

〈論 文〉

여유자유도 로봇의 주기적 운동제어를 위한 역기구학 해의 개발

정용섭* · 최용제**

(1994년 6월 29일 접수)

The Development of an Inverse Kinematic Solution for Periodic Motion of a Redundant Manipulator

Yong Seob Chung and Yong Je Choi

Key Words : Redundant Robot(여유자유도 로봇), Inverse Kinematics(역기구학), Jacobian(자코비안), Pseudo-Inverse(의사역행렬), Repeatability(반복도)

Abstract

This paper presents a new kinematic control strategy for serial redundant manipulators which gives repeatability in the joint space when the end-effector undergoes some general cyclic motions. Theoretical development has been accomplished by deriving a new inverse kinematic equation that is based on springs being conceptually located in the joints of the manipulator. Although some inverse kinematic equations for serial redundant manipulators have been derived by many researchers, the new strategy is the first to include the free angles of torsional springs and the free lengths of the translational springs. This is important because it ensures repeatability in the joint space of a serial redundant manipulator whose end-effector undergoes a cyclic type motion. Numerical verification for repeatability is done in terms of Lie Bracket Condition. Choices for the free angle and torsional stiffness of a joint(or the free length and translational stiffness) are made based upon the mechanical limits of the joints.

기 호 설 명

- x : 로봇 손 기준점의 위치
- θ : 관절변위
- θ_0 : 관절에 설치한 가상적 스프링의 자유각도
- \dot{x} : 로봇 손 기준점의 속도
- J : 속도 자코비안
- $\dot{\theta}$: 관절의 각속도
- \hat{Q} : 트위스트
- r : 관절의 토크
- K : 관절에 설치한 가상적 스프링의 강성을 나타

내는 대각행렬

\hat{f} : 렌치

1. 서 론

여유자유도를 갖는 직렬형 로봇의 기구학 방정식은 주로 자코비안(Jacobian)으로서 표현되며 이러한 여유자유도 로봇의 운동제어(kinematic control)를 위한 역기구학(inverse kinematics) 해는 이 자코비안의 의사역행렬(pseudo-inverse)을 사용하여 구하는 방법이 사용되어져 왔다. Moore-Penrose 의사역행렬은 euclidean norm 해의 최소값을 계산

*금오공과대학 생산기계과

**정회원, 연세대학교 기계설계학과

하는데 사용된다.⁽¹⁾ 이러한 해석방법은 로봇의 관절이 모두 회전관절이거나 모두 직진관절일 때에는 euclidean norm의 최소화가 의미가 있으나, 회전관절과 직진관절이 함께 사용되는 로봇에서는 euclidean norm의 의미가 상실되고, 로봇의 길이 단위에 따라 해의 값이 달라진다. Moore-Penrose의 사역행렬 해법에 더하여 여유자유도를 이용하여 부가적인 일을 수행할 수 있는 다른 해법도 가능하며,⁽²⁾ Whitney⁽³⁾는 가중 의사역행렬(weighted pseudo-inverse)에 의한 해석법을 소개하였다. 그러나 이와 같은 moore-penrose의 의사역행렬 해법이나 가중 의사역행렬에 의한 역기구학 해는, 로봇의 팔 끝이 주기적 운동을 수행할 때 각 관절이 갖는 변위는 매 주기마다 그 값이 변화하게 되므로 로봇이 주기적인 작업을 수행할 수 없게 된다. 따라서 여러 연구자들은 의사역행렬 해법에 있어서의 관절각의 반복도(repeatability) 문제를 지적해 왔다.^(4,4~7) 본 논문에서는 이와 같은 문제의 해결을 위하여 반복도가 유지될 수 있는 일반 의사역행렬 해법을 소개하고자 한다. 이 해법에서는 각 관절에 가상적인 비틀림 혹은 선형 스프링을 설치하고 비틀림 스프링인 경우에는 자유각도(free angle), 선형 스프링인 경우에는 자유길이(free length)의 개념을 사용한다. 이러한 개념으로부터 유도된 여유자유도 로봇의 역기구학 해는 로봇의 팔끝이 주기 운동을 할 때 관절변위의 반복도를 유지시켜 준다. 관절변위의 반복도는 LBC(lie bracket condition)에 의하여 검증되었다.

2. 여유자유도 로봇의 기구학

2.1 일반 의사역행렬에 의한 역기구학 해

Fig. 1은 일반적으로 n자유도를 갖는 직렬형 로봇을 나타낸다. 이 로봇의 조인트영역(joint space)에서의 임의벡터 θ 로부터 작업영역(task space)의 임의벡터 x 로의 기구학적 변환은 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

$$x = f(\theta) \quad (1)$$

여기서, $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ 이며, $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 이다.

먼저 식(1)을 시간에 대해 미분하면 다음의 속도 순기구학 방정식(forward instantaneous kinematic equation) (2)를 얻는다.

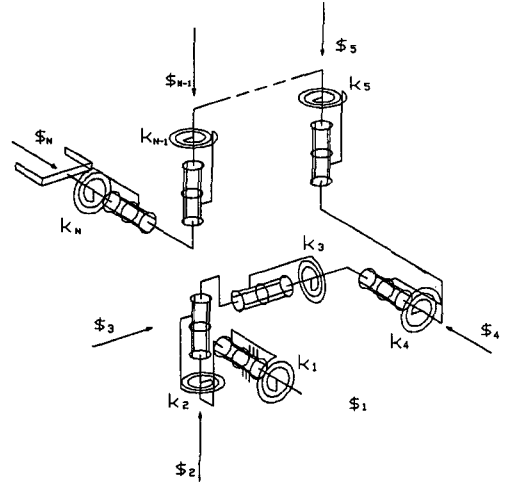


Fig. 1 Kinematic model of n-jointed serial manipulator

$$\dot{x} = J(\theta) \dot{\theta} \quad (2)$$

여기서, $J(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \in R^{m \times n}$ 이다. 임의의 강체가 기준좌표계에 대하여 갖는 순간속도는 이 속도가 작용하고 있는 나선(screw) \mathcal{S} 를 사용하여 $\hat{Q} = \Omega \mathcal{S} = (\mathbf{V}; \mathbf{Q})$ 로 나타낼 수 있는데,^(8,9) 이때 $\Omega \mathcal{S}$ 를 크기 Ω 를 갖는 트위스트(a twist of amplitude Ω)라 한다. Plücker의 원래의 표기에 의하면 트위스트는 이와 같이 Plücker의 축좌표(axis coordinates)로 표현한다. 로봇의 팔 끝이 미소 변위(infinitesimal displacement)에 걸쳐 트위스트(twist) \hat{Q} 로 표현되는 운동을 할 경우에 속도 순기구학 방정식(2)는 다음의 식(3)과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^n \delta\theta_i \mathcal{S}_i \quad (3)$$

여기서, $\delta\theta_i$ 는 미소 관절변위를 나타낸다. 식(3)은 다시 식(4)로 나타낼 수 있다.

$$\hat{Q} \approx J \delta\theta \quad (4)$$

여기서, J 는 \mathcal{S}_i 가 열(column)이 되는 $m \times n$ 행렬이다. 이제, 로봇의 각 관절에 관절의 회전에 의하여 변형되는 비틀림 스프링이 있고 일반적으로 그 비틀림 스프링은 그것의 자유각도로부터 떨어져 있다고 가상한다. 미소운동에서 i 번째 비틀림 스프링이 선형이라 하면 i 번째 스프링 토크 τ_i 와 관절 각 $\theta_i - \theta_{oi}$ 와의 관계는 식(5)와 같다.

$$\tau_i = k_i (\theta_i - \theta_{oi}) \quad (5)$$

여기서, $\theta_i - \theta_{oi}$ 는 현재각도와 자유각도와의 차

이이고 k_i 는 영이 아닌 스프링상수이다. 이 k_i 의 값이 크면 관절회전이 작고 그 값이 작으면 관절회전이 크게 될 것이다. 따라서 각 관절의 관절한계를 고려하여 스프링상수를 선택하면 로봇이 주어진 길을 따라 갈 때 관절한계를 피하는데 도움을 줄 수 있다. 식(5)를 벡터 방정식으로 나타내면 식(6)과 같다.

$$\theta - \theta_0 = \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\tau} \quad (6)$$

여기서, \mathbf{K} 는 관절 강성(stiffness)을 나타내는 $n \times n$ 대각행렬이다. 앞서 임의의 강체의 속도를 트 위스트로 표현하였던 것과 마찬가지로 임의의 강체에 작용하는 힘도 이 힘이 작용하고 있는 나선 \mathbb{S} 에 대하여 표현할 수 있으며 이러한 힘 $f\mathbb{S}$ 를 크기 f 를 갖는 렌치(a wrench of intensity f)라 하며 간단히 $\hat{\mathbf{f}} = (f; m)$ 로 표기한다. 렌치는 Plücker 원래의 표기대로 Plucker의 방사좌표(ray coordinates)로 표현한다. 한편, 로봇의 외부로부터 가해진 힘 $\hat{\mathbf{f}}$ 에 대하여 로봇이 평형을 유지하기 위하여 로봇의 관절에 부가해야 할 토크를 $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$ 라 하면 $\boldsymbol{\tau}$ 는 식(7)과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}} \quad (7)$$

이 때 \mathbf{J} 는 로봇의 속도 자코비안이라 부르며, 이 자코비안의 열벡터(column vector)는 로봇의 각 관절의 회전축에 대하여 기준좌표계에서 표현된 나선들로 구성됨을 알 수 있다. 이제 식(7)을 식(6)에 대입하면 식(8)을 얻을 수 있다.

$$\theta - \theta_0 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}} \quad (8)$$

식(8)의 양변에 \mathbf{J} 를 곱하여 정리하면 식(9)와 같이 표현된다.

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{J}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J}(\theta - \theta_0) \quad (9)$$

이제 다시 식(8)을 미분하면 식(10)을 얻는다.

$$\delta\theta - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T \delta\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{K}^{-1} \delta\mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}} \quad (10)$$

식(10)은 다시 식(11)과 같이 정리될 수 있다.

$$\delta\theta - \mathbf{K}^{-1} \delta\mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T \delta\hat{\mathbf{f}} \quad (11)$$

식(11)의 $\delta\mathbf{J}^T$ 은 $\delta\theta$ 를 포함하고 있으므로 다음의 과정을 통하여 이를 $\delta\mathbf{J}^T$ 로부터 추출하도록 한다. 벡터 $\delta\mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}}$ 의 i 번째 성분은 식(12)로 표현된다.

$$(\delta\mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}})_i = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial \theta_l \partial \theta_j} f_l = \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij} \delta\theta_j \quad (12)$$

여기서, $\Gamma_{ij} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 x_i}{\partial \theta_l \partial \theta_j} f_l$ 이다. 식(12)는 다음의 벡터 방정식(13)으로 나타낼 수 있다.

$$\delta\mathbf{J}^T \hat{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\Gamma} \delta\theta \quad (13)$$

식(1)을 연속적이고 미분가능한 함수라 하면 식(14)가 성립된다.

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \theta_l \partial \theta_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \theta_j \partial \theta_l} \quad (14)$$

식(14)로부터 $\boldsymbol{\Gamma}$ 는 $n \times n$ 대칭행렬이라는 것을 알 수 있다. 식(13)을 식(11)에 대입하여 정리하면 식(15)와 같다.

$$\mathbf{T} \delta\theta = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T \delta\hat{\mathbf{f}} \quad (15)$$

여기서, $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\Gamma})$ 으로서, 관절변위 θ_i , 비틀림 스프링의 자유각도 θ_{0i} , 그리고 스프링 상수 k_i 로 구성되어 있는 $n \times n$ 행렬이다. \mathbf{T} 가 풀랭크(full rank)이면 식(15)는 식(16)으로 표현된다.

$$\delta\theta = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T \delta\hat{\mathbf{f}} \quad (16)$$

여기서, $\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{A}$ 라 하고 식(16)의 양변에 \mathbf{J} 를 곱하면 식(17)과 같다.

$$\mathbf{J} \delta\theta = \mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}^T \delta\hat{\mathbf{f}} \quad (17)$$

이제 식(4)를 식(17)에 대입하면 식(18)을 얻는다.

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}^T \delta\hat{\mathbf{f}} \quad (18)$$

다시 $\mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}^T = \mathbf{C}$ 라 하면 식(18)은 식(19)와 같다.

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{C} \delta\hat{\mathbf{f}} \quad (19)$$

여기서, \mathbf{T} 와 \mathbf{J} 가 모두 풀랭크이면 식(20)을 얻을 수 있다.

$$\delta\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \quad (20)$$

식(20)을 식(18)에 대입하면 다음과 같은 일반 의사역기구학 방정식(21)을 얻는다.

$$\delta\theta = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \quad (21)$$

식(21)은 Lagrangian multiplier method를 통해서도 유도될 수 있다.

정리: \mathbf{J} 가 랭크 m 인 $m \times n$ 행렬이면 $\delta\theta^T \delta\theta$ 를 최소화하는 $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{J} \delta\theta$ 의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta\theta = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \hat{\boldsymbol{\Omega}}$$

증명: $\delta\theta^T A \delta\theta$ 를 최소화하는 $\hat{\Omega} = J\delta\theta$ 의 해는 다음 식을 최소화 함으로써 얻어진다.

$$M = \delta\theta^T A \delta\theta + 2\lambda^T (\hat{\Omega} - J\delta\theta)$$

여기서, λ 는 Lagrangian multiplier의 $m \times 1$ 열(column) 벡터이다. 위의 식을 $\delta\theta_j (j=1, \dots, n)$ 와 $\lambda_i (i=1, \dots, m)$ 에 대하여 미분하면 다음의 식(22)와 (23)을 얻는다.

$$A\delta\theta = J^T \lambda \quad \text{혹은} \quad \delta\theta = A^{-1} J^T \lambda \quad (22)$$

$$\hat{\Omega} = J\delta\theta \quad (23)$$

식(22)를 식(23)에 대입하면 식(24)와 같이 표현된다.

$$\hat{\Omega} = JA^{-1} J^T \lambda \quad \text{또는} \quad \lambda = (JA^{-1} J^T)^{-1} \hat{\Omega} \quad (24)$$

식(24)를 식(22)에 대입하면 식(21)을 얻을 수 있다.

위의 정리로부터 일반 의사역기구학 해법은 위치에너지 pe 나 $\delta^2 pe$ 의 최소화가 아닌 $\delta\theta^T A \delta\theta$ 를 최소화 시킴을 알 수 있다. 여기서, pe 와 $\delta^2 pe$ 는 다음과 같이 각각 표현된다.

$$pe = \sum_{i=1}^m 0.5 k_i (\theta_i - \theta_{oi})^2$$

$$\delta^2 pe = \delta(\hat{\Omega}^T \hat{f}) = \delta\hat{\Omega}^T \hat{f} + \hat{\Omega}^T \delta\hat{f} \quad (25)$$

$\delta\theta^T A \delta\theta$ 와 $\delta^2 pe$ 의 관계는 다음과 같이 유도된다. 먼저 식(15)의 양변에 $\delta\theta^T K$ 를 곱하면 식(26)을 얻는다.

$$\delta\theta^T K T \delta\theta = \delta\theta^T J^T \delta\hat{f} = \hat{\Omega}^T \delta\hat{f} \quad (26)$$

식(26)을 식(25)에 대입하여 정리하면 식(27)과 같다.

$$\delta\theta^T K T \delta\theta = \delta^2 pe - \delta\hat{\Omega}^T \hat{f} \quad (27)$$

일반 의사역기구학 해법은 위치에너지를 최소화시키지 않기 때문에 로봇형상이 최소 위치 에너지 상태이어야 함을 요구하지 않으며 따라서 서로 다른 여러 형태의 초기형상에 대하여서도 주기운동시 관절각의 반복도를 유지시킨다.

2.2 가중 의사역행렬 및 Moore-Penrose 역기구학 해와의 관계

먼저, 로봇이 외부로부터 힘을 받고 있지 않다고 하자($\hat{f}=0$). 즉 그들의 자유각도에 있다고 하면($\theta_i = \theta_{oi}$) 식(11)은 식(28)과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta\theta = K^{-1} J^T \delta\hat{f} \quad (28)$$

식(28)의 양변에 J 를 곱하면 식(29)와 같다.

$$J\delta\theta = JK^{-1} J^T \delta\hat{f} \quad (29)$$

이제 식(4)를 식(29)에 대입하면 식(30)을 얻을 수 있다.

$$\hat{\Omega} = JK^{-1} J^T \delta\hat{f} \quad (30)$$

J 가 풀 랭크이면 식(30)은 식(31)과 같다.

$$\delta\hat{f} = (JK^{-1} J^T)^{-1} \hat{\Omega} \quad (31)$$

식(31)을 식(28)에 대입하면 다음과 같은 가중 역기구학 방정식(32)를 얻는다.

$$\delta\theta = K^{-1} J^T (JK^{-1} J^T)^{-1} \hat{\Omega} \quad (32)$$

가중 역기구학 해법은 다음의 식(33)으로 표현되는 두 번 미분한 위치에너지를 최소화시킨다.

$$\delta^2 pe = \delta\theta^T K T \delta\theta \quad (33)$$

식(32)는 Whitney⁽⁹⁾가 유도한 식과 일치하고 있다. 그러나 식(32)는 관절변위의 반복도를 보장하지 못한다. Moore-Penrose 의사역기구학 방정식은 자유각도와 스프링상수를 무시함으로써 식(20)으로부터 다음의 식(34)를 구할 수 있다.

$$\delta\theta = J^T (J J^T)^{-1} \hat{\Omega} \quad (34)$$

식(34)는 Noble⁽¹⁰⁾이 유도한 식과 일치하고 $\delta\theta^T \delta\theta$ 를 최소화시킨다. 그러나 식(34)는 관절변위의 반복도를 보장하지 못할 뿐만 아니라 로봇이 직진관절과 회전관절을 동시에 갖고 있을 때 길이단위의 변화에 따라(m \rightarrow cm 또는 cm \rightarrow m) 관절변위의 값이 달라진다.

2.3 Lie Bracket Condition과 반복도와의 관계

Samir와 Yomdin⁽⁶⁾은 여유자유도를 가진 로봇의 반복도 조건을 다음과 같이 소개하였다.

정의: $JP = I$ 행렬이 되는 $n \times m$ 행렬함수를 P 라고 한다.

정리: P 가 관절영역의 열린 부분집합(open subset) Φ 에서 smooth function인 제어행렬이라고 하고 $U \in f(\Phi)$ 가 작업영역에서 단순 연결영역(simply connected region)이라고 하면, 그 제어는 LBC(lie bracket condition)을 만족할 때 U 영역에서 어떤 닫힌 경로에 대하여 반복적(repeatable)이다. LBC: P 의 어떤 두 열 P_i, P_j 에 대하여 그들의

Lie Bracket $[P_i, P_j]$ 은 P 의 열의 선형조합이고 다음과 같이 표현된다. $[P_i, P_j]$

이것이 열의 선형조합인지를 알기 위하여 $n \times (m+1)$ 팽창행렬 $(P, [P_i, P_j])$ 을 고려하여 그것의 $(m+1) \times (m+1)$ 소행렬(minor)이 영인지를 확인한다. 위의 정리로부터 의사역기구학 방정식은 식(35)와 같이 표현된다.

$$\delta\theta = P\bar{Q} \quad (35)$$

일반 의사역기구학 방정식에서 P 는 식(36)과 같다.

$$P_g = (KT)^{-1} J^T (J(KT)^{-1} J^T)^{-1} \quad (36)$$

3. 시뮬레이션

3.1 3자유도 평면 로봇의 역기구학

3 자유도를 가진 로봇이 xy 평면상에서 운동한다고 할 때, 만약 이 로봇의 팔끝의 위치만을 규정할 경우에는 이 로봇은 한 개의 여유자유도를 가진다. 로봇의 형상과 크기는 Fig. 2에 나타내었다. 이제 이 로봇의 순기구학 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= a_{12}C_1 + a_{23}C_{1+2} + a_{34}C_{1+2+3} \\ y &= a_{12}S_1 + a_{23}S_{1+2} + a_{34}S_{1+2+3} \end{aligned} \quad (37)$$

이 식에서 a_{ij} 는 로봇팔의 길이를 나타내며

$$\begin{aligned} s_i &= \sin(\theta_i), \quad s_{i+j+\dots+n} = \sin(\theta_i + \theta_j + \dots + \theta_n) \\ c_i &= \cos(\theta_i), \quad c_{i+j+\dots+n} = \cos(\theta_i + \theta_j + \dots + \theta_n) \end{aligned}$$

와 같이 표기하였다. 식(37)로부터 로봇의 순간운동에 대하여 식(38)과 같다.

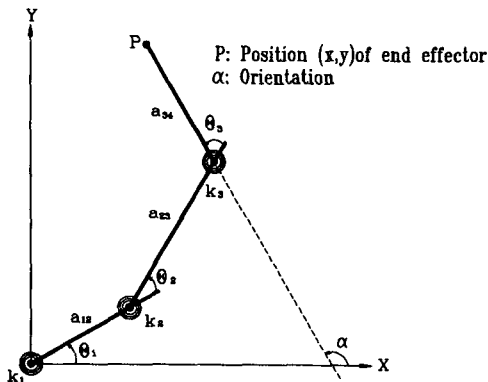


Fig. 2 Kinematic model of a planar 3R manipulator

$$[\delta_x \ \delta_y]^T = J[\delta\theta_1 \ \delta\theta_2 \ \delta\theta_3]^T \quad (38)$$

여기서,

$$J = \begin{bmatrix} -a_{12}S_1 - a_{23}S_{1+2} & -a_{23}S_{1+2} & -a_{34}S_{1+2+3} \\ -a_{34}S_{1+2+3} & -a_{34}S_{1+2+3} & \\ a_{12}C_1 + a_{23}C_{1+2} & a_{23}C_{1+2} & a_{34}C_{1+2+3} \\ + C_{1+2+3} & + a_{34}C_{1+2+3} & \end{bmatrix}$$

각 관절에 작용하는 관절토크와 로봇팔 끝에 부가된 렌치 및 관절변위와의 관계는 각각 식(39) 및 (40)과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T = J^T [f_x \ f_y]^T \quad (39)$$

$$[\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T = K[\theta_1 - \theta_{01} \ \theta_2 - \theta_{02} \ \theta_3 - \theta_{03}]^T \quad (40)$$

여기서, K 는 3×3 대각선 행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

$\theta_i - \theta_{0i} (i=1,2,3)$ 는 현재각도와 자유각도와의 차이이다. 식(40)은 다시 식(41)과 같이 표현할 수 있다.

$$[\theta_1 - \theta_{01} \ \theta_2 - \theta_{02} \ \theta_3 - \theta_{03}]^T = K^{-1} [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T \quad (41)$$

이제 식(39)를 식(41)에 대입하면 식(42)와 같다.

$$[\theta_1 - \theta_{01} \ \theta_2 - \theta_{02} \ \theta_3 - \theta_{03}]^T = K^{-1} J^T [f_x \ f_y]^T \quad (42)$$

식(42)의 양변에 J 를 곱하면 다음의 식(43)을 얻을 수 있다.

$$J[\theta_1 - \theta_{01} \ \theta_2 - \theta_{02} \ \theta_3 - \theta_{03}]^T = JK^{-1} J^T [f_x \ f_y]^T \quad (43)$$

J 가 풀 랭크이면 식(43)은 식(44)로 표현된다.

$$[f_x \ f_y]^T = (JK^{-1} J^T)^{-1} J[\theta_1 - \theta_{01} \ \theta_2 - \theta_{02} \ \theta_3 - \theta_{03}]^T \quad (44)$$

식(42)를 미분하면 식(45)를 얻는다.

$$\begin{aligned} [\delta\theta_1 \ \delta\theta_2 \ \delta\theta_3]^T &= K^{-1} J^T [\delta f_x \ \delta f_y]^T + K^{-1} \delta J^T [f_x \ f_y]^T \\ \delta J^T &= \begin{bmatrix} \delta J_{11} & \delta J_{21} \\ \delta J_{12} & \delta J_{22} \\ \delta J_{13} & \delta J_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\delta J_{pq} = u_{pq} \delta\theta_1 + v_{pq} \delta\theta_2 + w_{pq} \delta\theta_3, \quad p=1,2, \quad q=1,2,3$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= -a_{12}C_1 - a_{23}C_{1+2} - a_{34}C_{1+2+3} \\
 u_{12} &= -a_{23}C_{1+2} - a_{34}C_{1+2+3} \\
 u_{13} &= -a_{34}C_{1+2+3} \\
 u_{21} &= -a_{23}S_1 - a_{34}S_{1+2+3} \\
 u_{22} &= -a_{23}S_{1+2} - a_{34}S_{1+2+3} \\
 u_{23} &= -a_{34}S_{1+2+3} \\
 v_{11} &= -a_{23}C_{1+2} - a_{q34}C_{1+2+3} \\
 v_{12} &= -a_{23}C_{1+2} - a_{34}C_{1+2+3} \\
 v_{13} &= -a_{34}C_{1+2+3} \\
 u_{21} &= -a_{34}S_{1+2+3} \\
 v_{22} &= -a_{34}S_{1+2+3} \\
 v_{23} &= -a_{34}S_{1+2+3} \\
 w_{11} &= -q_{34}C_{1+2+3} \\
 w_{12} &= -a_{34}C_{1+2+3} \\
 w_{13} &= -a_{34}C_{1+2+3} \\
 w_{21} &= -a_{12}S_1 - a_{23}S_{1+2} - a_{34}S_{1+2+3}
 \end{aligned}$$

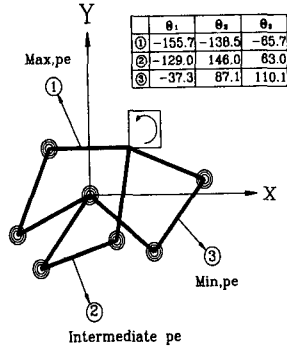


Fig. 3 Three different initial configurations of planar 3R manipulator

$$\begin{aligned}
 w_{22} &= -a_{23}S_{1+2} - a_{34}S_{1+2+3} \\
 w_{23} &= -a_{34}S_{1+2+3}
 \end{aligned}$$

이며, 식 (45)의 오른쪽의 두번째 항을 원편으로 옮

Table 1 Simulation results through 10 cycles of the motion
(a) General Pseudo-inverse equation

CY.	LBC	X	Y	θ_1	θ_2	θ_3
0	2.51e-07	0.5000	0.5000	-155.7048	-138.5904	-65.7048
10	2.50e-07	0.5009	0.5008	-155.7293	-138.6395	-65.5864
DIFF.*		0.0009	0.0008	-0.0245	0.0455	0.1184
0	1.98e-07	0.5000	0.5000	-129.0618	146.0181	63.0437
10	2.08e-07	0.5008	0.5009	-129.0571	146.0755	62.9211
DIFF.		0.0008	0.0009	0.0047	0.0574	-0.1226
0	4.48e-08	0.5000	0.5000	-37.3383	87.1955	110.1389
10	4.40e-08	0.5010	0.5008	-37.3323	87.1560	110.1093
DIFF.		0.0010	0.0008	0.0060	-0.0435	-0.0296

* : Error after 10 cycles of the motion

(b) Moore-Penrose Pseudo-inverse equation

CY.	LBC	X	Y	θ_1	θ_2	θ_3
0	-1.66e+00	0.5000	0.5000	-155.7048	-138.5904	-65.7048
10	-2.04e+00	0.5009	0.5008	-146.5125	-143.4404	-63.5879
DIFF*.		0.0009	0.0008	9.1923	-4.8500	2.2169
0	2.23e+00	0.5000	0.5000	-129.0618	146.0181	63.0437
10	1.84e+00	0.5008	0.5009	-118.6704	140.9852	64.5052
DIFF.		0.0008	0.0009	10.3914	-5.0329	1.4615
0	5.81e-01	0.5000	0.5000	-37.3383	87.1955	110.1389
10	5.97e-01	0.5010	0.5008	-34.7540	85.4007	112.0434
DIFF.		0.0010	0.0008	2.5843	-1.7988	1.9045

기면 식(46)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & [\delta\theta_1 \ \delta\theta_2 \ \delta\theta_3]^T - \mathbf{K}^{-1} \delta \mathbf{J}^T [f_x \ f_y] \\ & = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T [\delta f_x \ \delta f_y]^T \end{aligned} \quad (46)$$

식(44)를 식(46)에 대입하여 정리하면 식(47)을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{T} [\delta\theta_1 \ \delta\theta_2 \ \delta\theta_3]^T = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T [f_x \ f_y]^T \\ & \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

여기서,

$$\begin{aligned} T_{11} &= 1 - (u_{11}f_x + w_{21}f_y) / k_1 \\ T_{12} &= - (w_{11}f_x + u_{21}f_y) / k_1 \\ T_{13} &= - (w_{11}f_x + v_{21}f_y) / k_1 \\ T_{21} &= - (u_{12}f_x + u_{22}f_y) / k_2 \\ T_{22} &= 1 - (v_{12}f_x + u_{22}f_y) / k_2 \\ T_{23} &= - (w_{12}f_x + v_{22}f_y) / k_2 \\ T_{31} &= - (u_{13}f_x + w_{23}f_y) / k_3 \\ T_{32} &= - (v_{13}f_x + u_{23}f_y) / k_3 \\ T_{33} &= 1 - (w_{13}f_x + v_{23}f_y) / k_3 \end{aligned}$$

이다.

3.2 시뮬레이션과 반복도의 수치적 검증

로봇팔의 길이는 $a_{12} = a_{23} = a_{34} = 1.0$ m를 선택하고 각 관절의 회전 범위는 $-170^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ$, $-160^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$, $-175^\circ \leq \theta_3 \leq 175^\circ$ 로 설정하였다. 각 관절의 스프링상수는 $k_1 = k_2 = k_3 = 1.0$ N mm/rad으로 선택하고 자유각도는 $\theta_{01} = 5^\circ$, $\theta_{02} = 10^\circ$, $\theta_{03} = 0^\circ$ 로 주어졌다. 로봇팔 끝은 한변의 길이가 0.1 m인 정사각형 경로를 따라 10 mm/sec의 일정속도와 시간간격 크기 $\Delta t = 0.01$ sec를 가지고 시계 반대방향으로 움직인다. 주어진 로봇팔 끝의 위치 ($x = 0.5$, $y = 0.5$ m)에 대하여 세가지 다른 초기 로봇형상 (첫째형상: $\theta_1 = -155.7^\circ$, $\theta_2 = -138.57^\circ$, $\theta_3 = -65.7^\circ$, 둘째형상: $\theta_1 = -129.06^\circ$, $\theta_2 = 146.01^\circ$, $\theta_3 = 63.04^\circ$, 셋째형상: $\theta_1 = -37.33^\circ$, $\theta_2 = 87.19^\circ$, $\theta_3 = 110.13^\circ$)을 선택하여 (Fig. 3 참조) 10회의 주기운동을 실시하였다. 10번의 주기운동 전후의 관절값, 그 차이값 그리고 LBC값을 Table 1에 제시하였다. Table 1에 나타난 수치들로부터 일반 의사역기구학 해(식(21))와 Moore-Penrose 의사역기구학 해법(식(34))과는 명백한 수치적대조를 이루고 있음을 알 수 있다.

즉 일반 의사역기구학 해법은 주기운동시 관절각의 반복성을 보여주고 있는 반면 Moore-Penrose 의사역기구학 해법은 반복성을 보여주지 못하고 있다.

4. 결 론

일반 의사기구학 해법의 특징은 개념적으로 자유각도와 스프링상수를 소개하여 이것으로부터 새로운 역기구학 방정식을 유도하였다. 이 역기구학 해는 LBC를 만족하고 따라서 반복도를 유지시켜준다. 자유각도와 스프링상수의 선택은 임의로 가능하나 여기서는 관절각의 회전한계를 고려하여 선택하였다.

가중 의사기구학 해법이나 Moore-Penrose 의사기구학 해법은 반복도를 보장하지 못한다. 더구나 Moore-Penrose 의사기구학 해법은 회전관절과 직진관절이 함께 사용되는 로봇에서는 로봇의 길이단위 변화에 따라 해의 값이 달라진다. 일반의사역기구학 해에 대한 반복도의 수치적 검증은 LBC에 의하여 이루어졌다.

LBC에 의한 반복도의 증명(symbolic proof)은 앞으로 수행할 연구과제이고 이것을 통하여 자유각도와 스프링상수의 선택이 반복도에 미치는 영향을 명확히 규명할 수 있을 것이다.

참고문헌

- (1) Klein, C. A., and Huang, C. S., 1983, "Review of Pseudoinverse Control for Use with Kinematically Redundant Manipulators," *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, No. 13 pp. 245 ~ 250.
- (2) Liegeois, A., 1977, "Automatic Supervisory Control of the Configuration and Behavior of Mutibody Mechanisms," *IEEE Trans, System, Man and Cybernetics*, Vol. 7, pp. 868~871.
- (3) Whitney, D. E., 1969, "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Protheses," *IEEE Transactions on Man, Machine System*, Vol. MMS-10, No. 2, pp. 47~53.
- (4) Baker, D. R. and Wampler II, C. W., 1988 "On the Inverse Kinematics of Redundant Manipulators," *The International Journal of Robotics*

- Research*, Vol 7, No. 2, pp. 3~21.
- (5) Shamir, T. and Yomdin, Y., 1988, "Repeatability of Redundant Manipulators: Mathematical Solution of the Problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 11, pp. 1004~1009.
- (6) Mussa-Ivaldi, F. A. and Hogan, N., 1989, "Solving Kinematic Redundancy with Impedance Control: A Class of Integrable Pseudo-inverse," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 283~288.
- (7) Chang, P. H., 1987, "A Closed-form Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulators with Redundancy," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 5, pp. 393~403.
- (8) plücker, L., 1885, "On a New Geometry of Space," *Phil Transactions Royal Society of London*, Vol. 155, pp. 725~791.
- (9) 최용제, 1991, "나선이론에 의한 로봇의 운동 및 역학적 해석," *대한기계학회지*, 제31권, 제7호, pp. 616~625.
- (10) Noble, B., 1969, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, Englewood Cliffs.