

〈技術論文〉

폐쇄계를 포함하는 탄성 기계시스템의 동역학적 해석

안덕환* · 이병훈**

(1993년 10월 29일 접수)

Dynamic Analysis of Flexible Mechanical Systems

D. H. Ahn and B. H. Lee

Key Words : Flexible Multibody System(탄성 다물체계), Joint Coordinates(조인트좌표), Velocity Transformation Technique(속도 변환기법), Generalized Coordinate Partitioning Method(일반 좌표분할법)

Abstract

This paper presents a systematic method for the dynamic analysis of flexible mechanical systems containing closed kinematic loops. Kinematics between pairs of contiguous flexible bodies is described with the joint coordinates and the deformation modal coordinates. The cut-joint constraint equations associated with the closed kinematic loops are derived, simply using the geometric conditions. The equations of motions are initially written in terms of the joint and modal coordinates using the velocity transformation technique. Lagrange multipliers associated with the cut-joint constraints for closed-loop systems are then eliminated systematically using the generalized coordinate partitioning method, resulting to a minimal set of equations of motion.

1. 서 론

기계시스템(mechanical system)은 강체(rigid body) 또는 탄성체(flexible body)들이 조인트로 연결되어 개방계(open-loop system) 또는 폐쇄계(closed-loop system)를 이루어 서로 상대운동을 하는 물체들의 조합으로서, 최근 이러한 시스템들에 대한 운동방정식은 여러 가지 형태로 유도되었다. 직교좌표로 시스템의 운동방정식을 기술하는 경우 유도와 조작이 간단하여 범용프로그램 작성을 가능하게 하는 이점이 있으나, 최대의 미분-대수방정식(differential-algebraic equations)을 형성하게 된다. 따라서 수치계산이 비효율적이며 또한 일반적으로 구속조건의 만족을 보장하지 못한다. 반면에 조

인트좌표(joint coordinates)를 사용하여 최소의 가속도항으로 운동방정식을 유도할 경우, 효율적인 수치계산을 할 수 있으나 운동방정식의 유도가 복잡하고 구속조건을 포함시키는데 어려움이 있다.

속도변환기법(velocity transformation technique)⁽¹⁻⁴⁾은 직교좌표로 기술된 다물체계에 대한 운동방정식을 조인트좌표로 변환시키는 방법으로서, 여러 종류의 기구학적 조인트에 대한 상대 조인트 속도로부터 각 물체의 절대속도를 구할 수 있으며, 직교좌표(Cartesian coordinates)의 장점인 일반성과 조인트좌표의 장점인 효율성을 얻을 수 있다. 그러나 조인트좌표로 운동방정식을 표현할 경우에도 개방계에 대해서는 구속조건이 없는 최소의 미분방정식을 구성하게 되어 효율적인 해석을 할 수 있으나 폐쇄계의 해석에 있어서는 조인트 절단으로 발생하는 구속조건(constraints)을 포함하게 되므로 직교좌표의 경우와 같이 미분-대수방정식을 형성하게

*부산대학교 대학원

**정회원, 부산대학교 기계공학과 및 기계기술연구소

되어 구속조건을 만족시키는데 어려움이 있다.

일반좌표 분할법(generalized coordinate partitioning method)⁽⁶⁾은 일반좌표를 수치적으로 안정한 독립좌표(independent coordinates)와 종속좌표(dependent coordinates)로 분할하여 독립가속도 항만으로 구성된 운동방정식으로부터 독립좌표 성분을 구하고, 알려진 독립좌표와 구속조건식으로부터 종속좌표성분을 구하는 방법으로써 구속조건에 대하여 안정을 기할 수 있다.

본 연구에서는 속도변환기법을 이용하여 조인트 좌표로 유도된 시스템의 운동방정식⁽⁴⁾에 좌표 분할법을 적용하여 계산효율의 향상과 구속조건식의 안정을 기할 수 있는 알고리즘을 개발한다. 그리고 탄성체를 포함하는 폐쇄계 모델을 해석할 수 있도록 두 물체를 연결하는 일반적인 기구학적 조인트에 따라 각 구속조건식을 체계적으로 구성한다.

본 해석방법의 타당성을 슬라이더-크랭크 기구의 운동해석을 통하여 확인한다.

2. 속도변환기법

Fig. 1에서 XYZ 좌표계는 관성좌표계(inertial reference frame)이며 $x^i y^i z^i$ 좌표계는 물체 i 에 설정된 국부좌표계(local coordinate system)이다. 변형전 국부좌표계에 대한 위치가 s^{ki} 인 탄성체 i 상의 임의점 P^{ki} 가 물체의 변형에 따라 u^{ki} 만큼 이동한다면 이 점의 변형후 관성좌표계에 대한 위치 r^{ki} 는 관성좌표계에 대한 국부좌표계의 위치좌표 r^i , 국부좌표계의 자세를 나타내는 오일러 매개변수 $p^i (= [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3]^T)$ 및 이 점의 국부좌표계에 대한 변위 u^{ki} 를 표현하는 모드좌표 a^i 로 기술될 수 있으므로⁽⁴⁾ 물체 i 의 절대좌표 벡터를 다음과 같이

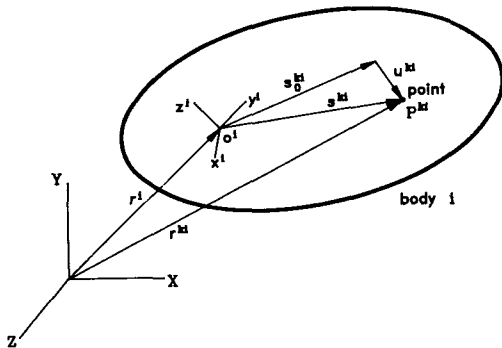


Fig. 1 Inertial and body reference frame

정의한다.

$$x^i = [r^{iT}, p^{iT}, a^{iT}] \tag{1}$$

그리고, 물체 i 의 직교속도벡터(Cartesian velocity vector) \dot{y}^i 는 병진속도 v^i , 각속도 ω^i 및 모드좌표의 시간미분 \dot{a}^i 를 사용하여 물체 i 에 속한 각 절점에 대한 속도를 표현할 수 있다.

$$\dot{y}^i = [v^{iT}, \omega^{iT}, \dot{a}^{iT}]^T \tag{2}$$

본 연구에서는 탄성체 i 의 일반좌표(generalized coordinates) q^{i*} 를 계의 모든 상대 조인트좌표 q^i 와 모드좌표 a^i 의 집합으로 정의한다.

$$q^{i*} = [q^{iT}, a^{iT}]^T \tag{3}$$

임의 물체의 상대 조인트좌표는 그 물체와 기준 물체(reference body)를 연결하는 조인트에서의 상대적 회전각 및 변위로 정의되며 조인트 유형에 따라 운동형태 및 자유도 수가 결정된다.

한 물체의 절대좌표는 그 기준물체의 절대좌표와 일반좌표로부터 결정되어지며, 좌표변환을 기초 물체에서부터 외향경로를 따라 마지막 물체까지 수행함으로써 전체 시스템에 대한 절대좌표를 구할 수 있다. 탄성체를 포함하는 기계시스템의 절대속도 벡터는 일반좌표와 일반속도벡터로 표현될 수 있으며, 다음과 같은 형태의 속도변환식으로부터 구할 수 있다.⁽⁴⁾

$$\dot{y} = S \dot{q}^* \tag{4}$$

$$\dot{x} = S^* \dot{q}^* \tag{5}$$

여기서, S 와 S^* 는 각각 일반속도 q^* 을 절대속도 \dot{y} 와 \dot{x} 으로 변환하는 속도변환행렬로서, 기준물체에 연결된 조인트의 유형에 따라 결정되어진다.

식(4)와 (5)를 각각 시간에 대하여 미분하면 다음과 같은 가속도변환식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{y} = S \ddot{q}^* + \dot{S} \dot{q}^* \tag{6}$$

$$\ddot{x} = S^* \ddot{q}^* + \dot{S}^* \dot{q}^* \tag{7}$$

3. 구속조건

다물체계에 대한 운동은 일반적으로 다음과 같은 형태의 구속조건식과 연관되어 해석되어야 한다.

$$\Phi(q^*, t) = 0 \tag{8}$$

이러한 구속조건은 다음의 세 종류로 구분할 수 있다.

(i) 폐쇄계의 조인트절단에 따른 기구학적 구속 조건

(ii) 시스템의 구동을 위해 부과되는 구동 구속 조건

(iii) 오일러 매개변수 사이의 수학적 구속조건

절단조인트(cut-joint) 구속조건은 두 물체를 연결하는 조인트에 의하여 제한되는 상대운동의 기하학적 조건으로부터 기본적인 구속조건을 절대좌표로 쉽게 기술할 수 있다.

Fig. 2에서 P^{ij} 와 P^{ji} 는 각각 인접한 두 물체 i 와 j 에 정의된 조인트 점이며, 두 점 사이의 거리벡터는 $d=r^i+s^{ji}-r^j-s^{ij}$ 로 주어진다. 벡터 g^i 와 g^j 는 각각 조인트 점 P^{ij} 와 P^{ji} 에 설정된 벡터로서 초기 상태에서 벡터 d 에 그리고 두 벡터 상호간에 서로 수직하다.

먼저 두 물체 i 와 j 의 조인트 정의점 P^{ij} 와 P^{ji} 가 일치되도록($d=0$)하는 구면조인트(spherical joint) 구속조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi^{SPHR} = r^i + s^{ji} - r^j - s^{ij} = 0 \quad (9)$$

그리고 두 물체가 서로 상대운동 중에 벡터 g^i 와 g^j 또는 g^i 와 d 가 항상 수직을 유지하기 위해서는 각각의 내적이 영이어야 하며, 이에 따라 다음과

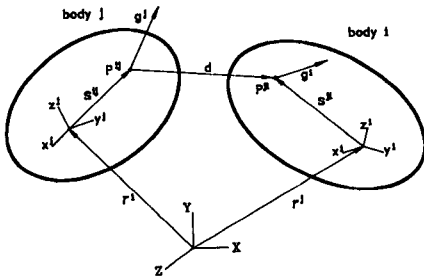


Fig. 2 Two perpendicular vectors and a distance vector

같은 DOT1 구속조건과 DOT2 구속조건을 만들 수 있다.

$$\Phi^{DOT1} = g^{iT} g^j = 0 \quad (10)$$

$$\Phi^{DOT2} = g^{jT} d = 0 \quad (11)$$

이와 같은 기본적인 구속조건의 조합으로 각 조인트 종류에 따라 절단조인트 구속조건을 구성할 수 있으며⁽⁶⁾, Table 1에 나타내었다.

구동 구속조건은 시스템이 원하는 운동을 하도록 조인트 또는 물체의 임의점에 가해지는 구속조건으로 다음과 같이 조인트 또는 절대좌표 및 시간의 함수로 표현된다.

$$\Phi^D = q - q(t) = 0$$

또는

$$\Phi^D = x - x(t) = 0 \quad (12)$$

그리고 오일러 매개변수들은 서로 독립적이지 않으며 다음의 오일러 매개변수 구속조건식을 만족시켜 주어야 한다.

$$\Phi^M = p^T p - 1 = 0 \quad (13)$$

구속조건식의 일반좌표에 대한 자코비안행렬 Φ_{q^*} 는 절대좌표에 대한 자코비안행렬 Φ_x 를 구한 후, 연쇄법칙을 이용하여 Φ_{q^*} 를 구한다. 구속조건이 물체 i 와 j 에 주어지면 Φ_{q^*} 는 다음과 같이 기술된다.

$$\Phi_{q^*} = \Phi_{x^{ij}} S^{ij*} \quad (14)$$

여기서, x^{ij} 는 물체 i 와 j 의 절대좌표벡터이고 S^{ij*} 는 다음과 같이 주어지는 행렬이다.

$$S^{ij*} = \frac{\partial x^{ij}}{\partial q^*} = \begin{bmatrix} S^{i*} \\ S^{j*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{i1}^*, S_{i2}^*, \dots, S_{inb}^* \\ S_{j1}^*, S_{j2}^*, \dots, S_{jn_b}^* \end{bmatrix} \quad (15)$$

Table 1 Composition of cut-joint constraints

Joint type	Composition of constraints	No. of constraints
Spherical joint	SPHR×1	3
Universal joint	SPHR×1+DOT1×1	4
Revolute joint	SPHR×1+DOT1×2	5
Cylindrical joint	DOT1×2+DOT2×2	4
Translational joint	DOT1×3+DOT2×2	5

여기서, Nb 는 시스템을 이루는 물체수이다.

모든 구속조건에 대한 자코비안행렬을 조합하면 시스템의 구속조건 자코비안행렬이 된다.

4. 운동방정식

다물체계의 운동방정식은 라그랑지 방정식과 속도 및 가속도변환식을 이용하여 다음과 같이 조인트좌표로 유도할 수 있다.⁽⁴⁾

$$M^* \ddot{q}^* = Q^* - \Phi_{q^*}^T \lambda \quad (16)$$

여기서, λ 는 라그랑지승수이며,

$$M^* = S^{*T} M S^* \quad (17)$$

$$Q^* = S^{*T} \left[F - M \dot{S}^* \dot{q}^* - Kx - \dot{M} \dot{x} + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right)^T \right] \quad (18)$$

이다. 또한 T 는 시스템의 운동에너지이고, M , K 그리고 F 는 각각 절대좌표계에서 표현된 시스템의 질량 행렬(mass matrix), 강성 행렬(stiffness matrix) 및 힘벡터(force vector)이다.

한편, 구하고자 하는 해는 운동방정식과 함께 다음과 같은 구속조건식을 만족하여야 한다.

$$\Phi(q^*, t) = 0 \quad (19)$$

식(19)를 시간에 대하여 1차 및 2차 미분하여 기구학적 속도식과 가속도식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_{q^*} \dot{q}^* = -\Phi_t \quad (20)$$

$$\Phi_{q^*} \ddot{q}^* = \gamma \quad (21)$$

여기서,

$$\gamma = -\dot{\Phi}_{q^*} \dot{q}^* - \ddot{\Phi}_t \quad (22)$$

이며, $\Phi_t \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$ 이다.

식(16)과 (21)을 결합하면 다음과 같이 미분-대수 방정식 형태의 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M^* \Phi_{q^*}^T \\ \Phi_{q^*} \ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}^* \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^* \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (23)$$

한편, 크기 $m \times n$ 이고 r 개의 잉여행을 가지는 임의의 사각행렬 A 에 대하여 완전 피봇을 수반하여 상삼각 행렬 U 와 하삼각 행렬 L 로 $L-U$ 분해과정을 수행할 수 있다. $L-U$ 분해후에 r 개의 잉여행들은 A 행렬의 하단에 위치하게 되며 A 의 행계수(row rank)는 $m-r$ 이 된다. 크기 $(m-r) \times (m$

$-r)$ 인 하삼각 행렬 L 과 상삼각 행렬 U 는 좌상단에 위치하게 되며 사각행렬 R 은 우상단에 위치하게 된다.

임의의 행렬 A 는 자코비안행렬 Φ_{q^*} 로 대체될 수 있으며 일반좌표 q^* 는 그 요소들이 Φ_{q^*} 의 열 인덱스(column index)에 대응되므로 L 또는 U 의 열 인덱스에 대응되는 종속좌표 u^* 와 R 의 열 인덱스에 대응되는 독립좌표 v^* 로 분해될 수 있다.⁽⁵⁾

$$q^* = [u^{*T} \ v^{*T}]^T \quad (24)$$

일반좌표 q^* 를 u^* 와 v^* 로 분할하는 것과 같이 자코비안행렬 Φ_{q^*} 도 Φ_{u^*} 와 Φ_{v^*} 로 분할할 수 있으며 행렬 L , U 및 R 로 구성할 수 있다.

$$\Phi_{q^*} = [\Phi_{u^*} \ \Phi_{v^*}] \quad (25)$$

$$\Phi_{u^*} = LU \quad (26)$$

$$\Phi_{v^*} = LR \quad (27)$$

식(23)을 일반좌표 q^* 의 u^* 와 v^* 로의 분할에 대응하는 형태로 다시 기술하면 다음과 같다.

$$M^{*u^*u^*} \ddot{u}^* + M^{*u^*v^*} \ddot{v}^* + \Phi_{u^*}^T \lambda = Q^{*u^*} \quad (28)$$

$$M^{*v^*u^*} \ddot{u}^* + M^{*v^*v^*} \ddot{v}^* + \Phi_{v^*}^T \lambda = Q^{*v^*} \quad (29)$$

$$\Phi_{u^*} \ddot{u}^* + \Phi_{v^*} \ddot{v}^* = \gamma \quad (30)$$

또한, 식(20)도 다음과 같이 기술된다.

$$\Phi_{u^*} \dot{u}^* + \Phi_{v^*} \dot{v}^* = -\Phi_t \quad (31)$$

식(30)과 (31)에서 Φ_{u^*} 는 비특이행렬(nonsingular matrix)이므로 종속속도 \dot{u}^* 와 종속가속도 \ddot{u}^* 에 대하여 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{u}^* = H \dot{v}^* - \Phi_{u^*}^{-1} \Phi_t \quad (32)$$

$$\ddot{u}^* = H \ddot{v}^* - \Phi_{u^*}^{-1} \gamma \quad (33)$$

여기서,

$$H = -\Phi_{u^*}^{-1} \Phi_{v^*} \quad (34)$$

식(28)과 (30)을 각각 λ 와 \ddot{u}^* 에 대하여 정리하여 식(29)에 대입하면 다음과 같이 독립가속도 항으로 표현된 수정 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\overline{M} \ddot{v}^* = \overline{Q} \quad (35)$$

여기서,

$$\overline{M} = (M^{*v^*v^*} + H^T M^{*u^*v^*}) + (M^{*v^*u^*} + H^T M^{*u^*u^*}) H \quad (36)$$

$$\overline{Q} = Q^{*v^*} + H^T Q^{*u^*} - (M^{*v^*u^*} + H^T M^{*u^*u^*}) \Phi_{u^*}^{-1} \gamma \quad (37)$$

Milne 예측공식과 Hamming 수정공식을 이용한

예측수정법 (predictor-corrector method)⁽⁶⁾을 사용하여 식(35)를 수치적분함으로써 독립속도 \dot{v}^* 와 독립좌표 v^* 를 구할 수 있으며, 식(32)와 다음의 Newton-Raphson 반복식으로부터 종속속도 \dot{u}^* 와 종속좌표 u^* 를 구할 수 있다.

$$\Phi_{u^*}(u_j^*) \Delta u_j^* = -\Phi(u_j^*) \quad (38)$$

$$u_{j+1}^* = u_j^* + \Delta u_j^* \quad (39)$$

여기서, j 는 반복계산 회수이다.

식(23)에서 라그랑지승수를 제거하고 최소의 독립가속도 향으로 기술된 식(35)는 개방계와 같이 미분 방정식의 형태로 나타나며 수치적으로 안정한 독립좌표성분을 구할 수 있다. 또한 이 독립좌표값과 식(38)로부터 직접 구속조건을 만족하는 종속좌표값을 구하기 때문에 구속조건식에 대한 안정도가 높다.

5. 수치예제 및 검토

본 연구에서 개발된 알고리즘을 이용하여 폐쇄계인 슬라이더-크랭크 기구의 운동을 해석하였다. Fig. 3에서 크랭크는 길이 15.24 cm인 강체막대로 가정하였으며 슬라이더는 질량이 없다고 보았다. 그리고 탄성을 갖는 연결봉의 물성치는 Table 2와 같다. 연결봉의 변형모드를 해석하기 위하여 유한요소 모델은 2개, 4개 및 10개로 등분된 보요소

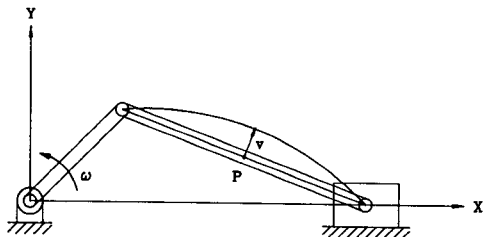


Fig. 3 Slider-crank mechanism with a flexible connecting rod

Table 2 Material properties of a flexible connecting rod

Mass density (g/cm ³)	7.83
Young's modulus (dyne/cm ²)	2 × 10 ¹²
Diameter (cm)	0.64
Length (cm)	30.48

(beam element)를 가지는 3가지로 하였으며, 경계 조건은 봉의 수직방향과 축방향의 변형만 허용되도록 구속하였다. 초기에 크랭크, 연결봉 및 슬라이더는 X축 상에 위치하며, 초기 탄성변형은 없는 것으로 가정한다. 이 기구는 초기위치에서 크랭크에 일정한 각속도 $\omega=1200$ rpm의 구동조건을 주어 0.05초 동안 시뮬레이션 하였다.

Fig. 4는 연결봉 중심점 P의 횡방향 변형량의 길이에 대한 비율을 나타내고 있다. 봉의 변형이 초기위치 부근에서 크게 나타나는 것은 그 위치에서 횡방향의 속도가 가장 크며 또한 관성력이 크게 작용하기 때문이라 사료되며, 유한요소 모델의 요소수가 많아질수록 봉의 자유도가 증가하여 변형량이 커짐을 알 수 있다. 이 결과는 절대좌표를 사용하여 해석한 경우와 비교하여 잘 일치한다.⁽⁷⁾ 본 예제에서는 슬라이더와 지면사이의 병진조인트를 절단하여 개방계로 만들었는데 조인트 절단에 따른 기구학적 구속조건도 정확히 만족됨을 확인하였다. 시스템의 운동은 3개의 조인트좌표, 2개의 모드좌표 등 모두 5개의 일반좌표와 2개의 기구학적 구속조건, 1개의 구동구속조건 등 모두 3개의 구속조건으로 기술되며, 좌표분할법을 이용하여 2개의 독립가속도향으로 표현된 수정 운동방정식 (35)는 8개로 구성되는 식(23)에 비하여 적분효율과 구속조건 만족도에서 효과적이라 사료된다.

6. 결 론

폐쇄계를 포함하는 탄성 다물체계에 대한 체계적인 동역학해석 알고리즘을 개발하였다. 조인트좌표

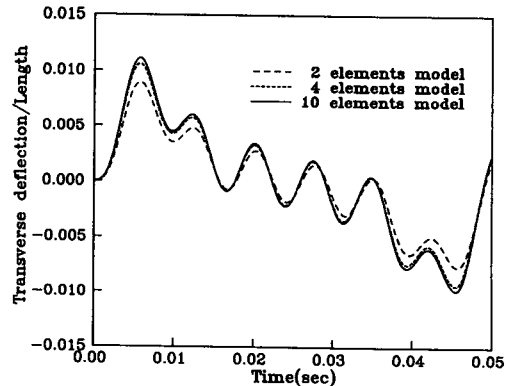


Fig. 4 Transverse deformation at the midpoint p of the connecting rod

및 모드좌표를 일반좌표로 정의하고 절단 조인트 구속조건은 조인트의 기하학적 형상에 따라 절대좌표계에서 유도하였으며, 속도변환기법을 이용하여 조인트 좌표에 대한 자코비안 행렬을 구하였다. 일반좌표를 독립좌표와 종속좌표로 분할하여 독립가속도항으로 구성된 수정 운동방정식을 유도하였다. 수정 운동방정식으로부터 독립좌표성분은 구해지며, 종속좌표성분은 알려진 독립좌표성분을 근거로 대수적인 관계식으로부터 구할 수 있다. 수치적분을 통하여 구해진 독립좌표로부터 종속좌표는 Newton-Raphson 반복식을 통하여 구함으로써 구속조건을 만족하는 좌표를 구하였다. 본 해석방법은 슬라이더-크랭크 기구의 운동 해석예를 통하여 그 타당성을 확인하였으며, 폐쇄계를 포함하는 일반적인 기계시스템의 동역학 해석에 효과적으로 적용될 수 있으리라 사료된다.

참고문헌

- (1) Jerkovsky, W., 1978, "The Structure of Multibody Dynamics Equations," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 3, pp. 173~182.
- (2) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1986, "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations," *Trans. of ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 176~182.
- (3) Chang, C. W. and Shabana, A. A., 1990, "Spatial Dynamics of Deformable Multibody Systems With Variable Kinematic Structure: Part 1-Dynamic Model, Part 2-Velocity Transformation," *Trans. of ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, pp. 160~167.
- (4) Lee, B. H., Yoo, W. S. and Kwak, B. M., 1993, "A Systematic Formulation for Dynamics of Flexible Multibody Systems Using the Velocity Transformation Technique," *J. Mechanical Engineering Science, IMechE*, Vol. 207, No. c4, pp. 231~238.
- (5) Wehage, R. A. and Haug, E. J., 1982, "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems," *J. Mechanical Design*, Vol. 104, pp. 247~255.
- (6) James, M. L., Smith, G. M. and Wolford, J. C., 1985, *Applied Numerical Methods for Digital Computation*, Haper & Row.
- (7) Song, J. O. and Haug, E. J., 1980, "Dynamic Analysis of Planar Flexible Mechanisms," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 24, pp. 359~381.
- (8) Haug, E. J., 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Vol. 1: Basic Method, Allyn and Bacon.