

〈論 文〉

막대형 시편의 종진동에 대한 동적모형 및 그 적용범위의 고찰

안태길* · 강기호* · 김광준*

(1994년 7월 1일 접수)

Investigation of Dynamic Models for Longitudinal Vibration of a Rod-Type Specimen and Their Useful Range

T. K. Ahn, K. H. Kang and K. J. Kim

Key Words : Longitudinal Vibration of a Rod-Type Specimen (막대형 시편의 종방향 진동),
Dynamic Model (동적모형), Phase Velocity (파의 속도), Transmissibility (전달률)

Abstract

One of the most influential factors on estimating the complex modulus by using longitudinal vibration of a rod-type specimen is the accuracy of the approximate models for describing the dynamic behavior of the specimen. Performance of several approximate models is investigated analytically on the basis of the Pochhammer-Chree theory in case of infinite specimen and numerically on the basis of the finite element analysis in case of finite specimen. The frequency range where each model gives good approximation and its accuracy in that range are determined.

기 호 설 명

| | |
|---|--|
| <p>A : 시편의 단면적</p> <p>a : 시편의 반경</p> <p>d : 시편의 지름</p> <p>E^* : 복소탄성계수</p> <p>E : 저장탄성계수</p> <p>E_a : 결보기 저장탄성계수</p> <p>F : 힘</p> <p>f : 주파수 (Hz)</p> <p>J_0, J_1 : 제1종 Bessel 함수</p> <p>j : 복소기호 ($=\sqrt{-1}$)</p> <p>K : 관성반경</p> <p>k_i : $i=1,2,3,4$, Mindlin 모형에서의 보정계수</p> <p>L : 시편의 길이</p> <p>M : 부가질량</p> | <p>m : 시편의 질량</p> <p>p : $2\pi/\text{파장}$</p> <p>R : 양단 제한효과를 표현하는 무차원수</p> <p>r : 반경좌표</p> <p>T_e : 기초이론 모형에 대한 전달률</p> <p>t : 시간</p> <p>u : 반경방향의 변위</p> <p>v_i : 동적모형에 의한 파의속도</p> <p>w, w_0 : 축방향변위 평균분포 성분의 크기</p> <p>z : 종좌표</p> <p>γ : 시편 질량에 대한 부가질량의 비 (M/m)</p> <p>ζ : 복소 무차원 변수</p> <p>η : 손실인자</p> <p>λ : 파장</p> <p>λ_a : 결보기 파장</p> <p>ν : Poisson비</p> <p>ρ : 시편의 밀도</p> |
|---|--|

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

Ψ : 축방향변위 2차 분포성분의 크기
 ω : 주파수 (rad/sec)

1. 서론

점탄성재료는, 필요한 기계적 동특성을 갖도록 성형 제작이 가능하고 제조공정이 경제적인 뿐 아니라, 금속과의 접착성도 우수하여, 기계 및 건축 구조물의 충격, 진동 및 소음의 차단과 제어에 널리 이용되고 있다. 이러한 진동저감과 관련된 점탄성 재료의 주요 물적 특성치는 탄성계수와 손실률로서, 이들에 대한 보다 정확한 정보는 점탄성재료를 이용한 방진, 완충 설계를 위해 필수적이라 할 수 있다.

그러나 점탄성재료의 동적 물성치는 일반 금속과는 달리 온도, 주파수에 의해 크게 영향을 받으므로 점탄성재료의 물성치를 구할 때에는 세심한 주의가 필요하다.^(1,2) 점탄성재료의 주파수에 대한 물성치 특성을 정확히 구하기 위하여 고려하여야 할 사항은 시편의 실제 거동을 정확히 묘사할 수 있는 모형과 실험방법이라 할 수 있다. 그 이유는 시편의 실제 거동을 묘사하는 모형의 정확도에 따라 그 모형의 적용가능한 주파수영역이 정하여지고, 실험방법에 따라 측정오차에 민감하게 영향을 받는 주파수구간이 달라지기 때문이다.⁽³⁻⁵⁾

따라서 본 연구에서는 점탄성재료의 물성치 추출에 이용되는 막대형 시편의 거동을 묘사하기 위하여 지금까지 제시된 여러 모형을 살펴보고 각 모형의 적용가능성 및 그 한계를 검토하고자 한다.

2. 막대형 시편의 모형

Fig. 1과 같은 길이가 유한한 막대형 시편의 종진동과 관련하여, 시편의 거동을 3차원 선형 변형범위내에서 해석적으로 정확히 묘사하여 그 해를 얻는 것은 현실적으로 많은 어려움이 있기 때문에, 현실적으로는 논리적 타당성과 적용현실성 등에 기반을 둔 가정을 통하여 막대형 시편의 거동을 묘사하게 된다. 따라서 이 장에서는 여러가지 가정에 따른 막대형 시편의 종진동 모형을 살펴보고자 한다.

2.1 기초이론 모형

막대형 시편의 종진동을 연속체로 모형화하는 방

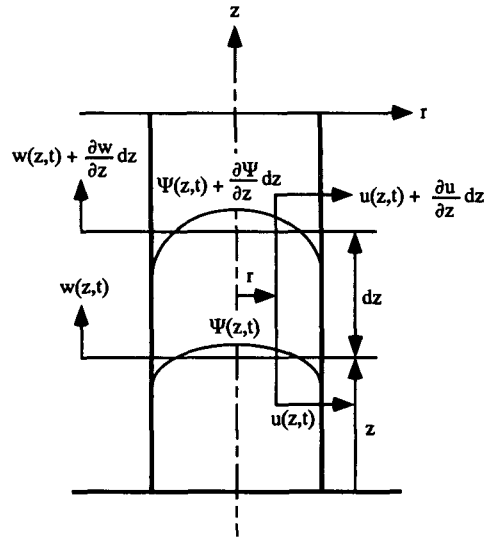


Fig. 1 Model for longitudinal vibration of a block type specimen

법중에서 가장 간단한 것은, 종방향으로의 변형만이 존재하며 변형전 축에 수직인 평면단면은 변형후에도 평면을 유지한다는, 즉 단면에서의 응력은 균일하게 분포한다고 가정하는 이론이다. 이 가정에 따르면 시편의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.⁽⁶⁾

$$\rho \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} - E^* \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

여기서, E^* 는 시편의 복소탄성계수로서, 탄성계수인 E 및 손실률 η 와 $E^* = E(1 + j\eta)$ 의 관계로 표현되며, ρ 는 시편의 밀도를 나타내고, $w(z, t)$ 는 시편의 종좌표 z 및 시간 t 에서 z 방향으로의 동적변위를 나타낸다. 일반적으로 시편의 종진동시험시 양단에서 마찰이 없는 완전한 유향상태를 실현할 수 없으므로 실용적인 측면에서 시편의 양단을 접착하게 되는데, 이 모형에서는 이러한 시편 끝단에서의 접착현상을 고려할 수 없다.

2.2 Love 모형

기초이론 모형은 시편의 종방향 변형만 고려하기 때문에 반경방향 변형의 영향이 작은 저주파영역에서 유효한 식이라 할 수 있다. 시편의 폭이 크거나, 파장이 짧은 고주파영역에 관심이 있는 경우에는 축방향으로의 파동 전달효과가 고려되어야 한다. Love 모형에서는 기초이론과 마찬가지로 평면단면은 변형후에도 평면을 유지하고 단면상에서의

응력은 균일하게 분포한다고 가정하며, 반경방향 변형에 의한 관성을 추가적인 항으로 고려한다. Love는 시편의 반경방향 변위가 반경방향 좌표 r 과 종방향 변형률에 비례한다고 다음과 같이 가정하였다.

$$u(r, z, t) = -\nu r \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \quad (2)$$

여기서, $u(r, z, t)$ 는 반경방향 변위이고 ν 는 Poisson비이다. 이러한 가정으로부터 Hamilton 정리를 이용하여 유도한 운동방정식은 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[w(z, t) - (\nu K)^2 \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} \right] - E^* \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

여기서, K 는 시편의 관성반경(radius of gyration)으로 직경이 d 인 원형단면의 경우 $d/(2\sqrt{2})$ 이다. 그러나, 전절의 기초이론 모형과 같이 이 모형도 막대형 시편 양단에서의 접착조건을 고려하고 있지 못하며, 복소탄성계수 외에도 재료의 Poisson비에 대한 정보가 있어야 함에 유의할 필요가 있다.

2.3 Bishop 모형

Bishop에 의해 제안된 이 모형은 Love 모형에서와 같은 가정하에서 반경방향 변위에 대한 가정의 결과로 발생하는 전단응력을 추가적으로 고려하였다. 원형 단면 시편에 대하여 Hamilton 정리로부터 유도된 운동방정식은 다음과 같다.⁽⁷⁾

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[w(z, t) - (\nu K)^2 \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} \right] - E^* \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} - \frac{\nu^2 a^2}{4(1+\nu)} \frac{\partial^3 w(z, t)}{\partial z^3} \right] = 0 \quad (4)$$

여기서, a 는 시편의 반경이다. 이 모형은 앞의 두 모형들과 달리 시편 양단에서의 접착조건을 묘사할 수 있으며, Love 모형에서와 같이 복소탄성계수 추출에 이용시 재료의 Poisson비에 대한 정보를 필요로 하게 된다.

2.4 Mindlin 모형

Mindlin 등에 의해 제안된 이 모형에서는, 축방향 변형은 균일분포와 2차 분포의 합으로 표시할 수 있다고 가정하였고 반경방향 변형은 반경좌표에 비례하여 선형적으로 분포한다고 가정하여, 3차원 변형을 다음과 같은 근사식으로 나타내었다.⁽⁸⁾

$$u(r, z, t) = \frac{r}{a} u(z, t) \quad (5)$$

$$w(r, z, t) = w(z, t) + \left(1 - 2\frac{r^2}{a^2}\right) \Psi(z, t) \quad (6)$$

여기서, $u(z, t)$ 는 시편표면 $r=a$ 에서 반경방향 변형의 크기를 나타내며, $w(z, t)$ 와 $\Psi(z, t)$ 는 각각 축방향으로의 평균 변형 및 2차 변형분포 성분의 크기를 나타낸다. Bishop 모형에서의 반경방향 변위에 대한 가정(식(2))의 경우에는 축방향 응력과 전단응력만이 존재하나, Mindlin 모형에서는 축방향 응력과 반경방향 전단응력 뿐만 아니라 반경방향 및 원주방향 수직응력도 존재하게 된다. 이러한 가정하에서 Hamilton 정리를 이용하여 유도된 운동방정식은 다음과 같다.⁽⁸⁾

$$\rho a^2 \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} - \frac{E^*(1-\nu)a^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} - \frac{2E^*\nu a}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\rho a^2 k_3^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - k_2^2 \frac{E^*}{2(1+\nu)} \left[a^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} - 4a \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial z} \right] + \frac{4E^*}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[k_1^2 u(z, t) + k_1 \nu a \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \right] = 0 \quad (8)$$

$$\rho a^2 k_4^2 \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} - \frac{E^*(1-\nu)a^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} - 3 \frac{E^*}{(1+\nu)} \left[a \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - 4\Psi(z, t) \right] = 0 \quad (9)$$

여기서, k_1 과 k_2 는 $u(z, t)/a$ 와 $[\partial w(z, t)/\partial z - 4\Psi(z, t)/a]$ 를 각각 보정해 주는 상수이며, k_3 과 k_4 는 각각 $\partial u(z, t)/\partial t$ 와 $\partial \Psi(z, t)/\partial t$ 에 대한 보정상수이다. 이 모형은 전절의 Bishop 모형과 같이 시편 양단에서의 접착조건을 나타낼 수 있으며, 복소탄성계수 추출에 이용시 재료의 Poisson비에 대한 정보가 필요하다.

3. 종진동에 대한 여러 모형의 적용한계 고찰

여기서는 앞에서 살펴본 여러모형을 이용하여 시편의 동적 물성치를 추출하고자 할 때 각 모형의 타당성 정도와 이용 가능한 주파수범위를 알아보고자 한다. 길이가 유한한 시편의 거동에 대한 엄밀해는 제시된 바 없고, 무한길이의 탄성재료 시편에 대한 엄밀이론으로는 Pochhammer-Chree 이론이 유일하다. 따라서 무한길이가 원기둥형 탄성 막대시

편에 대해서는 이 이론을 기준으로 삼고, 유한길이 점탄성 시편에 대해서는 3차원 변형을 가정한 유한 요소법을 이용하여 각 모형의 타당성 및 적용한계를 살펴보도록 한다.

3.1 무한길이의 탄성 시편

무한길이 원형단면 시편에 대한 각 모형의 타당성을 살펴보기 위하여 각 모형으로부터 유도된 파의 속도(phase velocity)와 엄밀이론으로부터 유도된 파의 속도를 비교하고자 한다. 시편이 무한길이이므로 파는 축의 한 방향으로만 진행하게 되어 시편의 반경방향 변위 u 와 종방향 변위 w 는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$u(r, z, t) = U(r) e^{j(pz - \omega t)} \quad (10)$$

$$w(r, z, t) = W(r) e^{j(pz - \omega t)} \quad (11)$$

여기서, w 는 주파수이고 $j = \sqrt{-1}$ 이며, p 는 파장을 λ 라고 할 때 $2\pi/\lambda$ 이다. Pochhammer-Chree의 운동방정식으로부터 $U(r)$ 과 $W(r)$ 을 구할 수 있으며, 시편의 표면에서 응력이 0이라는 조건을 이용하여 파의 속도와 파장 사이의 관계를 구할 수 있다. 이때 파의 속도 v 는 ω/p 로 정의되며, 파장과 의 관계는 Bancroft가 제시한 다음과 같은 식을 이용하여 수치적으로 구할 수 있다.⁽⁹⁾

$$(\alpha - 1)^2 \varphi(h\alpha) - (q\alpha - 1)[\alpha - \varphi(g\alpha)] = 0 \quad (12)$$

여기서,

$$\alpha = \left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 (1 + \nu)$$

$$q = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}$$

$$h = \frac{2\pi}{\lambda} (q\alpha - 1)^{1/2}$$

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} (2\alpha - 1)^{1/2}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$$

$$\varphi(y) = y \frac{J_0(y)}{J_1(y)}$$

J_0, J_1 : 제1종 Bessel 함수

v_p : Pochhammer-Chree 이론의 파의 속도

$$v_0 = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$$

기초이론 모형에 의한 파의 속도 v_E 는 다음과 같다.

$$v_E = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \quad (13)$$

Love 모형에 의한 파의 속도 v_L 는 다음과 같다.

$$v_L = \left[\frac{E}{\rho} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \nu^2}{2} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (14)$$

Bishop 모형에 의한 파의 속도 v_B 는 다음과 같다.

$$v_B = \left[\frac{E}{\rho} \frac{1 + \frac{\pi^2 \nu^2}{4(1+\nu)} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2}{1 + \frac{\pi^2 \nu^2}{2} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (15)$$

Mindlin 모형에 의한 파의 속도 v_M 는 다음의 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

여기서,

$$a_{11} = \frac{k_2^2 E \pi^2}{2(1+\nu)} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 + \frac{4k_1^2 E}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \rho k_3^2 \pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 v_M^2$$

$$a_{22} = \left[\frac{2E(1-\nu)\pi^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 - 2\rho\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 v_M^2 \right]$$

$$a_{33} = \frac{2}{3} \left[\frac{E(1-\nu)\pi^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 + 12 \frac{E}{(1+\nu)} - \rho k_4^2 \pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 v_M^2 \right]$$

$$a_{12} = 4k_1 \frac{E\nu\pi}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{d}{\lambda}\right)$$

$$a_{13} = 2 \frac{E\pi}{(1+\nu)} \left(\frac{d}{\lambda}\right)$$

한편 Mindlin 모형에서의 보정계수 k_i ($i=1, 2, 3, 4$)를 결정하기 위하여 다음과 같은 목적함수를 설정하고, Poisson비가 점탄성재료들이 흔히 갖는 범위의 한 값인 0.49일 때 이 목적함수를 최소화시키는 k_i 값을 구하였다.

$$J = \sum_{i=1}^{60} \left[\frac{v_M[(d/\lambda)_i]}{v_0} - \frac{v_E[(d/\lambda)_i]}{v_0} \right]^2 \quad (17)$$

여기서, $(d/\lambda)_i = 0.05i$ 로서 위 함수를 최소화시키는 의미는 Mindlin 모형이 파장이 $d/3$ 에 이르는 범위내에서 Pochhammer-Chree 모형에 의한 이론치와 오차가 최소화되게 하는 것으로서, 구해진 값은 각각 $k_1 = 2.766E^{-3}$, $k_2 = 3.707E^{-3}$, $k_3 = 4.172E^{-3}$, $k_4 = 5.716E^{-1}$ 이다.

위에서 살펴본 바와 같이 각 모형에 의한 파의 속도는 $\frac{E}{\rho}$, $\frac{d}{\lambda}$ 및 ν 의 함수이다. 일반적으로 점탄성재료의 Poisson비는 주파수 및 온도에 따라

0.20에서 0.50 사이라고 알려져 있으므로, ^(10,11) 각 모형의 파의 속도를 v_0 로 나누어 무차원시킨 값을 ν 가 0.2, 0.3, 0.4, 0.4999일 때 d/λ 에 대하여 나

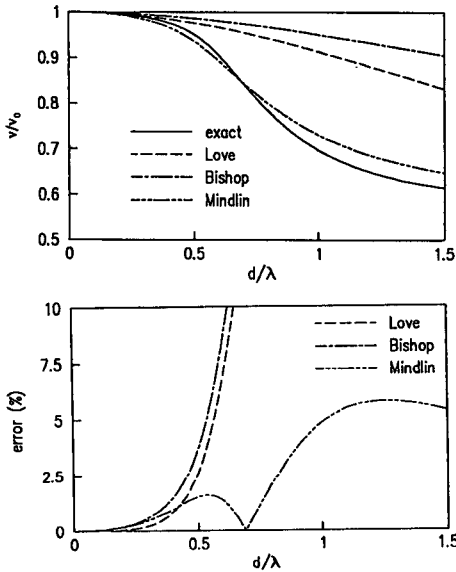


Fig. 2 Phase velocity curves for longitudinal elastic waves in a solid circular cylinder and % errors of the phase velocities with respect to the exact theory ($\nu=0.20$)

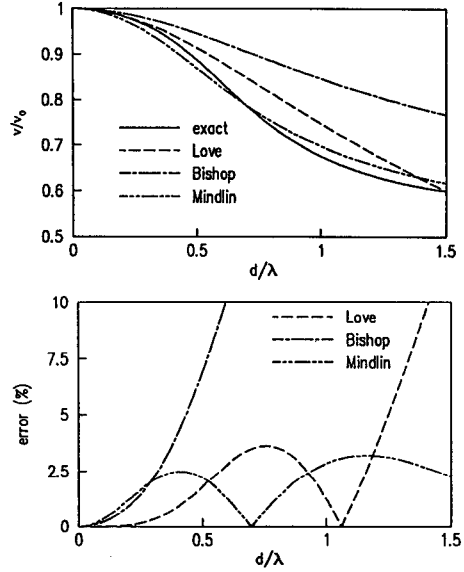


Fig. 4 Phase velocity curves for longitudinal elastic waves in a solid circular cylinder and % errors of the phase velocities with respect to the exact theory ($\nu=0.40$)

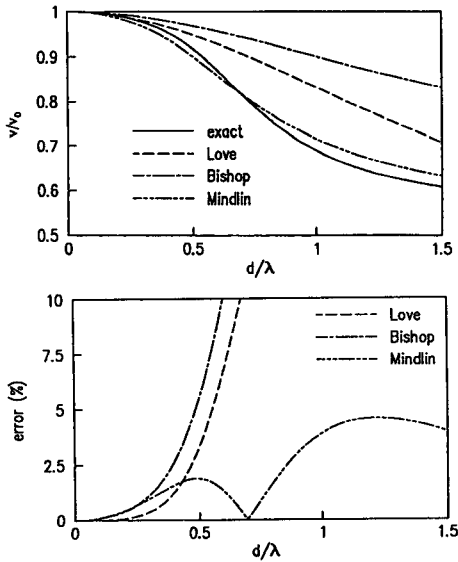


Fig. 3 Phase velocity curves for longitudinal elastic waves in a solid circular cylinder and % errors of the phase velocities with respect to the exact theory ($\nu=0.30$)

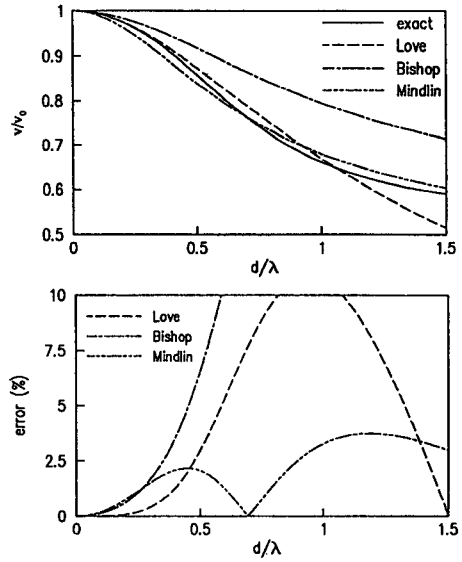


Fig. 5 Phase velocity curves for longitudinal elastic waves in a solid circular cylinder and % errors of the phase velocities with respect to the exact theory ($\nu=0.4999$)

타내고 엄밀이론에 대한 각 모형에 의한 파속의 오차를 산출한 결과는 Figs. 2~5와 같다.

이 그림들을 살펴보면 d/λ 가 0에서 1.5 사이의 범위에서 전반적으로 Mindlin 모형이 엄밀이론에 가장 근접하고 있다(오차 6% 미만). Love 모형은 Poisson비가 0.4999일 때 엄밀이론과의 오차가 4% 미만인 영역은 d/λ 가 1.2 이하일 때이며 이 정도 범위의 작은 오차를 갖는 영역은 Poisson비가 작아짐에 따라 감소하고 있다. Bishop 모형에서 Poisson비가 0.4999일 때 엄밀이론과의 오차가 4% 미만인 영역은 d/λ 가 0.4 이하일 때이며, 이 영역은 Poisson비가 작아짐에 따라 증가하고 있다. 기초이론 모형에서의 파속은 d/λ 에 무관하게 v_0 와 동일한 파의 속도를 가지므로 d/λ 가 0에 근접한 영역을 제외하고는 엄밀이론과 많은 오차가 있음을 알 수 있다.

요약하면, Poisson비가 0.20에서 0.4999 사이 일때, d/λ 가 0.5 이하의 영역에서 Love 모형은 엄밀이론과 4% 이하의 오차수준에서 사용할 수 있고, Bishop 모형은 엄밀이론과 7% 이하의 오차수준에서 사용할 수 있으며, Mindlin 모형은 d/λ 가 1.5 이하의 영역에서 엄밀이론과 4% 이하의 오차수준에서 사용할 수 있다.

3.2 유한길이의 점탄성 시편

유한길이 시편에 대한 각 모형의 타당성을 정성적으로 살펴보기 위하여 Fig. 6에 보인 바와 같이 시편과 부가질량으로 구성된 계의 전달률을 각 모형으로부터 구하고, 이를 유한요소법으로부터 얻어진 전달률과 비교하였다. 이때, 시편의 양단을 접촉하게 되는데, 2절에서 살펴보았듯이 기초이론 모형과 Love 모형은 양단에서의 접촉현상을 정확하게 고려할 수 없으므로 이에 대한 보정작업이 필요하다.⁽¹²⁾ 그런데 양단 접촉현상의 동적 영향을 묘사하는 모형은 아직까지 제시되어 있지 않으므로, 본 연구에서는 정적 영향을 묘사하는 모형을 동적 영역까지 확장하여 적용하기로 한다.

Fig. 7에 나타낸 바와 같이 시편이 양단에서 강체판에 접촉되어 반경방향 변형이 제한되면 축방향 힘(F)과 변위(w)사이의 정적인 관계는 시편의 겉보기 탄성계수 E_a 를 도입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w = \frac{FL}{AE_a} \tag{18}$$

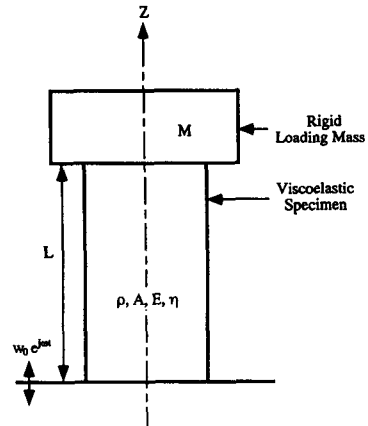


Fig. 6 Schematic diagram of the transmissibility approach for a block-type specimen

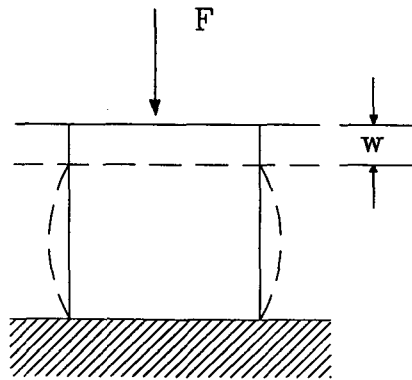


Fig. 7 Shapes of deformation of a specimen with bonded ends due to a normal force

여기서, L 은 시편의 길이이고, A 는 시편의 단면적이다. 이때 실제 시편의 탄성계수 E 와 겉보기 탄성계수 E_a 사이의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_a = RE \tag{19}$$

여기서, R 은 시편의 형상과 재료의 Poisson비의 영향을 고려한 식이며 많은 연구가들에 의해 여러 가지 이론식 및 실험식들이 제안되었다.⁽¹³⁾ 식(18)과 식(19)로부터 다음과 같은 관계가 유도되며,

$$R = \frac{FL}{AEw} \tag{20}$$

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 산출한 R 값을 적용하기로 한다.

전달률 이용법의 개략도는 Fig. 6에 나타나 있

다.⁽⁵⁾ 기초이론 모형을 적용하면, 이 계의 종진동에 대한 지배방정식은 식(1)과 같고 아래와 같은 경계조건을 만족하여야 한다.

$$w(z, t)|_{z=0} = w_0 e^{j\omega t} \quad (21)$$

$$-AE^* \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=L} = M \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} \Big|_{z=L} \quad (22)$$

여기서, M 은 시편의 한쪽 끝에 부착된 강체의 질량이다. 시편 양단에서의 변위의 비인 전달률 T_e^* 는 다음과 같이 유도될 수 있다.⁽¹⁴⁾

$$T_e^* = \frac{w(z, t)|_{z=L}}{w(z, t)|_{z=0}} = \frac{1}{\cos \zeta^* - \gamma \zeta^* \sin \zeta^*} \quad (23)$$

여기서, γ 는 시편 질량에 대한 강체 질량의 비이며, ζ^* 는 다음과 같은 무차원 양이다.

$$\zeta^* = \frac{L}{\lambda} \frac{2\pi}{\sqrt{1+j\eta}} \quad (24)$$

Love 모형 적용시의 운동방정식은 식(3)과 같고 경계조건은 다음과 같다.

$$w(z, t)|_{z=0} = w_0 e^{j\omega t} \quad (25)$$

$$-A \left[\rho (\nu K)^2 \frac{\partial^3 w(z, t)}{\partial z \partial t^2} + E^* \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \right] \Big|_{z=L} = M \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} \Big|_{z=L} \quad (26)$$

전달률은 위에서와 같은 방법으로 유도될 수 있으며, 이후의 모형들에 대한 자세한 표현은 참고문헌⁽¹⁴⁾으로 부터 얻을 수 있다.

Bishop 모형 적용시의 운동방정식은 식(4)와 같고 경계조건은 다음과 같다.

$$w(z, t)|_{z=0} = w_0 e^{j\omega t} \quad (27)$$

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0,L} = 0 \quad (28)$$

$$A \left[\frac{E^* \nu^2 a^2}{4(1+\nu)} \frac{\partial^3 w(z, t)}{\partial z^3} \right] \Big|_{z=L} = M \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} \Big|_{z=L} \quad (29)$$

Mindlin 모형 적용시의 운동방정식은 식(7), (8) 및 식(9)로 주어지며 경계 조건은 다음과 같다.

$$w(z, t)|_{z=0} = w_0 e^{j\omega t} \quad (30)$$

$$u(z, t)|_{z=0,L} = 0 \quad (31)$$

$$\Psi(z, t)|_{z=0,L} = 0 \quad (32)$$

$$-A \left[\frac{E^*(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \right] \Big|_{z=L} = M \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} \Big|_{z=L} \quad (33)$$

시편의 형상에 따른 영향을 파악하기 위하여 주파수에 상관없이 일정한 복소탄성계수를 갖는 점탄성재료를 두가지 시편으로 나누어 상용 유한요소 패키지(MSC/NASTRAN)의 direct response module을 이용하여 전달률함수를 계산하였다. 요소로는 축대칭 삼각형요소(CTRIAX6)를 사용하였으며, 요소의 크기는 해석결과가 수렴할 때까지 감소시켰다. 또한 점탄성재료의 Poisson비는 일반적으로 주파수에 따라 변화한다고 볼 수 있으나, 여기에서는 해석의 편의상 주파수 존성이 없다고 가정하였고, Poisson비가 0.5에 가까울수록 양단에서 반경방향 변형 제한효과가 크므로 Poisson비는 0.499로 하였다. 모의실험에 사용된 시편 및 부가 질량계는 Table 1에 나타나 있고, 이로부터 얻어진 전달률함수는 Fig. 8과 Fig. 9와 같다.

시편의 길이가 직경에 비하여 비교적 긴 #1 시편, 즉 양단 접착의 영향이 적은 경우를 살펴보면 3.1절에서 고찰한 바와 같이 Mindlin 모형의 전달율이 유한요소 모형과 가장 잘 일치하고 다음으로 Love, Bishop, 기초이론 모형순인 것을 알 수 있다. 또한 Love 모형에 있어서 유한요소 모형과 유사한 영역이 무한길이의 시편의 경우보다 작은 것을 알 수 있는데, 이것은 유한요소 모형이 가지는 수치오차와 시편의 길이가 유한함에 의한 오차가 복합되어 나타났다고 생각된다.

시편의 길이가 직경에 비하여 짧은 #2 시편, 즉 양단 접착의 영향이 큰 경우에는 앞의 경우와는 달리 Bishop 모형의 전달율이 유한요소 모형과 가장 잘 일치하고 있으며 Love, Mindlin, 기초이론 모형순이다. 또한 양단 접착의 영향으로 인하여 시편의 결보기 탄성계수가 증가하여 각 모형의 전달률이

Table 1 Specifications of the specimens

| No. | Dia. (mm) | Length(mm) | S(d/4L) | R _{FEM} | E (N/m ²) | η | ρ (kg/m ³) | ν | γ (M/m) |
|-----|-----------|------------|---------|------------------|-----------------------|--------|-----------------------------|-------|----------------|
| #1 | 40 | 160 | 0.06 | 1.04 | 1×10 ⁷ | 0.1 | 1335 | 0.499 | 1.0 |
| #2 | 40 | 5 | 2.0 | 8.56 | | | | | |

앞의 경우보다 높은 주파수영역까지 유한요소 모형과 일치하고 있는 것을 알 수 있다. 따라서 시편의 양단이 접착되었을 때에는 탄성계수로 표현되는

d/λ 보다 결보기 탄성계수로 표현되는 d/λ_a ($\lambda_a = \frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{E_a}{\rho} \right)^{1/2}$)의 관점에서 각 모형의 적용영역을 판단하여야 하며, Mindlin 모형보다는 Bishop 모형이 양단 접착의 영향을 잘 묘사하고 있다고 판단된다.

4. 결 론

점탄성재료 막대형 시편의 거동을 묘사하기 위하여 제시된 여러 모형을 살펴보고, 무한길이 시편의 경우에는 엄밀이론인 Pochhammer-Chree 이론에 근거하고 유한길이 시편의 경우에는 유한요소 모형을 이용하여 각 모형의 타당성 및 적용 한계를 고찰하였다. 그 결과를 살펴보면, 시편의 길이가 직경에 비하여 길어서 양단 접착의 영향이 적은 경우에는 Mindlin 모형이 시편의 거동을 가장 잘 묘사하며 Love, Bishop, 기초이론 모형순이다. Love, Bishop 모형의 경우에는 Poisson비가 0.5에 가까울수록 시편의 거동을 잘 묘사하며, Mindlin 모형의 경우에는 Poisson비에 따라 보정계수를 변화시켜 정확도를 향상시킬 수 있다.

양단 접착의 영향이 큰, 시편의 길이가 직경에 비하여 짧은 경우에는 기초이론 및 Love 모형의 경우에는 양단 접착의 영향을 보정하여야 하고, Bishop 모형이 시편의 거동을 가장 잘 묘사하며 Love, Mindlin, 기초이론 모형순이다.

시편의 양단이 접착되었을 때에는 탄성계수로 표현되는 d/λ 보다 결보기 탄성계수로 표현되는 d/λ_a 로 각 모형의 적용영역을 판단하여야 한다.

참고문헌

- (1) Ganeriwala, S. N., 1992, "Dynamic Mechanical Properties of Viscoelastic Materials," *Second International Congress on Recent Developments in Air- and Structure-Borne Sound and Vibration*, Auburn University, March, pp. 1379~1386.
- (2) Jones, D. I. G., 1974, "Temperature-Frequency Dependence of Dynamic Properties of Damping Materials," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 33, pp. 451~470.
- (3) Edwards, J. L. and Hicks, D. R., 1972, "Useful Range of a Mechanical Impedance Technique for Measurement of Dynamic Properties of

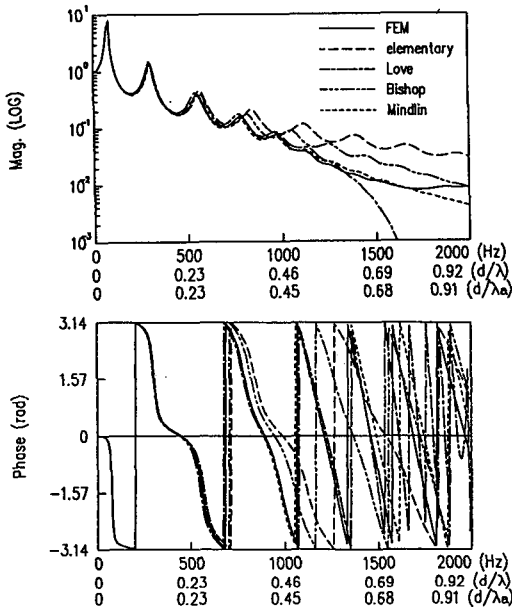


Fig. 8 Transmissibility functions computed from dynamic models and FEM of #1 specimen-added mass system

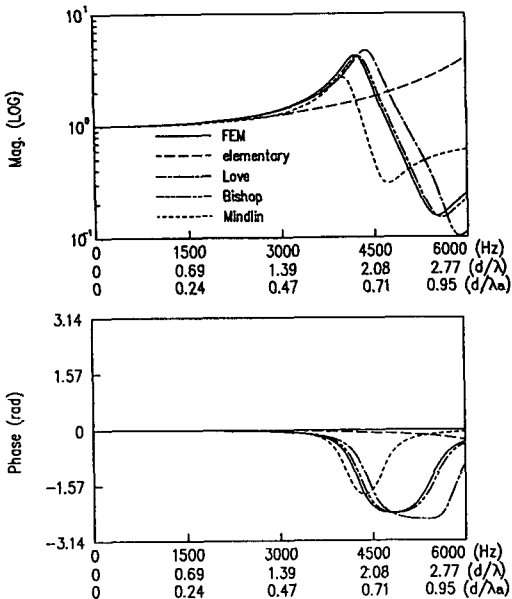


Fig. 9 Transmissibility functions computed from dynamic models and FEM of #2 specimen-added mass system

- Materials," *Journal of Acoustic Society of America*, Vol. 52, pp. 1053~1056.
- (4) Pritz, T., 1981, "Apparent Complex Young's Modulus of Longitudinally Vibrating Viscoelastic Rod," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 77, pp. 93~100.
- (5) 안태길, 허진욱, 김광준, 1992, "전달을 측정 에 의한 점탄성 재료 복소탄성계수 추출시의 민감도 분석," 한국소음진동공학회지, 제2권 제2호, pp. 99~106.
- (6) Abramson, H. N. and et al, 1958, "Stress Wave Propagation in Rods and Beams," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 5.
- (7) Bishop, R. E. D., 1952, "Longitudinal Waves in Beams," *Aeronautical Quarterly*, Vol. 3, pp. 280~293.
- (8) Mindlin, R. D. and McNiven, H. D, 1960, "Axially Symmetric Waves in Elastic Rods", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, pp. 145~151.
- (9) Bancroft, D., 1941, "The Velocity of Longitudi-
nal Waves in Cylindrical Bars," *Physical Review*, Vol. 59, pp. 588~593.
- (10) Gottenberg, W. G. and Christensen, R. M., 1963, "Some Interesting Aspects of General Linear Viscoelastic Deformation," *Transactions of the Society of Rheology*, Vol. 7, pp. 171~180.
- (11) Thomson, K. C., 1966, "On the Complex Poisson's Ratio of a Urethane Rubber Compound," *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 10, pp. 1133~1136.
- (12) Sim, S. and Kim, K. J., 1990, "A Method to Determine the Complex Modulus and Poisson's ratio of Viscoelastic Material for FEM Applications," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 141, pp. 71~82.
- (13) Pritz, T., 1986, "Viszkoelasztikus Tmbk Dinamikai Merevsge s Vesztesgi Tnyezje," *Kp-s Hangtechnika*, Vol. 32, pp. 129~136.
- (14) 안태길, 1994, "점탄성재료의 복소탄성계수 추출," 한국과학기술원 박사학위논문.