변위를 나타내며 T_i 와 n_j 는 경계에서의 표면력과 단위수직벡터 성분을 나타낸다. 그리고, 소변형하의 탄소성 균열문제까지 다룰수 있도록 변위 및 응력의 상관관계는

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (6)$$

$$\text{where } W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (7)$$

를 고려하였다. 이 식에서 에너지밀도 W 를

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \quad (8)$$

로 정의하면 식 (6)은 Hooke의 법칙을 만족하는 선형탄성변형의 응력과 변형률 상관관계가 된다.

2.2 원심력을 고려한 에너지방출률

지배방정식 (2)와 경계조건 (3)과 (4)를 만족하는 연속체의 전체 에너지 Π 는

$$\Pi = \int_{\Omega} W d\Omega - \int_{\Gamma} T_i u_i d\Gamma - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega \quad (9)$$

이다. 그런데, 에너지방출률은 균열성장에 따른 에

너지의 변화율이므로 균열길이를 a 로 하여 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$G = \dot{J} = - \frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (10)$$

먼저 연속체의 전 영역 Ω 를 균열선단을 포함한 영역 Ω_I 과, 그 외의 영역으로 분할하고 영역 Ω_I 의 경계를 Γ 라 하자. 이러한 정의하에 문헌들⁽⁸⁻¹⁰⁾은 식 (10)을 이용하여 아래의 에너지방출률 식을 유도하였다.

$$G = \int_{\Gamma} W n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} T_i u_{i,1} d\Gamma - \int_{\Omega_I} f_i u_{i,1} d\Omega \quad (11)$$

식 (11)로부터 에너지방출률을 수치적으로 계산하는데 문제점이 발생한다. 이는 변위의 편미분이 균열선단부에서 특이성을 갖는 함수와 일반함수의 조합으로 표현되고 각 성분의 분해가 불가능하기 때문이다. 내력이 없는 경우 경계 Γ 를 균열선단부에서 멀리 취하면 특이함수의 영향을 제거할 수 있으나, 식 (11)의 3번째 적분에서 보듯이 내력이 존재하는 경우는 반드시 특이함수와 일반함수로 조합된 변위의 편미분에 대한 정확한 영역적분이 필요하다. 그러므로, 현재까지 수치균열해석에 관한 연구는 주로 식 (11)보다 균열 폐경로적분등과 같은 다른 방법이 주로 사용되었다.

에너지방출률 식 (11)의 문제점을 해결하기 위하여 본 연구는 형상 최적화기법을 사용하여 새로운 식을 유도하고자 한다. 이론전개 및 설명의 편의를 위하여 연속체의 전 영역 Ω 를 Fig. 1과 같이 균열선단을 포함한 영역 Ω_I 과, 그외의 영역 Ω_{II} 및 Ω_{III} 의 세부분으로 분할하였다. 이러한 영역분할에서 균열성장은 균열방향으로 영역 Ω_I 의 평행이동에 해당하고 영역 Ω_{II} 이 어떠한 위치변화나 형상변화도 없으므로 영역 Ω_{II} 만 영역 Ω_I 의 이동으로 인하여 형상변화가 발생한다. 각 영역의 강성운동 및 형상변화로 인한 에너지의 변화를 가상시간 t 를 도입하여 전미분으로부터 계산하면 아래의 결과식이 유도된다.^(11,12)

$$\dot{\Pi} = \int_{\Gamma_{II}} (W - f_i u_i) v_k n_k d\Gamma - \int_{\Gamma_{II}} T_i u_{i,j} v_j d\Gamma - \int_{\Omega_{II} + \Omega_{III}} f_i u_i d\Omega + \int_{\Omega_{II}} f_i u_{i,j} v_j d\Omega \quad (12)$$

위 식에서 Γ_{II} 는 영역 Ω_{II} 의 경계를 의미하며 영역 Ω_{II} 는 균열부를 포함하는 임의의 영역이므로 식 (12)는 적분경로에 무관하다.

한편, 속도장 v_i 는 x_i 의 전미분으로서 균열성장
에 따른 좌표값의 변화인

$$v_i = \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial a} \delta a \quad (13)$$

이다. 식(13)에서 보논바와 같이 가상시간과 균열
변화의 상관관계를 도입하면 에너지의 전미분은

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial a} \delta a = -G \delta a \quad (14)$$

이고 내력 f_i 의 전미분은

$$f_i = \frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial a} \delta a \quad (15)$$

로 정의된다. 식(13)~(15)를 이용하면 식(12)로부
터 에너지방출률을 구할 수 있다.

결과 식(12)로부터 에너지방출률을 계산하기 위
하여 내력의 전미분과 속도장을 잘 이해하여야 한
다. 먼저 속도장을 살펴보자. 영역 Ω_I 에서 속도
장 v_i 는 x_1 방향으로 δa 만큼 이동할 뿐, x_2 방향으
로 변화가 없으므로 $v_1 = \delta a$, $v_2 = 0$ 이 되고 형상변
화가 없는 영역 Ω_{II} 의 속도장은 항상 $v_i = 0$ 이다.
영역 Ω_I 의 강성운동으로 인해 형상변화가 있는 Ω_{II}
의 속도장 v_i 는 영역 Ω_I 과 영역 Ω_{II} 의 속도장에
대한 보간으로 구할 수 있다. 비록 영역 Ω_{II} 의 속
도장이 해석적으로 계산되지 않았을지라도 보간에
의한 속도장 정의는 물리적으로 타당하고 문헌^(8,11)
들 역시 이 가정을 사용하였다.

속도장과 달리 균열성장으로 인한 내력의 전미분
은 내력의 종류에 따라 다른 형태를 갖기때문에 통
일된 하나의 수식으로 표현하기는 불가능하다. 그
러므로, 원심력만 고려하면 단위체적당 질량과 회
전각속도는 균열 성장에 따른 변화가 없으므로 원심
력의 전미분은

$$f_i = \rho \omega^2 \dot{x}_i = \rho \omega^2 v_i \quad (16)$$

가 된다. 같은방법으로 내력의 편미분은

$$f_{i,k} = \rho \omega^2 x_{i,k} = \rho \omega^2 \delta_{i,k} \quad (17)$$

로 표현된다. 여기서 $\delta_{i,k}$ 는 Dirac delta함수이다.
이러한 결과들을 식(12)에 대입하면 결과적으로 원
심력을 고려한 균열문제의 에너지방출률식은 다음
과 같다.

$$G \delta a = - \int_{\Gamma_n} (W - \rho \omega^2 x_i u_i) v_k n_k d\Gamma + \int_{\Gamma_n} T_{i,j} v_i v_j d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega_I + \Omega_{II}} \rho \omega^2 u_i v_i d\Omega - \int_{\Omega_n} \rho \omega^2 \delta_{i,k} u_i v_k d\Omega \quad (18)$$

식(18)은 식(11)과 달리 균열선단부를 포함하는 Ω_I
의 영역적분에서 특이성을 갖는 변위의 편미분 대
신 일반함수인 변위와 속도장으로 표현되었다. 이
차이는 수치적분의 정확도에 중요한 영향을 미친
다.

일반적으로 임의 형상의 연속체는 경계요소법이
나 유한요소법과 같은 수치해법에 의존하여 응력
및 변위해를 결정한다. 그러나, 유한요소해석의 응
력과 변위해는 요소경계에서 부정확하므로 이러한
해석결과를 이용하여 식(18)로부터 에너지방출률을
구한다면 경계적분으로 인한 수치오차가 크게 발생
한다. 그러므로, 유한요소법 사용시 에너지방출률
계산결과와 정확도를 향상시키기 위하여 경계적분
을 영역적분으로 변환하는 것이 필요하다. 이를 위
하여 식(18)의 첫번째와 두번째 적분항에 Gauss

발산이론을 적용하면 된다. 다행히도 문헌⁽¹¹⁾
에서 내력 조건하의 영역적분형 에너지방출률 식이
유도되었으므로 여기서는 변환과정을 생략하기보다
문헌식에 내력에 관한 식(1)와 내력의 전미분 식
(15)를 대입하여 원심력을 고려한 에너지방출률 식
을 영역적분형

$$G \delta a = - \int_{\Omega_n} \{ (W - \rho \omega^2 x_i u_i) v_{k,k} - \delta_{ij} u_i v_{j,k} \} d\Omega + \int_{\Omega_I + \Omega_{II}} \rho \omega^2 v_i u_i d\Omega \quad (19)$$

로 정리하였다.

3. 적용예제

에너지방출률 식(18)과 (19)는 임의의 형상이나
편심된 회전체의 균열문제뿐 아니라 탄소성 균열문
제에도 적용이 가능하다. 그러나, 문헌^(1~6)들의 해
는 선형탄성 변형조건하의 회전원판내 균열문제만 가
능하므로 이 문제들을 적용예제로 선정하여 제안된
방법의 유용성과 수치해의 정확성을 검토하였다.
모든 균열문제는 유한요소법에 의하여 수치응력해
석을 하였으며 보다 정확한 응력 및 변위해를 얻기
위하여 균열부는 6절점 균열요소로, 그 외의 영역
은 8 절점 매개변수형 유한요소로 모델링하였다.

3.1 선단균열을 가진 회전하는 원판

균열길이 a 인 선단균열을 가진 원판이 일정 각속도 ω 로 회전하고 있다. 원판 형상 및 균열위치 등은 Fig. 2에 묘사되어 있다. 균열길이는 회전체의 반경 R 에 대하여 무차원하여 $a/R=0.2\sim 0.8$ 인 균열문제들을 다루었다. 이 모드 I 균열문제는 원판의 형상이 균열부에 대칭이므로 유한요소모델은 1/2 부분만 고려하였다. 수치해석을 위하여 원판의 유한요소모델은 각 균열길이에 대하여 재 구성하였고 한 예로 $a/R=0.5$ 의 경우를 Fig. 3에 도시하였다. 유한요소해석에 필요한 자료는 밀도 $\rho=0.0079 \text{ kg/cm}^3$, 종탄성계수 $E=0.2058 \times 10^8 \text{ N/cm}^2$, 푸아송비 $\nu=0.3$, $\omega=100 \text{ rpm}$ 및 $R=6 \text{ cm}$ 를 사용하였다.

먼저 제안된 에너지방출률 식(19)가 적분경로에

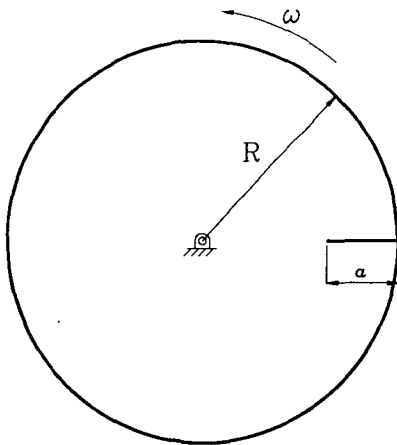


Fig. 2 The configuration of the rotating circular disk with an edge crack

무관함을 살펴보자. 이를 위하여 적분경로는 Fig. 3에서 보는 바와 같이 3개로 선정하였다. 여기서 적분경로는 영역 Ω_{II} 를 의미하며 영역 Ω_I 은 영역 Ω_{II} 에 내접하며 균열선단부를 포함하는 영역을 나타낸다. 각 적분경로당 식(19)로부터 수치계산된 에너지방출률은 Table 1에 기술되었다. Table 1에서 보듯이 여러 균열길이를 갖는 균열문제에서 에너지방출률은 오차가 0~0.06%의 범위로 거의 동일하다.

평면변형률 조건에서 각 균열 길이당 응력확대계수의 이론해는 Rooke와 Tweed⁽¹⁾에 의해 유도되었으며 단면방법에 의한 근사해는 문헌⁽⁶⁾에서 계산되었다. 그러나, 무차원화된 응력확대계수로 표현된 문헌들의 결과와 달리 식(19)는 에너지방출률 식이므로, 수치결과의 비교를 위하여 계산된 에너지방출률은

$$G = \frac{(1-\nu^2) K_I^2}{E} \tag{20}$$

로부터 응력확대계수를 계산한 후 이를

$$K_o = \frac{\rho \omega^2 R^2}{8} \left(\frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \sqrt{\pi a} \tag{21}$$

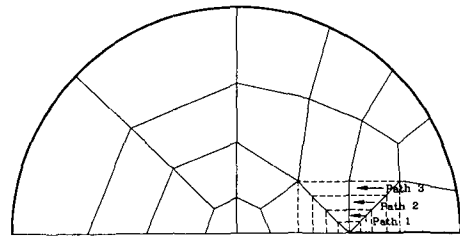


Fig. 3 The finite element model of the rotating circular disk with an edge crack of $a/R=0.5$

Table 1 J-integral values of a rotating disk with edge cracks under plane strain

a/R Integral path	J-integral (N/cm)				
	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8
Path 1	5.724×10^{-6}	12.89×10^{-6}	42.79×10^{-6}	111.8×10^{-6}	173.3×10^{-6}
Path 2	5.725×10^{-6}	12.89×10^{-6}	42.82×10^{-6}	111.8×10^{-6}	173.4×10^{-6}
Path 3	5.725×10^{-6}	12.89×10^{-6}	42.82×10^{-6}	111.9×10^{-6}	173.3×10^{-6}
Average	5.725×10^{-6}	12.89×10^{-6}	42.81×10^{-6}	111.9×10^{-6}	173.3×10^{-6}
Maximum error	0.01%	0%	0.05%	0.06%	0.02%

로 나누어 무차원화 하였다. 식 (19) ~ (21)로부터 얻어진 무차원화된 응력확대계수와 문헌^(1,5)들의 결과는 Fig. 4에 도시되었다. 그림에서 보듯이 현재의 방법에 의한 수치결과는 단면방법에 의한 근사해보다 이론값에 정확히 일치한다.

3.2 반경방향의 균열을 가진 회전하는 원판

Fig. 5에서 보는바와 같이 반경방향으로 길이 $2a$ 균열을 내재한 원판이 일정 각속도로 회전하고 있다. 이 균열문제 역시 모드 I 만 존재하고 균열면에 대하여 대칭이므로 유한요소법에 의한 모델링은

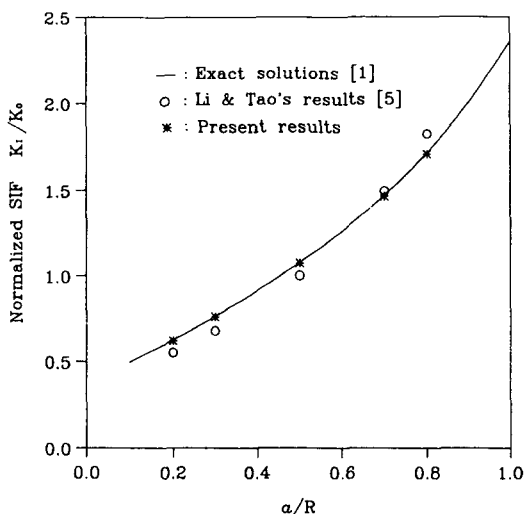


Fig. 4 The normalized K_I values of edge crack problems under plane strain

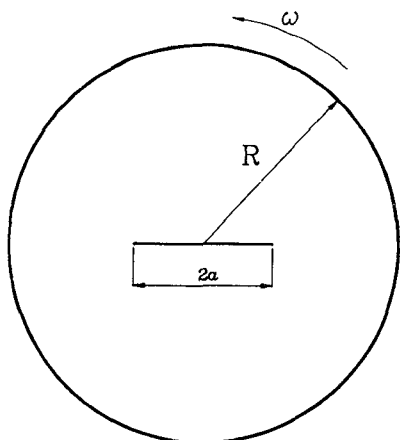


Fig. 5 The configuration of the rotating circular disk with a center crack

원판의 1/4만 고려하면 된다. 수치해석시 사용된 물성치값들은 $\rho=0.0079 \text{ kg/cm}^3$, $E=0.2058 \times 10^8 \text{ N/cm}^2$, $\nu=0.3$ 이고 $\omega=100 \text{ rpm}$, $R=6 \text{ cm}$ 이다.

먼저 $a/R=0.4$ 인 경우 Fig. 6과 같이 4개의 적분 경로를 선택하여 각 적분 경로에 대한 에너지방출률을 수치계산한 결과가 Table 2에 기술되었다. 표에서 보듯이 적은 유한요소를 사용하여도 계산된 에너지방출률은 적분경로에 관계없이 오차가 0.02% 미만으로 동일한 값을 갖는다.

제안된 방법에 의한 수치해의 정확성을 검토하기 위해 균열비 a/R 을 0.2~0.6로 변화하면서 응력확대계수값을 계산하였다. 각 균열길이에 대한 응력확대계수의 이론치는 문헌^(3,4)들에서 쉽게 구할 수 있고 Unger⁽⁶⁾는 균열 폐경로 적분을 이용하여 평면응력하에서 동일형상의 균열문제를 수치적으로

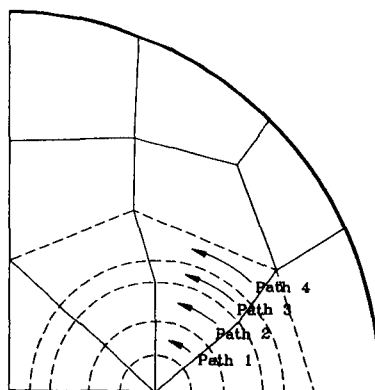


Fig. 6 The finite element model of the rotating circular disk with a center crack of $a/R=0.4$

Table 2 J-integral values of a rotating disk with a radial crack of $a/R=0.4$ under plane stress

Integral path	J-integral (N/cm)
Path 1	55.37×10^{-6}
Path 2	55.39×10^{-6}
Path 3	55.38×10^{-6}
Path 4	55.39×10^{-6}
Average	55.38×10^{-6}
Maximum error	0.02%

해결하였다. 그러므로, 기존 수치해와 비교를 위하여 본 예제는 평면응력조건만 다루었다. 식 (19)가 적분경로에 무관함은 앞에서 이미 입증되었으므로 각 균열길이당 유한요소모델링은 재분할을 피하기 위하여 Fig. 7과 같이 하였다. 여기서, Ω_{II} 는 균열을 둘러싼 가장 외각의 유한요소들로 구성된다. 이와같이 적분경로를 균열부에서 멀리 설정하면 균열부의 응력 및 변위해가 비교적 부정확하여도 에너지방출률은 정확히 계산된다. 이 사실에 근거하여 균열선단부의 유한요소는 균열요소를 사용한 경우와 일반 등매개변수형 유한요소를 사용한 경우로 나누어 수치응력해석을 수행하였다.

제안된 방법에 의하여 계산된 에너지방출률은

$$G = \frac{K_I^2}{E} \tag{22}$$

의 상관관계를 적용하여 응력확대계수를 구한후

$$K_o = \frac{\rho\omega^2 R^2}{8} (3 + \nu) \sqrt{\pi a} \tag{23}$$

로 나누어 무차원하여 Fig. 8에 도시하였다. Fig. 8에서 보듯이 균열선단부의 균열요소 사용 여부에 관계없이 식(19)에 의한 응력확대계수가 Unger의 결과보다 이론해에 잘 접근한다. 물론 균열부에서 균열요소를 사용한 경우가 일반 8절점 매개변수형 유한요소로 모델링한 경우보다 더 정확하다.

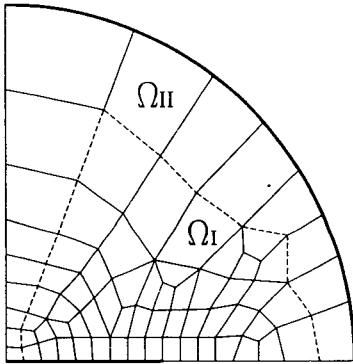


Fig. 7 The finite element model of the rotating circular disk with a center crack in range of $0.2 \leq a/R \leq 0.6$

4. 결 론

원심력을 고려한 균열문제의 새로운 에너지방출률 식을 제안하였다. 제안식은 기존의 J적분식과 마찬가지로 적분경로에 무관하고 탄소성 균열문제에도 적용가능하다. 또한, 결과식은 범함수론과 전미분으로부터 유도된 적분형이므로 일반 수치응력 해석 프로그램과 연계가 간단하고 문헌(1~4)의 해석적방법들과 달리 회전체 균열문제에서 연속체의 형상에 대한 제약이 없다. 참고로 수치응력해석을 위하여 유한요소법을 사용하는 경우는 식(19)가 식(18)보다 에너지방출률 계산에 적합하다.

본 연구에서 중요한 것은 제안식의 형태이다. 비록 균열부를 제외한 경계하중조건에서 기존의 J적분식과 현재식이 동일할지라도 원심력이 존재하는 경우는 두 식의 적분형태가 다르다. 이러한 차이는 수치계산 결과에 중요한 영향을 미친다. 상술하면, 원심력을 고려한 기존의 J적분식들은 균열선단부의 영역적분에서 변위의 편미분때문에 수치적분시 큰 오차가 발생하나 본 연구의 식은 일반함수인 변위에 대한 영역적분으로 표현되어 이 문제점을 해결하였다.

적용예제의 수치결과를 보면 제안식에 의한 균열 해석에서 비록 적은 유한요소로 모델링하였음에도 불구하고 적분경로에 관계없이 에너지방출률이 동일하며 응력확대계수값 역시 기존의 수치결과보다 이론해에 근접한다. 이상으로부터 현재의 방법이 기존의 해석적 및 수치적 해법보다도 원심력하의 균열문제에 적합함을 알 수 있다.

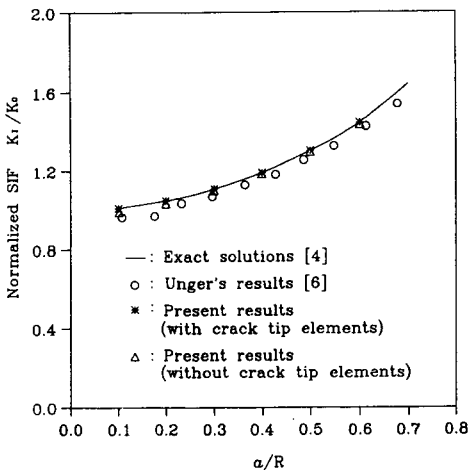


Fig. 8 The normalized K_I values of the center crack problems under plane stress

후 기

이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었으며 저자는 한국학술진흥재단의 연구지원에 감사한다.

참고문헌

(1) Rooke, D. P. and Tweed, J., 1973, "The Stress Intensity Factor of an Edge Crack in a Finite Rotating Elastic Disc," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 11, pp. 179~283

(2) Gregory, R. D. 1989, "The Spinning Circular Disc with a Radial Edge Crack ; an Exact Solution," *Int. J. of Fracture.*, Vol. 41. pp. 39~50

(3) Isida, M. 1981, "Rotating Disk Containing an Internal Crack Located at an Arbitrary Position," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 14, pp.549~555

(4) Rooke, D. P. and Cartwright, D. J. 1976, *Compendium of Stress Intensity Factors*, Her Majesty's Stationery Office, London, pp. 223~227

(5) Li Xiao-Wei and Tao Xue-Wen, 1983. "Section Method for the Calculation of Stress Intensity Factors," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 18, pp. 161~169

(6) Unger, W. J. 1986, "An Energy-Release-Rate Linear Extrapolation Algorithm for Finite Element Calculation of Mode I Stress Intensity Factors," *Engng. Fracture Mech.*, Vol.24, pp. 445~452

(7) Rice, J. R. 1968, "A Path-Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks," *J. Appl. Mech.*, Vol. 35. pp. 376~386

(8) De Lorenzi, H. G. 1982, "On Energy Release Rate and the J-Integral for 3-D Crack Configuration," *Int. J. Fracture*, Vol. 19, pp. 183~192

(9) Kishimoto, K. Aoki, S. and Sakata, M. 1980, "On the Path Independent Integral-J," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 13, pp. 841~850

(10) Sakata, M. Aoki S. and Ishii, K. 1977, "J-Integral Analysis for Rotating Disk," *Proc. Int. Conf. Fracture Mech. Tech.*, Vol. 1, pp. 515~523

(11) Lee T. W. and Grosse, I. R. 1993, "Energy Release Rate by a Shape Design Sensitivity Approach," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 44, pp. 807~819

(12) Lee, T. W. 1993, "The Energy Release Rate of the Two Dimensional Cracked Body under Thermal Stresses, Body Forces and Crack-Face Traction," 대한기계학회논문집, 제17권, pp. 2172~2180