

〈論 文〉

# 선형분수사상을 이용한 3차원 균열해석

안 득 만\*

(1994년 1월 20일 접수)

## Three-Dimensional Crack Analysis by Fractional Linear Mapping

Deuk Man An

**Key Words:** 3-Dimensional Crack (3차원 균열), Boussinesq-Papcovich Potential, Stress Intensity Factors (응력확대계수), Fractional Linear Mapping (분수선형사상), Cauchy-Riemann Equation (코시-리만 식)

### Abstract

In this study the method of anaysis for three-dimensional plane crack problem by fractional linear mapping is given. Using this method we can obtain the exact solutions of significantly different configurations of the crack. In the example image crack configurations by mapping of elliptic crack are illustrated. And the stress intensity factors along the image crack tips are calculated.

### 1. 서 론

3차원 균열해석문제는 일반적으로 매우 어려운 것으로 알려져 있다. 3차원 균열문제에서는 몇개의 간단한 평면균열 형상에 대해서만 응력확대계수에 관한 엄밀해가 있을 뿐이다.<sup>(1)</sup> 그러한 해가 존재하는 균열의 형상은 무한 물체에 포함된 원형균열이거나 반무한 균열인 경우이다. 이들 형상에서 일반적인 하중에 의한 모든 모드에서의 응력확대계수는 Bueckner의 무계함수로서 구할 수 있다.<sup>(2)</sup> 그리고 타원균열인 경우 균열 표면에 수직한 압력이 작용할 때의 응력해석에 관한 많은 문헌들이 있다.<sup>(3-6)</sup> 특히 균열면에 작용하는 압력을 균열면의 직각좌표  $(x, y)$ 에 관한 다항식으로 표현할 수 있을 때에는 변위, 응력 등 모든 장량(field quantities)들을 1차원의 적분으로 나타낼 수 있다.<sup>(7)</sup> 그러나, 이들 형상을 제외한 경우의 응력확대계수에 대한 엄밀

해는 지금까지 알려져 있지 않다. 이와 같은 경우에는 엄밀해 대신 공학적인 계산을 위하여 여러가지 근사적인 방법에 의한 자료가 있다.<sup>(8)</sup> 이러한 상황에서 새로운 방법을 사용하여 엄밀해의 해석이 가능한 형상의 범위를 확대하는 것은 매우 바람직한 것이다. 여기에서 우리가 던지는 문제는 다음과 같다. 이미 알려진 균열형상에 대한 완전한 정보를 이용하여 그것과 형상이 판이한 균열에 대한 응력확대계수를 좌표변환을 이용하여 구할 수 있는 방법은 무엇인가? 여기서 말한 판이한 형상의 균열이란 좌표변환, 즉 사상(mapping)에 의하여 상의 형상이 닮은꼴이 되는 경우를 제외한 것을 말한다. 이 문제에 관한 답은 언뜻 보기에는 불가능한 것처럼 보인다. 그러나, 무한 물체에 존재하는 평면 균열에 압력이 작용하는 경우에는 가능하다. 이 경우를 취급한 것이 본 논문이다.

### 2. 수직압력을 받고 있는 평면균열

\*정회원, 부산대학교 생산기계공학과, 기계기술연구소

무한 물체에 존재하는 균열에 압력이 작용하는

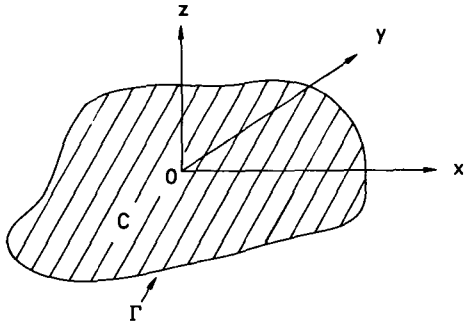


Fig. 1 Plane crack (image crack) in x-y plane

경우의 변위, 변형률, 응력 등은 한 개의 Boussinesq-Papcovich 조화함수로서 나타낼 수 있다.<sup>(1)</sup> Fig. 1은 x-y평면에 존재하는 평면균열과 직각좌표계 x, y, z를 나타내고 있다. 평면균열의 영역을 C로 나타내고 균열경계를  $\Gamma$ 라고 하자. 여기서 균열의 윗면과 아랫면을 각각  $C^+$ ,  $C^-$ 로서 구별하고 이들이 차지하는 z좌표를  $z=+0$ ,  $z=-0$ 로 구별한다. 균열면에 압력이 작용하면 이로 인하여 구조물 전체에 변위와 응력이 발생한다. 이때 이 모든 장량들을 기술하는 Boussinesq-Papcovich 조화함수를  $G(x, y, z)$ 라고 하면 변위는

$$\begin{aligned} u &= -zG_{xz} - (1-2\nu)G_x \\ v &= -zG_{yz} - (1-2\nu)G_y \\ w &= -zG_{zz} + 2(1-\nu)G_z \end{aligned}$$

와 같이 되고 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2\mu[(zG_{xx})_z + 2\nu G_{yy}] \\ \tau_{yz} &= -2\mu z G_{yzz} \\ \sigma_y &= -2\mu[(zG_{yy})_z + 2\nu G_{xx}] \\ \tau_{xz} &= -2\mu z G_{xzz} \\ \sigma_z &= -2\mu[zG_{zzz} - G_{zz}] \\ \tau_{xy} &= -2\mu[zG_{xyx} + (1-2\nu)G_{xy}] \end{aligned}$$

여기서,  $\mu$ ,  $\nu$ 는 각각 전단계수와 푸아송비를 나타낸다. 그리고 G에 붙혀진 아래첨자는 그 첨자에 대한 편미분을 나타낸다. 여기서,  $C^+$ ,  $C^-$ 는 각각 다른 평면을 나타내고 G는 균열 끝의 경계  $\Gamma$ 를 제외한 모든 영역에서 3차 미분양까지 연속이라고 가정한다. 이러한 가정은 압력분포  $P(x, y)$ 가 적당히 매끄러운 함수이면 된다. 이러한 가정 아래서 균열 면  $C^\pm$ 에서의 변위와 응력은 다음과 같이 된다.

$$w = 2(1-\nu)G_z$$

$$\sigma_z = 2\mu G_{zz}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ on } C^\pm \quad (1)$$

여기서, 체적력은 고려하지 않으므로 G는 조화함수이다. 즉 다음과 같은 편미분 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 G = G_{xx} + G_{yy} + G_{zz} = 0 \quad (2)$$

앞으로의 이론 전개과정에서 보면 다음과 같은 2차원 Laplacian을 정의하면 편리하다.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

식(1), (2), (3)으로부터

$$-\sigma_z = p(x, y) = 2\mu \Delta G(x, y, \pm 0) \text{ on } C^\pm \quad (4)$$

가 되고 G는 z에 대하여 우함수임을 알 수 있다. 따라서 G를 다음과 같이 한점으로 된 위치에너지로 표현할 수 있다.

$$G(x, y, z) = \alpha \int_C f(\xi, \eta) R^{-1} d\xi d\eta \quad (5)$$

여기서,

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}; R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$$

이다. 그리고 식(5)의 적분영역은 균열이 차지한 영역 C에 대한 것이다. 위치에너지 이론과 식(1)로부터

$$w = \pm f(x, y) \text{ on } C^\pm \quad (6)$$

가 된다. 다음과 같은 적분변환 부호를 정의하고

$$Tf = \alpha \int_C f(\xi, \eta) [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{-1/2} d\xi d\eta \quad (7)$$

$G(x, y, 0) = g(x, y)$ 라 두면

$$g = Tf \quad (8)$$

와 같이 쓸 수 있고 식(4)는 아래와 같은 적분-미분 방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$p = 2\mu \Delta Tf \text{ where } (x, y) \text{ on } C \quad (9)$$

여기서, 밀도함수 f가 윗 균열면에서의 수직변위 w이므로 Mode I 변형에서의 해 f가 유한함을 알 수 있고 균열 경계선  $\Gamma$ 를 따라서 영이 된다. Fig. 3에서와 같이 균열 면상의 점 (x, y)에서 균열경계선에 있는 임의의 점 s까지의 거리를 h라

두면 점  $(x, y)$ 가  $s$ 에 가까이 접근할 때  $f$ 를 균열 끝을 따라서 변하는 응력확대계수  $k(s)$ 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(x, y) \cong \frac{\sqrt{2}}{\mu} k(s) (1-\nu) h^{1/2} \quad (10)$$

식(9)에서  $f$ 가 구해지면 식(5)로부터 위치에너지  $G$ 가 구해지므로 균열 면에 작용하는 압력  $p(x, y)$ 에 의한 장은 구할 수 있게 된다. 여기서,  $p(x, y) = 0$ 이면 식(9)의 해 중에서  $f=0$ 를 제외한 해는 유일하지 않게 되고 특히 균열 끝을 따라서  $f$ 가 무한대인 해가 존재하게 된다. 여기서, 균열 경계선  $\Gamma$ 를 따라서  $f$ 가

$$f \approx m(s) h^{-1/2} \quad (11)$$

이고 무한대에서 영일 때  $f$ 를 무계함수라 하고 이때의 장을 기초장(fundamental field)이라 한다. 이에 반해서  $f$ 가 식(10)와 같이 주어질 때의 장을 정상장(regular field)이라 한다.

### 3. 사 상

Fig. 2와 같은 균열모양을 생각하자. 여기서, 모든 기호는 Fig. 1과 구별하기 위하여 위첨자(')을 붙였다. 특히 식(8)은  $g' = T'f$  혹은 다음과 같이 자세하게 쓸 수 있다.

$$g'(x', y') = \alpha \int_{C'} f'(\xi', \eta') [(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{-1/2} d\xi' d\eta'$$

여기서,  $C$ 에서  $C'$ 로 변화시키는 일 대 일 사상을

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y) \\ \xi' &= \varphi(\xi, \eta), \quad \eta' = \psi(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (12)$$

로 표현하자. 위 식에서  $\varphi, \psi$ 는 닫힌 영역  $C$ 에서 미분양들이 연속이라고 가정한다. 점  $(x', y')$ 가 영역  $C'$ 에 있을 때 적분  $g'$ 를 영역  $C$ 에 관한 적분으로 바꿀 수 있다. 이때 미소면적의 변화는

$$d\xi' d\eta' = J(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad J(\xi, \eta) = \frac{\partial(\xi', \eta')}{\partial(\xi, \eta)} \quad (13)$$

와 같이 된다. 앞으로의 이론 전개과정에서  $z, z'$ 는 쓰이지 않으므로  $z, z'$ 를 복소변수로 쓰기로 한다. 즉

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy' \quad (14)$$

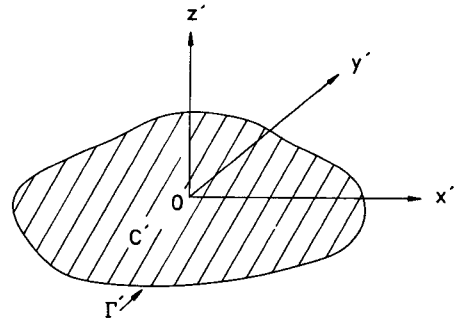


Fig. 2 Plane crack in  $x'$ - $y'$  plane

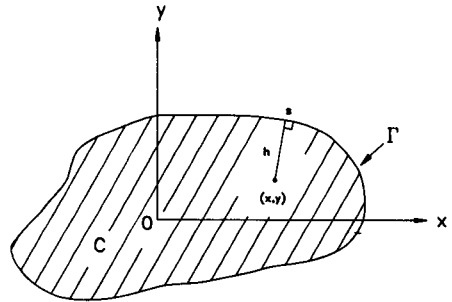


Fig. 3 Definition of  $h$

라 둔다. 같은 목적으로 복소변수  $\zeta, \zeta'$ 를 도입하여

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \zeta' = \xi' + i\eta' \quad (14')$$

라 쓰자. 여기서, 사상함수에 다음과 같은 구속조건을 가정한다.

$$\begin{aligned} [\varphi(x, y) - \varphi(\xi, \eta)]^2 + [\psi(x, y) - \psi(\xi, \eta)]^2 \\ = [(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2] \cdot A^2(x, y) \cdot A^2(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (15)$$

$A(x, y)$ 는 임의의 연속인 함수이다. 위 조건에 의하면 모든 짝  $C, C'$ 가 사상(12)로 표현되지 않는다. 그러나, 식(15)를 만족하는 사상이 존재하면 다음 식이 성립한다.

$$f(x, y) = J(x, y) f'[\varphi(x, y), \psi(x, y)] / A(x, y) \quad (16a)$$

$$g(x, y) = A(x, y) g'[\varphi(x, y), \psi(x, y)] \quad (16b)$$

위의 식은  $C'$ 에서의 중요한 양인  $f', g'$ 가  $C$ 에서의  $f, g$ 로 변하는 공식이다. 여기서, Fig. 1의 변형 상태는 영역  $C$ 에 작용하는 압력  $p(x, y) = 2\mu\Delta g(x, y)$ 에 의한 것이다. 조건(15)에서  $\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y$

인 경우를 생각하자. 즉,  $x-\xi=h\cdot\cos t$ ,  $y-\eta=h\cdot\sin t$ 라 두고 각도  $t$ 를 고정시키고  $h\rightarrow 0$ 으로 접근시킨다. 식(15)의 양변을  $h^2$ 으로 나누면 오른쪽 항은  $A^4(x, y)$ 이 되고 왼쪽항은

$$[\varphi_x\cos t + \varphi_y\sin t]^2 + [\psi_x\cos t + \psi_y\sin t]^2 \quad (17)$$

이 된다. 그런데 위 식은 각도  $t$ 에 대하여 독립이어야 하기때문에 다음 식이 성립한다.

$$\varphi_x^2 + \psi_x^2 = \varphi_y^2 + \psi_y^2 = A^4; \varphi_x\varphi_y + \psi_x\psi_y = 0 \quad (18)$$

따라서

$$\varphi_x = \lambda\psi_y, \varphi_y = -\lambda^{-1}\psi_x \quad (19)$$

가 성립한다. 여기서,  $\lambda$ 가  $-1$  또는  $1$ 을 가질 때 위식은 Cauchy-Riemann식이 되므로  $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  또는  $\varphi(x, y) - i\psi(x, y)$ 가  $z$ 에 관하여 해석적인 함수가 된다. 우리의 경우는  $\lambda$ 가  $1$ 인 경우만 취급해도 충분하다. 여기서

$$z' = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = F(z) \\ dF/dz = F'(z) \quad (20)$$

라 두면 식(18)로부터

$$A^2(x, y) = |F'(z)| \quad (21)$$

가 된다. 다음과 같은  $z$ 에 대하여 해석적인 함수를 생각하면

$$H(z) = \frac{[F(z) - F(\xi)]^2}{F'(z)F'(\xi)(z-\xi)^2} \quad (22)$$

식(15)에 의하여  $|H(z)|=1$ 이 된다. 그런데 절대값이 상수인 복소함수는 상수가 되므로  $H(z)=1$ 이다. 따라서 위식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{F'(\xi)}{F(z) - F(\xi)} \right] = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z-\xi} \right) \quad (23)$$

위의 식으로부터

$$z' = F(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (24)$$

을 얻을 수 있다. 여기서,  $a, b, c, d$ 는  $ad-bc \neq 0$ 를 만족하는 복소상수이다. 그리고 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$F(z) - F(\xi) = \frac{(ad-bc) \cdot (z-\xi)}{(cz+d) \cdot (c\xi+d)} \quad (25)$$

$$F'(z) = \frac{(ad-bc)}{(cz+d)^2} \quad (26)$$

사상의 Jacobian을  $J$ 라 두면  $J$ 는

$$J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = |F'(z)|^2 \quad (27)$$

와 같이 되고 식(24)의 역함수는

$$z = -\frac{d \cdot z' - b}{c \cdot z' - a} \quad (28)$$

가 된다. 식(24)으로부터  $z'$ 의 일반적인 형태를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z' = q' + \frac{Q^2}{z-q} \quad (29)$$

여기서,  $Q \neq 0$ 이고  $q$ 는 균열 밖에 위치한 점이다. 그리고 chain rule을 사용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\Delta L(x', y') = |F'|^2 \Delta' L(x', y') \quad (30)$$

여기서

$$\Delta' = \frac{\partial}{\partial x'^2} + \frac{\partial}{\partial y'^2}$$

이다. 식(29)으로부터

$$F'(z) = -\frac{Q^2}{(z-q)^2} \quad (31)$$

가 되므로

$$A = \left| \frac{Q}{z-q} \right| = \left| \frac{z'-q'}{Q} \right| \quad (32)$$

가 된다. 그리고 식(16a)와 (16b)는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$f(x, y) = A^3 \cdot f'(x', y') \quad (33)$$

$$g(x, y) = A \cdot g'(x', y') \quad (34)$$

압력  $p(x, y)$ 는 식(4), (30), (31)에 의하여

$$p(x, y) = 2\mu A^4 \cdot \Delta' \left[ \frac{|z'-q'| \cdot g'(x', y')}{|Q|} \right] \quad (35)$$

으로 된다. 응력확대계수는 식(10), (33)를 사용하여 구하면 다음과 같다.

$$k(s) = A^4 \cdot k'(s') \quad (36)$$

#### 4. 예 제

분수사상의 예제로 Fig. 4와 같은 평면에 있는 타원형 균열을 다음과 같은 분수사상을 사용하여 평면으로 변환을 생각하자.

$$z = \frac{\bar{c}}{c-z'}, z = x+iy, z' = x'+iy' \quad (37)$$

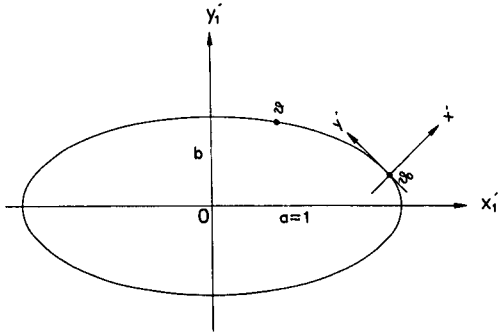


Fig. 4 Elliptic crack in x-y plane

여기서,  $\bar{c}$ 는 크기는  $c$ 와 같고 차원은 길이의 제곱이다. 윗 식으로부터 식(24)에 정의된 함수  $F(z)$ 는

$$F(z) = q' + \frac{Q^2}{z-q} = c - \frac{\bar{c}}{z} \quad (38)$$

으로 되고

$$q' = c, \quad q = 0, \quad Q^2 = -\bar{c}$$

$$A^2(x, y) = \frac{|\bar{c}|}{x^2 + y^2} \quad (39)$$

와 같이 된다. 여기서, 극좌표계  $\theta$ 를 사용하면 좌표계  $z'$ 의 원점은

$$x'_1 = a \cos \theta_0, \quad y'_1 = b \sin \theta_0 \quad (40)$$

으로 되고 Fig. 4에서 원점이 타원 상에 있는 좌표계  $z'_1 = x'_1 + iy'_1$ 와  $z'$ 의 관계는 다음과 같다.

$$x'_1 = x'_1 n_1 - y'_1 n_2 + a \cos \theta_0 \quad (41a)$$

$$y'_1 = x'_1 n_2 + y'_1 n_1 + b \sin \theta_0 \quad (41b)$$

여기서, 벡터  $\vec{n} = (n_1, n_2)$ 는 점  $\theta_0$ 에서 타원에 수직하고 밖으로 향하는 크기가 일인 벡터(unit vector)이다. 즉, 성분  $n_1, n_2$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$n_1 = \frac{b \cos \theta_0}{N}$$

$$n_2 = \frac{a \sin \theta_0}{N}$$

$$N = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta_0 + b^2 \cos^2 \theta_0} \quad (42)$$

식(37)에서  $c$ 는 타원균열 밖에 있는 점이어야 한다. 본 논문에서는 양의 정수를 택하기로 한다.  $z'$  평면에서의 타원균열을 극좌표계로써 표현하면

$$x'_1 = r' a \cos \theta_0, \quad y'_1 = r' b \sin \theta_0$$

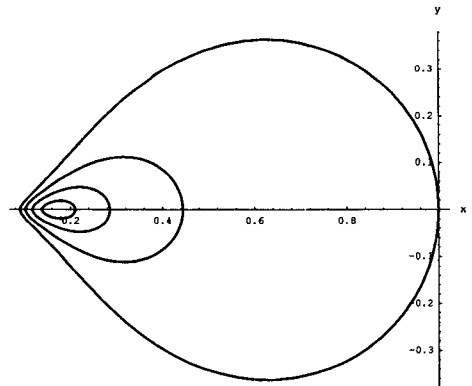
와 같이 된다. 여기서,  $0 \leq r' \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 이다. Fig. 5는  $z'$ 평면의 타원에서  $r'=0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ 인 contour를 식(37)을 이용하여 image를 변수  $(\theta_0, b, c)$ 의 값에 따라 도시한 것이다.  $r'=1$ 은 균열 끝의 contour를 나타낸다. 사상된 도형을 보면  $c$ 의 값이  $b$ 에 비하여 작을수록 균열 끝을 따라서 곡률의 변화가 급하고 각도  $\theta$ 는 곡률의 부호를 변화시켜 볼록한(convex) 균열 끝의 제적을 오목하게(concave) 한다. 등방성인 무한 물체의 타원 균열에 일정압력  $P_0$ 가 작용하는 경우 윗 균열면에서의 변위를  $z$ 좌표로 표현하면

$$w^+ = \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)^{1/2} \frac{1-\nu}{\mu E(k)} b p_0 \quad (43)$$

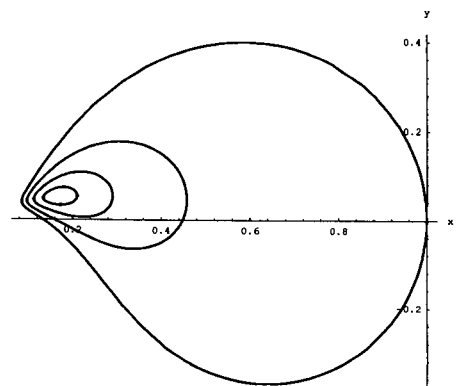
와 같다. 여기서,

$$k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

이고  $E(k)$ 는 완전 타원적분의 두번째형이다. 즉,

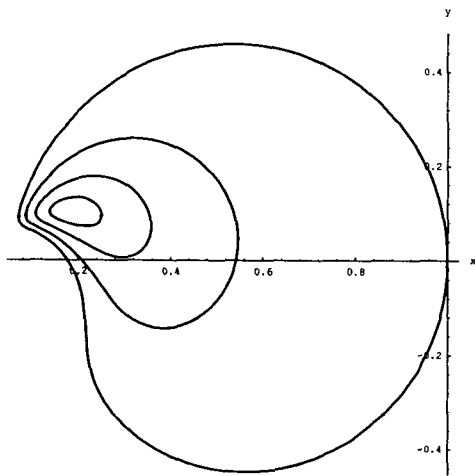


(a)  $\theta_0 = 0^\circ, b = 0.5, c = 0.2$

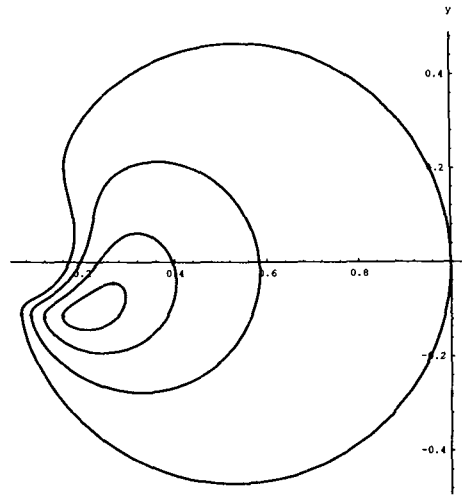


(b)  $\theta_0 = 15^\circ, b = 0.5, c = 0.2$

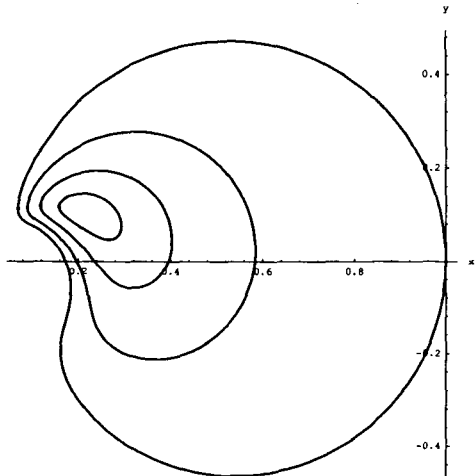
Fig. 5 Continued



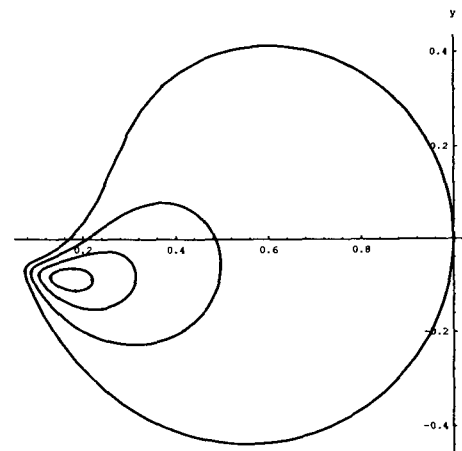
(c)  $\theta_0=45^\circ, b=0.5, c=0.2$



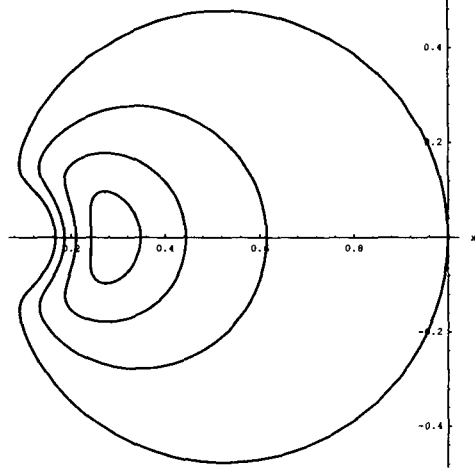
(f)  $\theta_0=120^\circ, b=0.5, c=0.2$



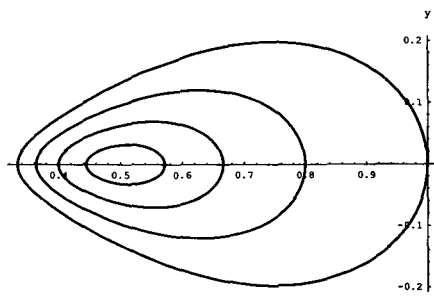
(d)  $\theta_0=60^\circ, b=0.5, c=0.2$



(g)  $\theta_0=150^\circ, b=0.5, c=0.2$

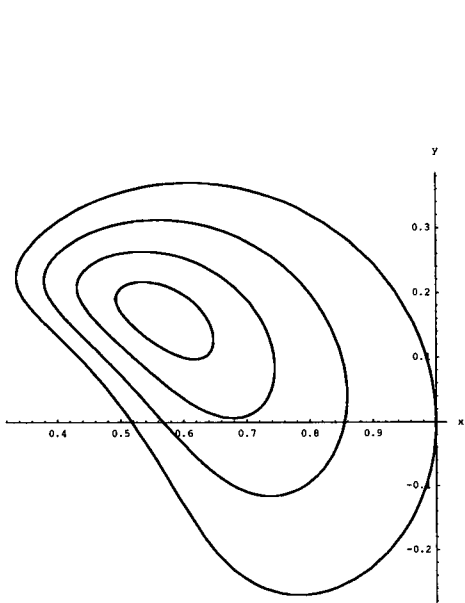


(e)  $\theta_0=90^\circ, b=0.5, c=0.2$

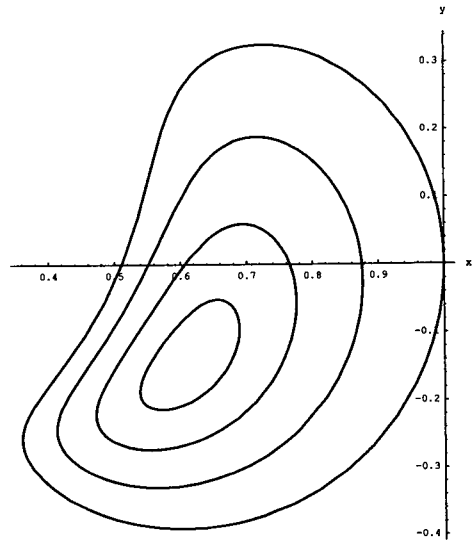


(h)  $\theta_0=0^\circ, b=0.5, c=1$

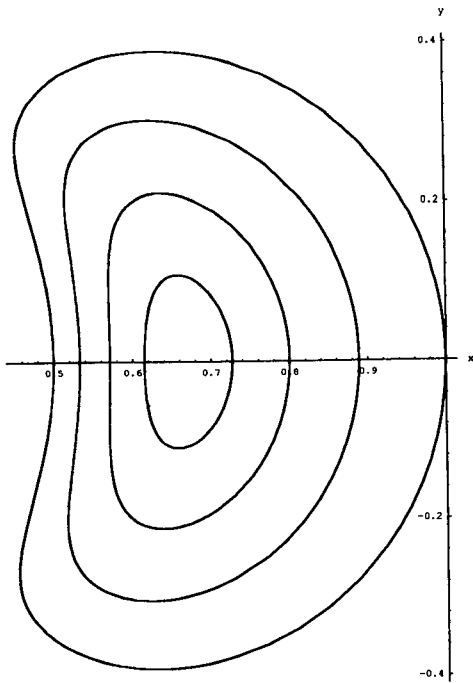
Fig. 5 Continued



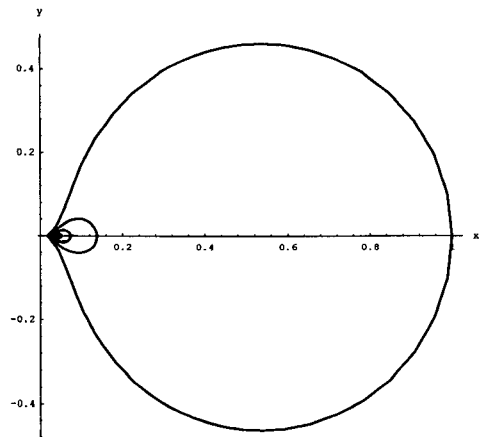
(i)  $\theta_0=45^\circ, b=0.5, c=1$



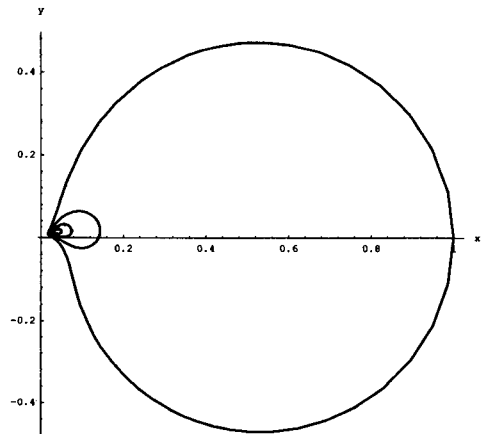
(k)  $\theta_0=120^\circ, b=0.5, c=1$



(j)  $\theta_0=90^\circ, b=0.5, c=1$

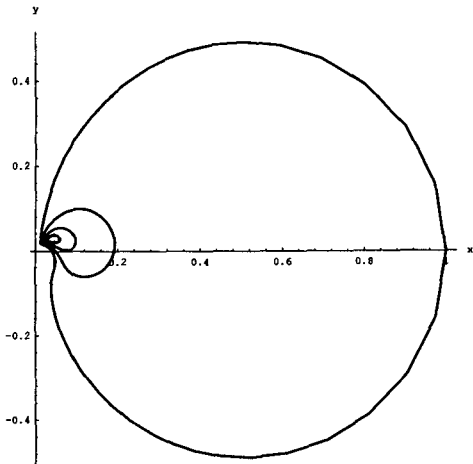


(l)  $\theta_0=0^\circ, b=0.5, c=0.04$

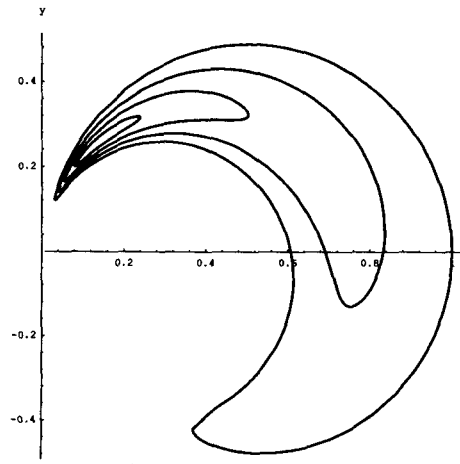


(m)  $\theta_0=15^\circ, b=0.5, c=0.04$

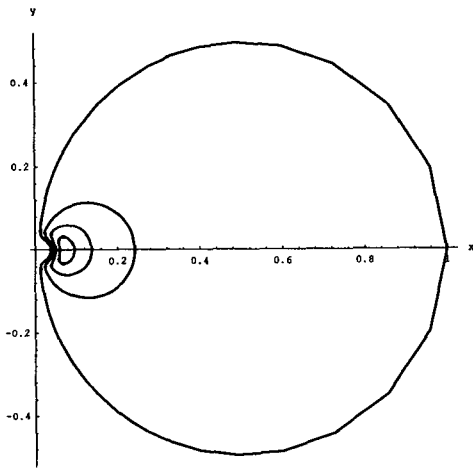
Fig. 5 Continued



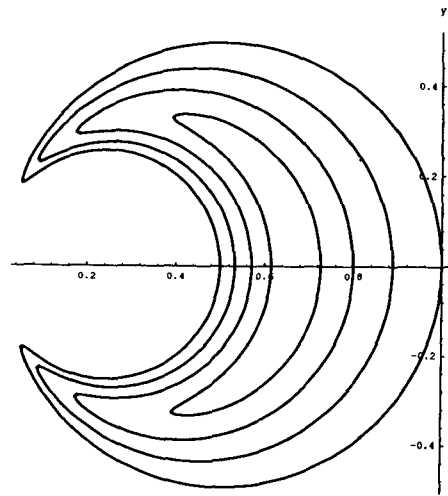
(n)  $\theta_0=45^\circ, b=0.5, c=0.04$



(r)  $\theta_0=45^\circ, b=0.1, c=0.2$



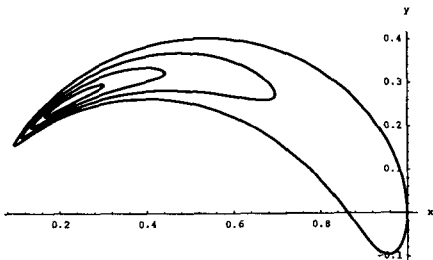
(o)  $\theta_0=90^\circ, b=0.5, c=0.04$



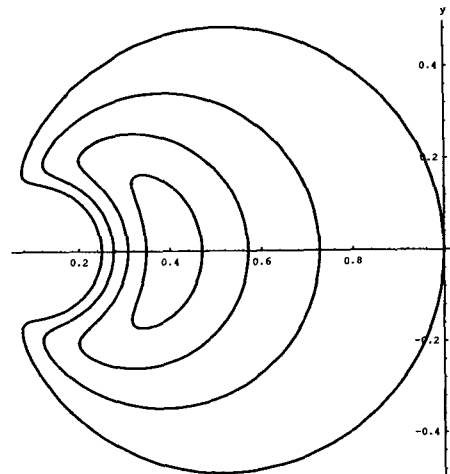
(s)  $\theta_0=90^\circ, b=0.1, c=0.2$



(p)  $\theta_0=0^\circ, b=0.1, c=0.2$



(q)  $\theta_0=15^\circ, b=0.1, c=0.2$



(t)  $\theta_0=90^\circ, b=0.3, c=0.2$

Fig. 5 Image crack configurations and image of contours of  $r'=0.25, 0.5, 0.75$  by fractional linear mapping given by Eq. (37)



$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

이다. 여기서, Dyson의 공식을 사용하면 Boussinesq-Papcovich 함수  $G'(x_i, y_i, z_i)$ 를 아래와 같은 1차원 적분형태로 표현할 수 있다.

$$G'(x_i, y_i, z_i) = \frac{ab^2 p_0}{8\mu E(k)} \int_t^\infty \left(1 - \frac{x_i^2}{a^2+s} - \frac{y_i^2}{b^2+s} - \frac{z_i^2}{s}\right) \frac{ds}{q(s)} \quad (44)$$

여기서,  $q(s) = \sqrt{s(a^2+s)(b^2+s)}$ 이고,  $t$ 는 다음 방정식의 양의 근을 나타낸다.

$$1 - \frac{x_i^2}{a^2+t} - \frac{y_i^2}{b^2+t} - \frac{z_i^2}{t} = 0$$

균열면에서는 위치에너지  $G'(x_i, y_i, z_i)$ 가 아래와 같이 되고

$$g(x_i, y_i) = -\frac{ab^2 p}{8\mu E(k)} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_i^2}{a^2+s} - \frac{y_i^2}{b^2+s}\right) \frac{ds}{q(s)} \quad (45)$$

윗 식은 완전 타원적분으로 표현할 수 있다. 즉,

$$g'(x_i, y_i) = -\frac{ab^2 p_0}{8\mu E(k)} \{D - x_i^2 A - y_i^2 B\} \quad (45)'$$

여기서

$$D = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s(a^2+s)(b^2+s)}} = \frac{2F(k)}{a}$$

$$A = \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{s(a^2+s)(b^2+s)}} = \frac{2}{k^2} \left\{ \frac{F(k)}{a^3} - \frac{E(k)}{a^3} \right\}$$

$$B = \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{s(a^2+s)(b^2+s)}} = \frac{2}{k^2 k^2} \left\{ \frac{E(k)}{a^3} - \frac{k'^2 F(k)}{a^3} \right\}$$

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k' = \frac{b}{a}$$

으로 쓸 수 있다. 위치에너지  $g'(x_i, y_i)$ 로부터  $(x, y)$  균열면에 작용하는 압력은 다음과 같다.

$$p(x, y) = \frac{2\mu \bar{c}^{3/2}}{(x^2+y^2)^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \left\{ \sqrt{(x'-c)^2 + y'^2} g'(x_i(x', y'), y_i(x', y')) \right\} \quad (46)$$

여기서,  $(x, y)$ 와  $(x', y')$ 의 관계식

$$x' - c = -\frac{\bar{c}x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{\bar{c}y}{x^2+y^2}$$

을 사용하면  $p(x, y)$ 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$p(x, y) = \frac{a\bar{c}^{1/2}b^2 p_0}{4E(k)(x^2+y^2)^{3/2}} [A I(x, y) + B J(x, y) - D] \quad (46)'$$

여기서,

$$I(x, y) = \left\{ c^2 - \frac{6c\bar{c}x}{x^2+y^2} + \frac{5\bar{c}^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right\} n_1^2 + \frac{10\bar{c}^2xy - 6c\bar{c}y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} n_1 n_2 + \frac{2c(x^2+y^2) - 6\bar{c}x}{x^2+y^2} a n_1 \cos \phi_0 - \frac{6\bar{c}y}{x^2+y^2} a n_2 \cos \phi_0 + \frac{2x^2+7y^2}{(x^2+y^2)^2} \bar{c}^2 + a^2 \cos^2 \phi_0$$

이고

$$J(x, y) = \left\{ c^2 - \frac{6c\bar{c}x}{x^2+y^2} + \frac{5\bar{c}^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right\} n_2^2 + \frac{10\bar{c}^2xy - 6c\bar{c}y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} n_1 n_2 + \frac{2c(x^2+y^2) - 6\bar{c}x}{x^2+y^2} b n_2 \sin \phi_0 - \frac{6\bar{c}y}{x^2+y^2} b n_1 \sin \phi_0 + \frac{2x^2+7y^2}{(x^2+y^2)^2} \bar{c}^2 + b^2 \sin^2 \phi_0$$

이다. Table 1과 Fig. 6은 식 (46)에 의하여 사상된 균열 면에 작용하는 상대 입력분포  $p/p_0$ 를 보여준다. 타원균열 끝을 따라서 공학 응력확대계수가 다음과 같이 되므로

$$K_1(\phi) = \frac{p_0 \sqrt{\pi b}}{E(k)} \left( \sin^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \phi \right)^{1/4} \quad (47)$$

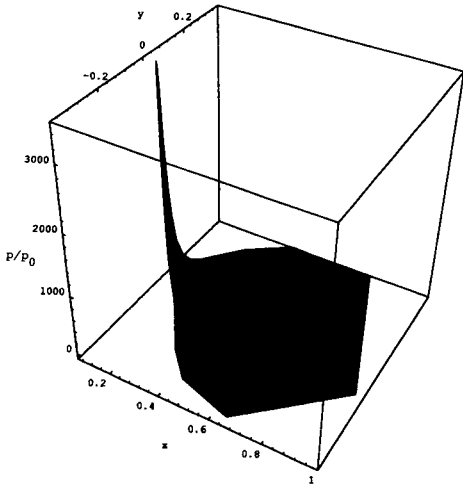
사상된 균열에서의 응력확대계수는

$$K_1(x, y) = \frac{\bar{c}^2 p_0 \sqrt{\pi b}}{E(k)(x^2+y^2)^2} \left( \sin^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \phi \right)^{1/4} \quad (48)$$

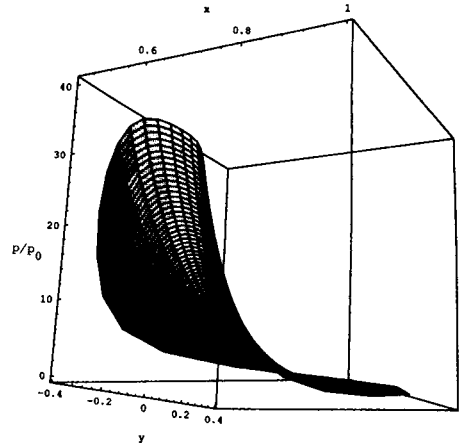
으로 된다. 여기서

$$\sin \phi = \sin \phi_0 + \left( c - \frac{\bar{c}x}{x^2+y^2} \right) \frac{a \sin \phi_0}{bN} + \frac{\bar{c}y \cos \phi_0}{N(x^2+y^2)}$$

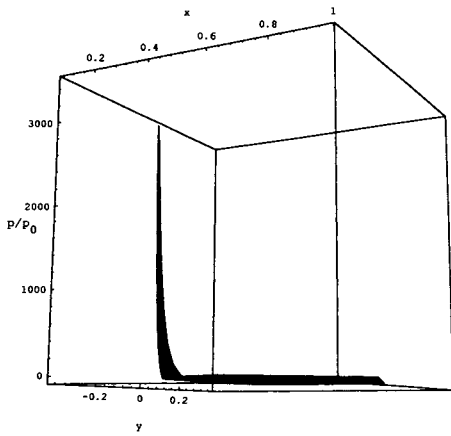
$$\cos \phi = \cos \phi_0 + \left( c - \frac{\bar{c}x}{x^2+y^2} \right) \frac{b \cos \phi_0}{aN} - \frac{\bar{c}y \sin \phi_0}{N(x^2+y^2)}$$



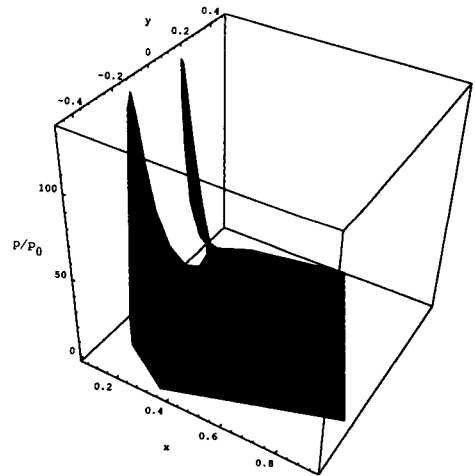
(a)  $\theta_0=15^\circ, b=0.5, c=0.2$



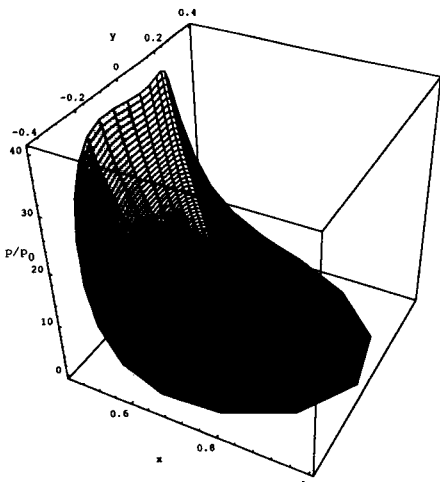
(d)  $\theta_0=90^\circ, b=0.5, c=1$



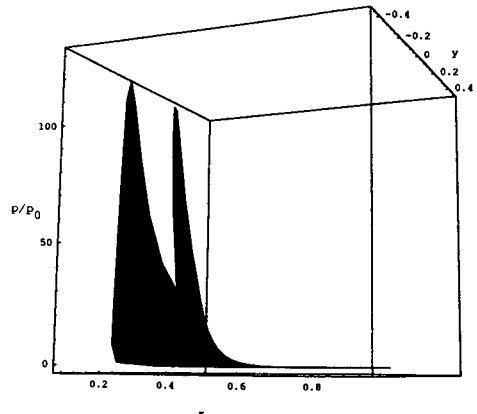
(b)  $\theta_0=15^\circ, b=0.5, c=0.2$



(e)  $\theta_0=90^\circ, b=0.3, c=0.2$



(c)  $\theta_0=90^\circ, b=0.5, c=1$



(f)  $\theta_0=90^\circ, b=0.3, c=0.2$

Fig. 6 Pressure distribution in image crack surface with various view points

**Table 1** Relative pressure distribution in image crack surface with various parameters  
(a)  $r'=0$ ,  $\theta_0=15^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=0.2$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.164236	0.0505166	95.6467	0
0.164236	0.0505166	95.6467	0.314159
0.164236	0.0505166	95.6467	0.628319
0.164236	0.0505166	95.6467	0.942478
0.164236	0.0505166	95.6467	1.25664
0.164236	0.0505166	95.6467	1.5708
0.164236	0.0505166	95.6467	1.88496
0.164236	0.0505166	95.6467	2.19911
0.164236	0.0505166	95.6467	2.51327
0.164236	0.0505166	95.6467	2.82743
0.164236	0.0505166	95.6467	3.14159
0.164236	0.0505166	95.6467	3.45575
0.164236	0.0505166	95.6467	3.76991
0.164236	0.0505166	95.6467	4.08407
0.164236	0.0505166	95.6467	4.39823
0.164236	0.0505166	95.6467	4.71239
0.164236	0.0505166	95.6467	5.02655
0.164236	0.0505166	95.6467	5.34071
0.164236	0.0505166	95.6467	5.65487
0.164236	0.0505166	95.6467	5.96903
0.164236	0.0505166	95.6467	6.28319

(b)  $r'=0.25$ ,  $\theta_0=15^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=0.2$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.210871	0.0529695	18.1163	0
0.207592	0.0619305	18.4418	0.314159
0.198542	0.0687348	23.4188	0.628319
0.185999	0.0719788	34.6747	0.942478
0.172599	0.0716906	54.9479	1.25664
0.160293	0.0688314	87.1328	1.5708
0.150115	0.0645431	132.361	1.88496
0.142429	0.0597183	187.629	2.19911

0.13726	0.0549102	244.482	2.51327
0.134509	0.0504006	290.431	2.82743
0.134066	0.0462969	313.368	3.14159
0.13585	0.0426154	306.89	3.45575
0.139819	0.0393422	273.283	3.76991
0.145941	0.0364872	222.234	4.08407
0.154153	0.0341394	166.243	4.39823
0.164272	0.0325323	115.703	4.71239
0.175864	0.0321049	76.2368	5.026550
0.188063	0.0335065	48.8407	5.34071
0.199384	0.0374296	31.704	5.65487
0.207724	0.0441604	22.1828	5.96903
0.210871	0.0529695	18.1163	6.28319

(c)  $r'=0.5$ ,  $\theta_0=15^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=0.2$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.290474	0.0458394	-0.118569	0
0.281945	0.0796924	-0.300004	0.314159
0.249603	0.102029	1.69752	0.628319
0.210505	0.105995	9.62757	0.942478
0.177098	0.0981356	33.0971	1.25664
0.152364	0.0861921	88.606	1.5708
0.13515	0.0743	194.153	1.88496
0.123713	0.0639191	354.892	2.19911
0.116721	0.0552718	547.228	2.51327
0.11333	0.0481243	717.379	2.82743
0.113085	0.0421092	804.053	3.14159
0.115825	0.0368358	773.591	3.45575
0.121624	0.031918	640.659	3.76991
0.130757	0.0269824	457.518	4.08407
0.143672	0.0217042	282.271	4.39823
0.160946	0.0159346	150.553	4.70239
0.183168	0.0100347	69.3998	5.02655
0.210601	0.00557031	27.4619	5.34071
0.242148	0.00633716	9.02501	5.65487

0.272772	0.018493	2.07452	5.96903
0.290474	0.0458394	-0.118569	6.28319

(d)  $r'=0.75$ ,  $\theta_0=15^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=0.2$ 

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.442704	-0.0118374	-0.948685	0
0.438643	0.109805	-1.08002	0.314159
0.330352	0.174297	-1.27636	0.628319
0.233078	0.161113	1.67669	0.942478
0.174774	0.129249	22.7088	1.25664
0.140925	0.101353	100.082	1.5708
0.120532	0.0804036	292.455	1.88496
0.108087	0.065104	640.372	2.19911
0.100899	0.0538147	1104.54	2.51327
0.0976379	0.0452303	1540.97	2.82743
0.0977016	0.0383658	1765.22	3.14159
0.100943	0.0324295	1673.78	3.45575
0.107572	0.0266875	1317.82	3.76991
0.118128	0.0203312	860.881	4.08407
0.133517	0.0123435	464.619	4.39823
0.15507	0.00140201	205.369	4.71239
0.184693	-0.0140036	72.9857	5.02655
0.225281	-0.0346642	19.782	5.34071
0.28168	-0.0572993	3.19881	5.65487
0.359737	-0.0647092	-0.510813	5.96903
0.442704	-0.0118374	-0.948685	6.28319

(e)  $r'=1$ ,  $\theta_0=15^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=0.2$ 

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.657027	-0.370056	-0.121165	0
0.97337	0.140968	-0.0940029	0.314159
0.449641	0.378013	-0.405403	0.628319
0.23726	0.247691	0.281928	0.942478
0.162506	0.162464	19.3116	1.25664
0.126923	0.113391	123.141	1.5708
0.106967	0.083645	443.087	1.88496

0.0951589	0.0645424	1102.38	2.19911
0.0884933	0.0515908	2055.	2.51327
0.0856157	0.0422929	2990.11	2.82743
0.08596	0.0351156	3471.99	3.14159
0.0894492	0.028961	3252.86	3.45575
0.0964037	0.0228341	2466.82	3.76991
0.107544	0.0155436	1509.99	4.08407
0.124035	0.00531872	740.405	4.39823
0.147506	-0.0107749	287.561	4.71239
0.179951	-0.0376736	87.1695	5.02655
0.223706	-0.0831572	20.0723	5.34071
0.283958	-0.157734	3.14545	5.65487
0.386403	-0.270677	0.0994795	5.96903
0.657027	-0.370056	-0.121165	6.28319

(f)  $r'=0$ ,  $\theta_0=90^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=1$ 

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.666667	0	6.68348	0
0.666667	0	6.68348	0.314159
0.666667	0	6.68348	0.628319
0.666667	0	6.68348	0.942478
0.666667	0	6.68348	1.25664
0.666667	0	6.68348	1.5708
0.666667	0	6.68348	1.88496
0.666667	0	6.68348	2.19911
0.666667	0	6.68348	2.51327
0.666667	0	6.68348	2.82743
0.666667	0	6.68348	3.14159
0.666667	0	6.68348	3.45575
0.666667	0	6.68348	3.76991
0.666667	0	6.68348	4.08407
0.666667	0	6.68348	4.39823
0.666667	0	6.68348	4.71239
0.666667	0	6.68348	5.02655
0.666667	0	6.68348	5.34071

Table 1 Continued

0.666667	0	6.68348	5.65487
0.666667	0	6.68348	5.96903
0.666667	0	6.68348	6.28319

(g)  $r'=0.25, \theta_0=90^\circ, b=0.5, c=1$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.648649	-0.108108	7.39571	0
0.666641	-0.108462	6.19304	0.31415
0.68719	-0.0974303	5.1401	0.628319
0.707059	-0.0742739	4.33827	0.942478
0.721793	-0.0403742	3.84369	1.25664
0.727273	0	3.67744	1.5708
0.721793	0.0403742	3.84369	1.88496
0.707059	0.0742739	4.33827	2.19911
0.68719	0.974303	5.1401	2.51327
0.666641	0.108462	6.19304	2.82743
0.648649	0.108108	7.39571	3.14159
0.634772	0.0980913	8.61241	3.45575
0.625207	0.0803641	9.70248	3.76991
0.619343	0.0568413	10.5509	4.08407
0.616307	0.294106	11.0838	4.39823
0.615385	0	11.2648	4.71239
0.616307	-0.0294106	11.0838	5.02655
0.619343	-0.0568413	10.5509	5.34071
0.625207	-0.0803641	9.70248	5.65487
0.634772	-0.0980913	8.61241	5.96903
0.648649	-0.108108	7.39571	6.28319

(h)  $r'=0.5, \theta_0=90^\circ, b=0.5, c=1$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.6	-0.2	9.76935	0
0.632238	-0.211315	6.97298	0.314159
0.678433	-0.202824	4.63305	0.628319
0.732976	-0.165993	3.00212	0.942478
0.780549	-0.0955459	2.09587	1.25664
0.8	0	1.81282	1.5708

0.780549	0.0955459	2.09587	1.88496
0.732976	0.165993	3.00212	2.19911
0.678433	0.202824	4.63305	2.51327
0.632238	0.211315	6.97298	2.82743
0.6	0.2	9.76935	3.14159
0.581185	0.175222	12.5798	3.45575
0.57264	0.140647	14.9645	3.76991
0.570452	0.0984881	16.6657	4.08407
0.570939	0.0507634	17.6393	4.39823
0.571429	0	17.9503	4.71239
0.570939	-0.0507634	17.6393	5.02655
0.570452	-0.0984881	16.6657	5.34071
0.57264	-0.140647	14.9645	5.65487
0.581185	-0.175222	12.5798	5.96903
0.6	-0.2	9.76935	6.28319

(i)  $r'=0.75, \theta_0=90^\circ, b=0.5, c=1$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.533333	-0.266667	14.5532	0
0.570872	-0.294193	9.26017	0.314159
0.63804	-0.302551	4.997	0.628319
0.735821	-0.271079	2.33595	0.942478
0.840101	-0.170292	2.08172	1.25664
0.88889	0	0.741731	1.5708
0.840101	0.170292	1.08172	1.88496
0.73821	0.271079	2.33595	2.19911
0.63804	0.302551	4.997	2.51327
0.570872	0.294193	9.26017	2.82743
0.533333	0.266667	14.5532	3.14159
0.517934	0.22863	19.7011	3.45575
0.516952	0.18232	23.6422	3.76991
0.523247	0.127908	26.0065	4.08407
0.530342	0.0662019	27.0874	4.39823
0.533333	0	27.3737	4.71239
0.530342	-0.0662019	27.0874	5.02655

Table 1 Continued

0.523247	-0.127908	26.0065	5.34071
0.516952	-0.18232	23.6422	5.65487
0.517934	-0.22863	19.7011	5.96903
0.533333	-0.266667	14.5532	6.28319

(j)  $r'=1, \theta_0=90^\circ, b=0.5, c=1$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.461538	0.307692	23.114	0
0.495603	-0.350316	13.7317	0.314159
0.571831	-0.383565	6.31659	0.628319
0.708784	-0.380298	2.1428	0.942478
0.894709	-0.269876	0.53732	1.25664
1.	0	0.192946	1.5708
0.894709	0.269876	0.53732	1.88496
0.708784	0.380298	2.1428	2.19911
0.571831	0.383565	6.31659	2.51327
0.495603	0.350316	13.7317	2.82743
0.461538	0.307692	23.114	3.14159
0.454297	0.261142	31.7351	3.45575
0.463232	0.20891	37.4051	3.76991
0.479406	0.147958	39.8492	4.08407
0.494104	0.077289	40.3237	4.39823
0.5	0	40.2822	4.71239
0.494104	-0.007289	40.3237	5.02655
0.479406	-0.147958	39.8492	5.34071
0.463232	-0.20891	37.4051	5.65487
0.454297	-0.261142	31.7351	5.96903
0.461538	-0.307692	23.114	6.28319

(k)  $r'=0, \theta_0=90^\circ, b=0.3, c=0.2$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.4	0	0.86963	0
0.4	0	0.86963	0.314159
0.4	0	0.86963	0.628319
0.4	0	0.86963	0.942478
0.4	0	0.86963	1.25664

0.4	0	0.86963	1.5708
0.4	0	0.86963	1.88496
0.4	0	0.86963	2.19911
0.4	0	0.86963	2.51327
0.4	0	0.86963	2.82743
0.4	0	0.86963	3.14159
0.4	0	0.86963	3.45575
0.4	0	0.86963	3.76991
0.4	0	0.86963	4.08407
0.4	0	0.86963	4.39823
0.4	0	0.86963	4.71239
0.4	0	0.86963	5.02655
0.4	0	0.86963	5.34071
0.4	0	0.86963	5.65487
0.4	0	0.86963	5.96903
0.4	0	0.86963	6.28319

(l)  $r'=0.25, \theta_0=90^\circ, b=0.3, c=0.2$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.32	-0.16	2.09582	0
0.335918	-0.167503	1.39855	0.314159
0.366542	-0.162606	0.756311	0.628319
0.409438	-0.13695	0.312579	0.942478
0.451882	-0.0814373	0.0858607	1.25664
0.470588	0	0.0211415	1.5708
0.451882	0.0814373	0.0858607	1.88496
0.409438	0.13695	0.312579	2.19911
0.366542	0.162606	0.756311	2.51327
0.335918	0.167503	1.39855	2.82743
0.32	0.16	2.09582	3.14159
0.316841	0.143992	2.65116	3.45575
0.322962	0.120056	2.94939	3.76991
0.333784	0.0874808	3.02032	4.08407
0.343775	0.0464848	2.98499	4.39823
0.347826	0	2.95838	4.71239

Table 1 Continued

0.343775	-0.0464848	2.98499	5.02655
0.333784	-0.0874808	3.02032	5.34071
0.322962	-0.210056	2.94939	5.65487
0.316841	-0.143992	2.65116	5.96903
0.32	-0.16	2.09582	6.28319

(m)  $r'=0.5, \theta_0=90^\circ, b=0.3, c=0.2$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.2	-0.2	9.58753	0
0.210059	-0.220191	5.91459	0.314159
0.247174	-0.242778	2.40377	0.628319
0.329622	-0.25584	0.448487	0.942478
0.471533	-0.203883	-0.128478	1.25664
0.571429	0	-0.192227	1.5708
0.471533	0.203883	-0.128478	1.88496
0.329622	0.25584	0.448487	2.19911
0.247174	0.242778	2.40377	2.51327
0.210059	0.220191	5.91459	2.82743
0.2	0.2	9.58753	3.14159
0.208282	0.181282	11.5075	3.45575
0.230849	0.158765	11.082	3.76991
0.263033	0.124412	9.35448	4.08407
0.294202	0.0707322	7.76739	4.39823
0.307692	0	7.16461	4.71239
0.294202	-0.0707322	7.76739	5.02655
0.263033	-0.124412	9.35448	5.34071
0.230849	-0.158765	11.082	5.65487
0.208282	-0.181282	11.5075	5.96903
0.2	-0.2	9.58753	6.28319

(n)  $r'=0.75, \theta_0=90^\circ, b=0.3, c=0.2$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.123077	-0.184615	38.3168	0
0.124039	-0.205533	24.1295	0.314159
0.146106	-0.241066	9.34289	0.628319
0.215249	-0.298424	1.56448	0.942478

0.422105	-0.342042	-0.13429	1.25664
0.727273	0	-0.152222	1.5708
0.422105	0.342042	-0.13429	1.88496
0.215249	0.298424	1.56448	2.19911
0.146106	0.241066	9.34289	2.51327
0.124039	0.205533	24.1295	2.82743
0.123077	0.184615	38.3168	3.14159
0.136717	0.171228	42.5093	3.45575
0.16467	0.158031	35.7406	3.76991
0.206831	0.133688	25.0878	4.08407
0.253415	0.0822594	17.3096	4.39823
0.275862	0	14.6863	4.71239
0.253415	-0.0822594	17.3096	5.02655
0.206831	-0.133688	25.0878	5.34071
0.16467	-0.158031	35.7406	5.65487
0.136717	-0.171228	42.5093	5.96903
0.123077	-0.184615	38.3168	6.28319

(o)  $r'=1, \theta_0=90^\circ, b=0.3, c=0.2$

x	y	p/p <sub>0</sub>	$\theta'$ (Radian)
0.08	-0.16	122.424	0
0.0761016	-0.177702	79.647	0.314159
0.0852571	-0.213105	31.1497	0.628319
0.124994	-0.285546	5.32347	0.942478
0.303267	-0.436525	-0.0268834	1.25664
1.	0	-0.0658618	1.5708
0.303267	0.436525	-0.0268834	1.88496
0.124994	0.285546	5.32347	2.19911
0.0852571	0.213105	31.1497	2.51327
0.0761016	0.177702	79.647	2.82743
0.08	0.16	122.424	3.14159
0.0943942	0.151465	127.803	3.45575
0.12165	0.145515	97.3457	3.76991
0.165579	0.131041	59.1554	4.08407
0.220528	0.0867764	34.6492	4.39823

Table 1 Continued

0.25	0	27.0907	4.71239
0.220528	-0.0867764	34.6492	5.02655
0.165579	-0.131041	59.1554	5.34071
0.12165	-0.145515	97.3457	5.65487
0.0943942	-0.151465	127.803	5.96903
0.08	-0.16	122.424	6.28319

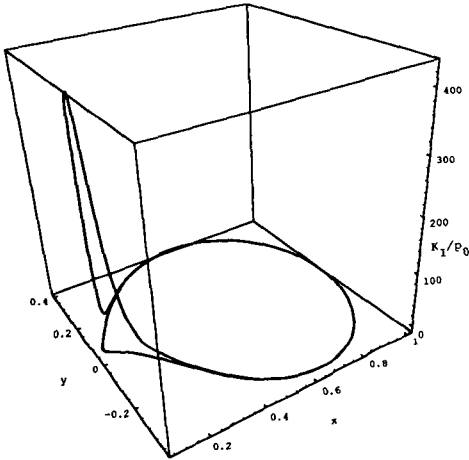


Fig. 7 Stress intensity factors ( $K_I/p_0$ ) along the image crack tip for  $\theta_0=15^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=0.2$

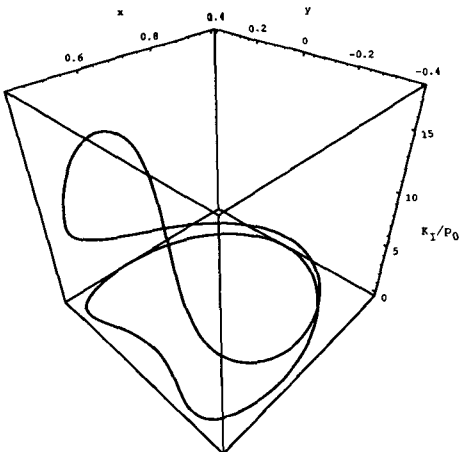


Fig. 8 Stress intensity factors ( $K_I/p_0$ ) along the image crack tip for  $\theta_0=90^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=1$

Table 2 Stress intensity factor  $K_I$  along the image crack tip for  $\theta_0=15^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=0.2$

x	y	$K_I/p_0$	$\theta'$ (Radian)
0.657027	-0.370056	0.0968967	0
0.97337	0.140968	0.0356591	0.314159
0.449641	0.378013	0.314316	0.628319
0.23726	0.247691	2.97018	0.942478
0.162506	0.162464	15.5989	1.25664
0.126923	0.113391	52.8045	1.5708
0.106967	0.083645	127.927	1.88496
0.0951589	0.0645424	235.174	2.19911
0.0884933	0.0515908	339.945	2.51327
0.0856157	0.0422929	401.276	2.82743
0.08596	0.0351156	421.429	3.14159
0.0894492	0.08961	426.99	3.45575
0.0964037	0.0228341	388.504	3.76991
0.107544	0.0155436	294.861	4.08407
0.124035	0.00531872	183.079	4.39823
0.147506	-0.0107749	92.6006	4.71239
0.179951	-0.0376736	38.0659	5.02655
0.223706	-0.0831572	12.6702	5.34071
0.283958	-0.157734	3.36185	5.65487
0.386403	-0.270677	0.673545	5.96903
0.657027	-0.370056	0.0968967	6.28319

Table 3 Stress intensity factor  $K_I$  along the image crack tip for  $\theta_0=90^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $c=1$

x	y	$K_I/p_0$	$\theta'$ (Radian)
0.461538	-0.307692	8.27311	0
0.495603	-0.350316	6.14817	0.314159
0.571831	-0.383565	4.16255	0.628319
0.708784	-0.380298	2.45496	0.942478
0.894709	-0.269876	1.42556	1.25664
1.	0	1.10769	1.5708
0.894709	0.269876	1.42556	1.88496

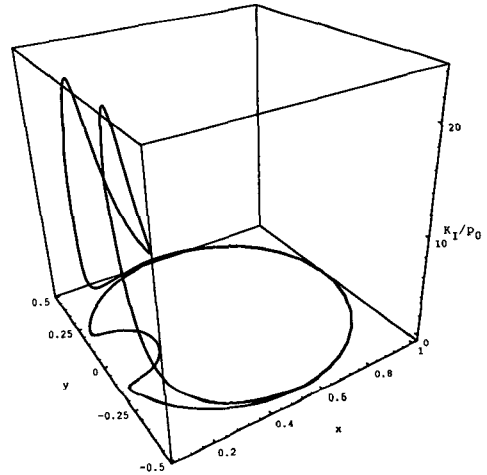


0.708784	0.380298	2.45496	2.19911
0.571831	0.383565	4.16255	2.51327
0.495603	0.350316	6.14817	2.82743
0.461538	0.307692	8.27311	3.14159
0.454297	0.261142	11.064	3.45575
0.463232	0.20891	14.032	3.76991
0.479406	0.147958	16.2186	4.08407
0.494104	0.007289	17.3812	4.39823
0.5	0	17.723	4.71239
0.494104	-0.077289	17.3812	5.02655
0.479406	-0.147958	16.2186	5.34071
0.463232	-0.20891	14.032	5.65487
0.454297	-0.261142	11.064	5.96903
0.461538	-0.307692	8.27311	6.28319

0.165579	-0.131041	16.8215	5.34071
0.12165	-0.151465	23.6478	5.65487
0.0943942	-0.151465	23.493	5.96903
0.08	-0.16	19.6582	6.28319

**Table 4** Stress intensity factor  $K_I$  along the image crack tip for  $\theta_0=90^\circ$ ,  $b=0.3$ ,  $c=0.2$

x	y	$K_I/p_0$	$\theta'$ (Radian)
0.08	-0.16	19.6582	0
0.0761016	-0.177702	17.068	0.314159
0.0852571	-0.213105	10.5598	0.628319
0.124994	-0.285546	3.54263	0.942478
0.0303267	-0.436525	0.450089	1.25664
1.	0	0.0367521	1.5708
0.303267	0.436525	0.450089	1.88496
0.124994	0.285546	3.54263	2.19911
0.0852571	0.213105	10.5598	2.51327
0.0761016	0.177702	17.068	2.82743
0.08	0.16	19.6582	3.14159
0.0943942	0.151465	23.493	3.45575
0.12165	0.145515	22.6478	3.76991
0.165579	0.131041	16.8215	4.08407
0.220528	0.0867764	11.3897	4.39823
0.25	0	9.40854	4.71239
0.220528	-0.0867764	11.3897	5.02655



**Fig. 9** Stress intensity factors ( $K_I/p_0$ ) along the image crack tip for  $\theta_0=90^\circ$ ,  $b=0.3$ ,  $c=0.2$

이다. Tables 2, 3, 4와 Figs. 7, 8, 9는 사상균열 (image crack)에서의 응력확대계수  $K_I(x, y)/p_0$ 를 보여준다.

### 5. 결론

본 논문에서는 분수선형사상을 이용하여 3차원 평면 균열문제를 이미 알려져 있는 엄밀해를 이용하여 구하는 방법을 제시하였다. 예제로서 타원균열에 일정한 수직 압력이 작용하는 경우 분수선형사상에 의한 균열형상과 그 형상에서의 응력확대계수를 구하였다.

### 참고문헌

- (1) Sih, G. C. and Liebowitz, H., 1968, "Fracture an Advanced Treatise," Edited by Liebowitz, H., Academic Press, Vol. II pp. pp. 67~190.
- (2) Bueckner, H. F., 1987, "Weight Functions and Fundamental Fields for the Penny-Shaped and

- Half-Plane Crack in Three-Space," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 23, No. 1, pp. 57~93.
- (3) Kassir, M. K. and Sih, G. C., 1967, "Griffith Theory of Brittle Fracture in Three Dimensions," *Int. J. Eng. Science*, Vol. 5, pp. 899~918.
- (4) Kassir, M. K. and Sih, G. C., 1973, "Application of Papkovitch-Neuber Potentials to a Crack Problem," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 9, pp. 643~654.
- (5) Cherepanov, G. P., 1979, *Mechanics of Brittle Fracture*, McGraw-Hill, New York.
- (6) Walpole L. J., 1970, "Some Elastostatic and Potential Problems for Elliptic Disc," *Pro. Cam. Phil. Soc.*, Vol. 67, pp. 225~235.
- (7) Dyson, F. W., 1891, "The Potentials of Ellipsoids of Variable Densities," *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, Vol. 25, pp. 259~288.
- (8) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., 1973, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation.