韓國經營科學會誌
第20卷 第1號
1995年 4月

최소비용문제의 비정점 최적해에 대한 감도분석

정호연* · 박순달**

Sensitivity Analysis on the Non-tree Solution of the Minimum Cost Flow Problem

Hoyeon Chung* · Soondal Park**

Abstract

The purpose of this paper is to develop a method of the sensitivity analysis that can be applied to a non-tree solution of the minimum cost flow problem.

First, we introduce two types of sensitivity analysis. A sensitivity analysis of Type 1 is the well known method applicable to a tree solution. However this method can not be applied to a non-tree solution. So we propose a sensitivity analysis of Type 2 that keeps solutions of upper bounds at upper bounds, those of lower bounds at lower bounds, and those of intermediate values at intermediate values.

For the cost coefficient we present a method that the sensitivity analysis of Type 2 is solved by finding the shortest path. Besides we also show that the results of Type 2 and Type 1 are the same in a spanning tree solution.

For the right-hand side constant or the capacity, the sensitivity analysis of Type 2 is solved by a simple calculation using arcs with intermediate values.

* 전주대학교 산업공학과
** 서울대학교 산업공학과

1. 서 론

이 논문에서는 다음과 같은 최소비용문제의 감도분석을 다루고자 한다.

$$\begin{aligned} &\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\ &\text{s.t.} \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = b_i, \ \forall \ i\in N \\ &\qquad l_{ij}\le x_{ij}\le u_{ij}, \ \forall (i,j)\in A \end{aligned}$$

단, 최소비용문제의 네트워크 $G=(N,A)$는 마디 수가 $|N|=$n 이고, 호의 수가 $|A|=$m 인 유방향 네트워크라고 가정한다.

이 문제를 네트워크 단체법으로 풀면 최적해는 정점 최적해가 되며 나무(tree)구조의 최적기저를 갖게 된다. 이 때 감도분석은 이 최적기저를 유지하는 계수들의 범위를 찾는 것이다. 그러나 주어진 문제에 대한 최적해가 퇴화(degeneracy)인 경우에는 최적기저에 용량하한이나 용량상한값을 갖는 호가 포함되기 때문에 이 감도분석을 적용하면 하한값을 갖던 호가 상한값으로 흐르게 되거나 상한값을 갖던 호가 하한값으로 흐를 수 있다. 이것은 유통량이 전혀 없던 호에 새로운 유통량의 흐름을 허용하거나 최대의 유통이 흐르고 있던 호에 아무 유통량도 흐르지 못하게 하여 기존의 결정된 정책을 바꾸어야 하는 현실적인 어려움이 있다. 더구나 Out-of-Kilter법과 같은 해법에서 구할 수 있는 비정점 최적해에 대해서는 기존의 방법을 적용할 수 없기 때문에 일반적인 최적해 즉, 정점 최적해나 비정점 최적해, 또는 퇴화 정점 최적해가 주어지는 모든 경우에 적용할 수 있는 감도분석의 개념이 요구된다.

따라서 다음과 같은 새로운 감도분석의 개념을 도입하고자 한다. 먼저 최소비용문제의 최적해 X^*가 주어지면 각 호는 주어진 유통량에 따라 다음 세 종류의 호로 나눌 수 있다.

$$\mathbb{B}(X^*)=\{(i,j)\in A : l_{ij}<x^*_{ij}<u_{ij}\}$$
$$\mathbb{L}(X^*)=\{(i,j)\in A : x^*_{ij}=l_{ij}\}$$
$$\mathbb{U}(X^*)=\{(i,j)\in A : x^*_{ij}=u_{ij}\}$$

이 때 종래의 감도분석을 제 1 종 감도분석이라 하고 새로운 감도분석을 제 2 종 감도분석이라 하여 다음과 같이 정의하자.

[정의 1] 제 2 종 감도분석

최소비용문제의 최적해가 주어졌을 때 각 호의 유통량에 따라 결정되는 최적해의 구조($\mathbb{B}$, $\mathbb{L}$,$\mathbb{U}$)를 유지하는 계수의 범위를 구하는 것을 제 2 종 감도분석이라 한다.

따라서 제 2 종 감도분석은 호(i,j)가 용량 상한값을 갖으면 계속 용량 상한값을 갖도록 하고, 용량 하한값을 갖으면 계속 용량 하한값을 갖도록 하며, $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호는 계속 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 유지하는 계수들의 범위를 구하는 감도분석이다.

2. 목적함수계수에 대한 감도분석

최소비용문제의 네트워크 $G=(N,A)$에 대한 최적해 X^*가 주어졌다고 하자. 이 때 만일 목적함수계수 c_{ij}가 c'_{ij}로 변하면 이에 대응되는 최적해와 최적해의 구조($\mathbb{B}$,$\mathbb{L}$,$\mathbb{U}$)도 변하는데 이 구조를 그대로 유지하는 목적함수계수의 변화 범위를 알아보는 것이 목적함수계수에 대한 제 2 종 감도분석이다.

먼저 최소비용문제에 대한 임의의 가능해 X가 주어졌을 때 이 가능해가 최적이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다[3][8].

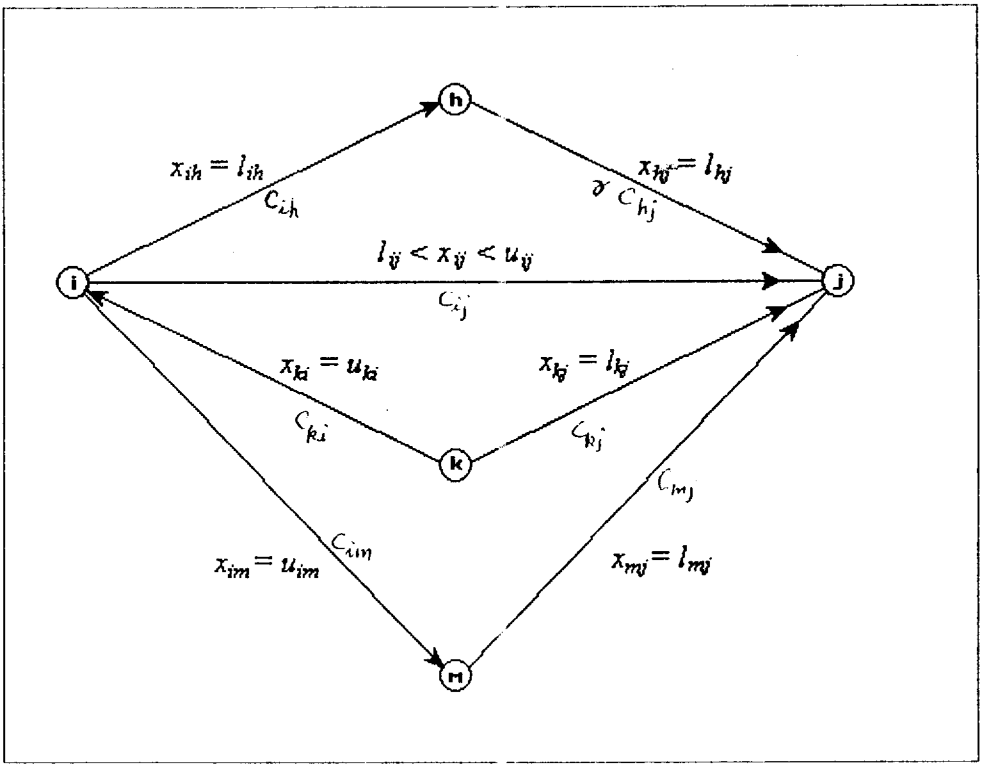
$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - w_i + w_j > 0$이면 $x_{ij} = l_{ij}$
$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - w_i + w_j < 0$이면 $x_{ij} = u_{ij}$
$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - w_{ij} + w_{ij} = 0$이면 $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

그래서 최적해 X^*가 주어졌을 때 호(i,j)에 대한 목적함수계수에 대한 제 2 종 감도분석은 결국 다음 조건을 만족하는 c'_{ij}의 범위를 찾는 것이 된다.

$x^*_{ij} = l_{ij}$일 때 $c'_{ij} - w^*_i + w^*_j \geq 0$
$x^*_{ij} = u_{ij}$일 때 $c'_{ij} - w^*_i + w^*_j \leq 0$
$l_{ij} < x^*_{ij} < u_{ij}$일 때 $c'_{ij} - w^*_i + w^*_j = 0$

이제 목적함수계수에 대한 제 2 종 감도분석의 개념을 살펴보자.

지금 최적해 X^*가 주어진 상태에서 호(i,j)의 비용이 c_{ij}에서 c'_{ij}로 변했다고 하자. 이 때 만일 c'_{ij}보다 더 적은 비용으로 마디 i에서 마디 j까지 갈 수 있는 경로 $P(i,j)$가 존재한다면 호(i,j)를 통하기 보다는 마디 i에서 마디 j까지의 경로 $P(i,j)$를 통해 유통량을 보내게 된다. 이러한 경로에 대한 유통이 발생되면 호의 유통량이 바뀌기 때문에 최적해의 구조$(\mathbb{B},\mathbb{L},\mathbb{U})$도 변할 수 있다. 따라서 최적해의 구조$(\mathbb{B},\mathbb{L},\mathbb{U})$를 유지하는 계수의 범위는 이러한 변화가 발생되기 바로 전까지 변할 수 있는 c'_{ij}의 변화 범위가 된다.



[그림 1] $G=(N,A)$에 다수개의 경로 $P^k(i,j)$가 존재하는 경우

지금 목적함수계수 c_{ij}가 $c'_{ij}=c_{ij}+\theta$로 변했다고 하자. 이 때 구하고자 하는 θ의 범위는 즉, $\theta_l \le \theta \le \theta_u$이다. 여기서 θ_u는 최적해의 구조($\mathbb{B}$,$\mathbb{L}$,$\mathbb{U}$)를 유지하는 θ의 최대 증가량이고, θ_l은 최적해의 구조($\mathbb{B}$,$\mathbb{L}$,$\mathbb{U}$)를 유지하는 θ의 최대 감소량을 의미한다.

먼저 마디 i에서 마디 j까지 가는 여러 경로가 존재하는 [그림 1]과 같은 여러가지 경우를 고려해 보자.

[그림 1]에서 호(i,m)을 통해서는 유통량을 더 보낼 수 없지만 감소시킬 수는 있고, 반면에 호(m,j)를 통해서는 더 많은 유통량을 보낼 수는 있지만 감소시킬 수는 없다. 이러한 개념을 사용하여 마디 i에서 마디 j까지 유통량을 보낼 수 있는 경로는 $P^1(i,j)=\{(i,h),\ (h,j)\}$과 $P^2(i,j)=\{(k,i),\ (k,j)\}$ 밖에 없다. 이 때 경로 $P^1(i,j)$을 통해서 한 단위의 유통량을 보낼 때 소요되는 비용은 $c_{ih}+c_{hj}$가 된다. 만일 이 비용이 c'_{ij} 보다 더 적다면 경로 $P^1(i,j)$을 통해 유통량을 보내게 되어 최적해의 구조($\mathbb{B}$,$\mathbb{L}$,$\mathbb{U}$)가 바뀔 수 있다. 그러나 만일 $c'_{ij} \le c_{ih}+c_{hj}$이 성립한다면 경로 $P^1(i,j)$을 통한 유통의 흐름은 발생되지 않아 $\theta \le -c_{ij}+c_{ih}+c_{hj}$의 범위내에서 주어진 최적해의 구조($\mathbb{B}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{U}$)가 유지될 수 있다.

마찬가지로 경로 $P^2(i,j)$를 통해서 한 단위의 유통량을 보내게 되면 $-c_{ki}+c_{kj}$의 비용이 발생되게 된다. 만일 $c'_{ki} \le -c_{ki}+c_{kj}$가 성립하면 경로 $P^2(i,j)$를 통한 유통의 흐름은 발생되지 않아 $\theta \le -c_{ij}-c_{ki}+c_{kj}$의 범위내에서 주어진 최적해의 구조($\mathbb{B}$,$\mathbb{L}$,$\mathbb{U}$)가 유지될 수 있다.

여기서 경로 $P^1(i,j)$에 대한 θ의 상한값을 $\theta_u^1 = -c_{ij}+c_{ih}+c_{hj}$이라 하고, 경로 $P^2(i,j)$에 대한 θ의 상한값을 $\theta_u^2=-c_{ij}-c_{ki}+c_{kj}$라 하면, 주어진 전체 최적해의 구조($\mathbb{B}$,$\mathbb{L}$,$\mathbb{U}$)를 유지하는 θ의 상한값 θ_u는 θ_u^1과 θ_u^2의 공통범위에 해당되므로 $\theta_u = \min\{\theta_u^1,\ \theta_u^2\}$가 된다.

이러한 계산을 보다 용이하게 수행할 수 있도록 다음과 같이 변환 네트워크를 정의해 보자.

[정의 2] 변환 네트워크 $G'=(N,A')$

최소비용문제의 네트워크 $G'=(N,A')$에 대한 최적해 X^*가 주어졌을 때 변환 네트워크 $G'=(N,\ A')$는 다음과 같이 정의된다.

$l_{ij}<x^*_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)에 대하여 두 개의 비용을 갖는 호(i,j)와 호(j,i)로 변환한다.

즉, $c'_{ij}=c_{ij}$, $c'_{ji}=-c'_{ji}$

$x^*_{ij}=u_{ij}$인 호(i,j)에 대하여 $-c_{ij}$를 갖는 호$(j,\ i)$로 변환한다.

즉, $c'_{ji}=-c_{ji}$

$x^*_{ij}=l_{ij}$인 호(i,j)에 대하여 c_{ij}를 갖는 호(i,j)로 유지시킨다.

즉, $c'_{ij}=c_{ij}$

위와 같이 변환 네트워크 $G'=(N,A')$를 정의하면 θ의 상한값 θ_u는 $G'=(N,A')$에서 마디 i에서 마디 j까지 가는 유방향 경로 $\overline{P(i,\ j)}$의 길이에 $-c_{ij}$를 더한 값이 된다. 만일 마디 i에서 마디 j까지 가는 유방향 경로가 다수개 존재하면 θ_u는 이들 경로 중 길이가 가장 작은 경로의 길이에 $-c_{ij}$를 더한 값이 된다. 여기서 다수개의 유방향 경로 중에서 길이가 가장 작은 경로 길이는 마디 i에서 마디 j까지 가는 최단경로의 길이에 해당되기 때문에 θ_u 계산을 위해 최단경로를 구할 필요가 있다.

[보조정리 1] $G'=(N,A')$에는 음환(negative cycle)이 존재하지 않는다.

(증명) $G'=(N,A')$에 음환이 존재한다고 가정해 보자. 그러면 네트워크 $G=(N,A)$에 음가를 갖는 환(cycle)이 존재하여 이 환을 중심으로 현

재의 해를 개선시킬 수 있게 된다. 이것은 주어진 최적해 X^*보다 더 적은 목적함수값을 갖는 가능해(feasible solution)가 존재한다는 말이 되어 최적해가 주어진 것에 모순된다. 따라서 $G'=(N,A')$에는 음환이 존재하지 않다.

[보조정리 2] $G'=(N,A')$에 마디 i에서 마디 j까지 가는 유방향 경로 $\overline{P(i, j)}$가 존재하지 않으면 θ의 상한값 θ_u는 ∞가 된다.

(증명) $G'=(N,A')$에 유방향 경로 $\overline{P(i, j)}$가 존재하지 않는다는 것은 네트워크 $G=(N,A)$에 마디 i에서 마디 j까지 유통량을 보낼 수 있는 어떠한 경로도 존재하지 않다는 것을 의미한다. 따라서 이 때에는 c_{ij}가 아무리 증가하더라도 마디 i에서 마디 j로 유통량을 보낼 수 있는 경로가 존재하지 않기 때문에 최적해에서 주어진 x^*_{ij}만큼 보내게 된다. 따라서 $G'=(N,A')$에 유방향 경로 $\overline{P(i, j)}$가 존재하지 않으면 θ의 상한값 θ_u는 ∞가 된다.

결국 $G'=(N,A')$에 마디 i를 시발점으로 하고 마디 j를 종착점으로 하는 최단경로가 존재하면 θ_u는 상수값을 갖지만, 최단경로가 존재하지 않으면 θ_u는 ∞가 된다.

[정리 8] $G'=(N,A')$에 마디 i를 시발점으로 하고 마디 j를 종착점으로 하는 최단경로가 존재할 때 그 길이를 ℓ이라 하면 $\theta_u=\ell-c_{ij}$가 된다. 그러나 만일 그러한 최단경로가 존재하지 않으면 $\theta_u=\infty$가 된다.

(증명) $G'=(N,A')$에는 [보조정리 1]에 의해 음환(negative cycle)이 존재하지 않는다. 따라서 최단경로가 존재할 경우 이를 구할 수 있다.

만일 $G'=(N,A')$에 마디 i에서 마디 j까지 가는 최단경로가 존재하지 않으면 유방향 경로 $\overline{P(i, j)}$가 존재하지 않게 되어 [보조정리 2]에 의해 θ_u는 ∞가 된다. 만일 마디 i에서 마디 j까지 가는 유방향 경로가 다수개 존재하면 θ_u는 이들 경로 중에서 길이가 가장 작은 경로의 길이에 $-c_{ij}$를 더한 값이 된다. 이 때 다수개의 유방향 경로 중에서 k번째 경로길이를 $\overline{P_k(i, j)}$라 하면, 마디 i에서 마디 j까지의 최단경로의 길이 $\ell=\min\{\overline{P_k(i, j)}\}$가 된다. 따라서 $\theta_u=\ell-c_{ij}$가 된다.

다음으로 목적함수계수 c_{ij}가 $c'_{ij}=c_{ij}-\theta$로 감소되는 경우를 고려해 보자. 이 때에는 호(i,j)의 비용이 감소됨에 따라 마디 i에서 마디 j로 우회해서 보내던 유통량을 줄이고 대신 호(i,j)를 통해서 더 많은 유통량을 보내게 된다. 여기서 마디 i에서 마디 j로 우회해서 보내던 유통량을 줄인다는 의미는 마디j에서 마디 i로 유통량을 보낸다는 의미와 같다. 따라서 이 경우에는 마디 j에서 마디 i로 가는 경로와 마디 j에서 호(i,j)를 통해서 마디 i로 가는 두 경우의 비용을 비교하여 보다 적은 비용이 소요되는 경로로 유통이 발생되게 된다. 이 경우에 θ의 하한값 θ_l은 마디 j에서 마디 i까지 가는 유방향 경로 $\overline{P(j,i)}$의 길이에 c_{ij}를 더한 값이 된다. 만일 마디 j에서 마디 i까지 가는 유방향 경로가 다수개 존재하면 θ_l은 이들 경로 중 길이가 가장 작은 경로의 길이에 c_{ij}를 더한 값이 된다. 이 때 다수개의 유방향 경로 중에서 k번째 경로길이를 $\overline{P_k(j, i)}$라 하면, 마디 j에서 마디 i까지의 최단경로의 길이 $\ell=\min\{\overline{P_k(j, i)}\}$가 된다.

따라서 변환 네트워크 $G'=(N,A')$에 마디 j를 시발점으로 하고 마디 i를 종착점으로 하는 최단경로가 존재할 때 그 길이를 ℓ이라고 하면 $\theta_l=\ell+c_{ij}$가 되고, 만일 그러한 최단경로가 존재하지 않으면 [보조정리 2]에 의해 θ_l은 ∞가 된다.

$l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호의 수가 n−1개와 같거나 클 경우에는 더욱 쉽게 구할 수 있다. 먼저 네트워크 $G=(N,A)$에 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호의 수가 n−1개인 정점 최적해 X^*가 주어진 경우에는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 n−1개의 호(i,j)가 네트워크 $G=(N,A)$의 최적 기저가 되기 때문에 이 때에는 최적기저에 해당되는 쌍대변수의 값 W를 구할 수 있다. 이 쌍대변수값 W는 최적기저 $\mathbb{T}$의 나무경로의 길이에 관한 정보를 제공해 주기 때문에 W를 이용하면 보다 쉽게 환(cycle)의 값을 구할 수 있다.

[정리 4] 네트워크 $G=(N,A)$에 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 최적기저 $\mathbb{T}$와 쌍대변수의 값 W가 주어졌을 때 마디 r에서 마디 s까지의 나무경로 $P(r,s)$의 길이는 w_r-w_s가 된다.

(증명) 마디 r에서 마디 s까지 가는 나무경로 $P(r,s)$는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)로 구성되기 때문에 $P(r,s)$를 구성하는 호(i,j)에 대한 $\overline{c_{bd}}=c_{bd}-w_b+w_d=0$이 성립한다.

따라서 마디 r에서 마디 s까지의 경로를 $P(r,s)$라 하면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in P(r,s)}\overline{c_{ij}}&=\sum_{(i,j)\in P(r,s)}(c_{ij}-w_i+w_j)\\&=\sum_{(i,j)\in P(r,s)}c_{ij}-\sum_{(i,j)\in P(r,s)}(w_i-w_j)\\&=\sum_{(i,j)\in P(r,s)}c_{ij}-w_r+w_s \qquad =0\end{aligned}$$

여기서 $\sum_{(i,j)\in P(r,s)}c_{ij}$가 경로 $P(r,s)$의 길이에 해당되기 때문에 나무경로 $P(r,s)$의 길이는 w_r-w_s와 같다.

일반적으로 최소비용문제의 네트워크 $G=(N,A)$에 n−1개의 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 최적기저 $\mathbb{T}$가 주어지면 마디 $i(j)$에서 마디 $j(i)$까지 가는 최단경로의 길이는 마디 $i(j)$에서 마디 $j(i)$까지의 나무경로의 길이와 같다. 그러므로 이 경우에는 최단경로의 길이를 계산할 필요없이 이에 해당되는 쌍대변수값을 이용하는 나무경로의 길이를 구하여 보다 쉽게 감도분석을 할 수 있다. 이 결과로 n−1개의 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 최적기저 $\mathbb{T}$가 주어진 경우에 제 2 종과 제 1 종의 감도분석 결과는 같다.

네트워크 $G=(N,A)$에 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호의 수가 n−1개 보다 많은 비정점 최적해 X^*가 주어진 경우에는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호들을 연결하면 언제나 환(*cycle*)이 형성된다. 이렇게 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 환(*cycle*)을 환 e라고 하자. 이 때 환 e에 속한 호(i,j)의 감도분석 결과는 다음 [정리 5]로 나타낼 수 있다.

[정리 5] 네트워크 $G=(N,A)$에 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호의 수가 n−1개 보다 많은 비정점 최적해 X^*가 주어진 경우에 환 e에 속하는 호(i,j)의 제 2 종 감도분석 결과는 $\theta=0$이다.

(증명) 비정점 최적해 X^*가 주어진 경우에 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호들을 연결하면 언제나 환이 형성된다. 이 환(*cycle*)을 환 e라고 하면 환 e에 속하는 모든 호의 c_{ij}의 합 즉, 환의 값은 0이 된다. 만일 환의 값이 0이 아니면 환의 방향이나 환의 반대 방향으로 유통량을 흘려 주면 목적함수값이 줄어들 수 있다는 말이 되어 비정점 최적해가 주어진 것에 모순되기 때문에 $\sum_{(l,k)\in e}c_{lk}=0$이 성립한다.

이 때 호(i,j)의 목적함수계수 c_{ij}가 $c'_{ij}=c_{ij}+\theta$로 바뀌면 환의 값은

$$(c_{ij}+\theta)+\sum_{(l,k)\in e\setminus(i,j)}c_{lk}=\sum_{(l,k)\in e}c_{lk}+\theta=\theta$$

가 된다. 여기서 만일 $\theta>0$ 이거나 $\theta<0$이면 환의 반대 방향이나 환의 방향으로 유통량을 보내 주게 되어 최적해의 구조가 바뀌게 된다. 따라서 최적해의 구조를 유지하기 위해서는 $\theta=0$이 되어야 한다.

3. 우변상수에 대한 감도분석

우변상수 b_i에 대한 제 2 종 감도분석은 최적해의 구조($\mathbb{B},\mathbb{L},\mathbb{U}$)를 유지하는 우변상수 θ의 범위를 구하는 것이다.

이러한 우변상수의 변화는 최적해의 구조($\mathbb{B},\mathbb{L},\mathbb{U}$)를 유지해야 하기 때문에 공급지 s에서 수요지 t까지 가는 경로중에 하나라도 $x_{ij}=l_{ij}$이거나 $x_{ij}=u_{ij}$인 호가 포함되어 있으면 이 경로를 통해서는 아무 유통량도 보낼 수 없다. 그러나 공급지 s에서 수요지 t까지 가는 경로가 모두 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되어 있으면 이 경로를 통해서는 최적해의 구조($\mathbb{B},\mathbb{L},\mathbb{U}$)를 유지하는 유통량의 변화량을 구할 수 있다.

지금 공급지 s에서 수요지 t까지 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)로 구성되는 경로를 $P(s,t)$라고 하자. 이 때 우변상수에 대한 제 2 종 감도분석은 다음 정리로 나타낼 수 있다.

[정리 6] 최적해 X^*가 주어진 네트워크 $G=(N, A)$에 공급지 s에서 수요지 t까지 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 존재하면 우변상수에 대한 제 2 종 감도분석 결과는 $\theta_l<\theta<\theta_u$이 되고, 경로 $P(s,t)$가 존재하지 않으면 $\theta=0$이 된다.

$$\text{단, } \theta_l=\mathrm{Max}\Big[\max_{(i,j)\in\text{순방향}}\{l_{ij}-x_{ij}\},\ \max_{(i,j)\in\text{역순방향}}\{x_{ij}-u_{ij}\}\ \Big|\ \forall(i,j)\in P(s,t)\Big]$$

$$\theta_u=\mathrm{Min}\Big[\min_{(i,j)\in\text{순방향}}\{u_{ij}-x_{ij}\},\ \min_{(i,j)\in\text{역방향}}\{x_{ij}-l_{ij}\}\ \Big|\ \forall(i,j)\in P(s,t)\Big]$$

(증명) 우변상수에 대한 제 2 종 감도분석은 공급지 s에서 수요지 t까지 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$를 통해서 보낼 수 있는 최대 증가량(또는 감소량)을 구하는 것이다. 따라서 경로 $P(s,t)$가 존재할 때 순방향호(i,j)에 대하여 $\theta_1=\mathrm{Min}\ \{u_{ij}-x_{ij}\}$, 역방향호$(i,j)$에 대해서 $\theta_2=\mathrm{Min}\{x_{ij}-l_{ij}\}$ 만큼을 보낼 수 있다. 이 때 가능성을 유지하는 범위내에서 경로 $P(s,t)$를 통해서 보낼 수 있는 최대 증가량 $\theta_u=\mathrm{Min}\{\theta_1, \theta_2\}$가 된다.

우변상수의 최대감소량 θ_l은 이러한 경로 $P(s,t)$를 통해서 음의 유통량을 보내는 것으로 생각하면 된다. 따라서 순방향호(i,j)에 대하여 $\theta_1=\mathrm{Max}\{l_{ij}-x_{ij}\}$, 역방향호$(i,j)$에 대하여 $\theta_2=\mathrm{Max}\{x_{ij}-l_{ij}\}$ 만큼을 보낼 수 있다. 따라서 가능성을 유지하는 범위내에서 경로 $P(s,t)$를 통해서 보낼 수 있는 최대 감소량 $\theta_l=\mathrm{Max}\{\theta_1, \theta_2\}$가 된다.

그러나 공급지 s에서 수요지 t까지 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 존재하지 않으면 어떠한 양의 변화에도 최적해의 구조($\mathbb{B},\mathbb{L},\mathbb{U}$)가 변하기 때문에 최적해의 구조($\mathbb{B},\mathbb{L},\mathbb{U}$)를 유지하는 제 2 종 감도분석의 범위는 $\theta=0$이 된다.

그런데 공급지 s에서 수요지 t까지 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$는 주어진 최적해가 정점 최적해인지 비정점 최적해인지에 따라 그 연결 상태가 다르게 나타난다.

만일 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호의 수가 $n-1$개인 정점 최적해가 주어졌다면 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호들을 연결하면 언제나 spanning tree를 형성하기 때문에, 공급지 s에서 수요지 t까지 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 유일하게 하나 존재하게 된다. 따라서 이 경우에 우변상수에 대한 제 2 종 감도분석 결과는 제 1 종 감도분석 결과와 같게 된다.

그러나 비정점 최적해가 주어진 경우에는 $l_{ij}<$

$x_{ij}<u_{ij}$인 호의 수가 n−1개 이상 존재하여 이들을 연결하면 언제나 환의 형태가 나타나기 때문에, 이 때에는 공급지 s에서 수요지 t까지 가는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 경로 $P(s,t)$가 다수개 존재하게 된다. 제 2 종 감도분석은 이들 경로를 통하여 유통량을 보낼 수 있는 최대 증가량이나 최대 감소량을 구하는 것이기 때문에, 이 경우에는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호를 연결한 문제에서 최대 유통량 문제를 푸는 것과 같게 된다. 즉, 비정점 최적해 X^*가 주어진 경우에 우변상수 b_i에 대한 제 2 종 감도분석 결과는 $\theta_l<\theta<\theta_u$이 된다.

단, $\theta_u=\text{Max } \theta$
$(\theta_l=\text{Min } \theta)$

$$\text{s.t} \sum_j x^*_{ij}-\sum_j x^*_{ji}=\theta,\ i: \text{공급지}$$
$$=-\theta,\ i: \text{수요지}$$
$$=0,\ \text{기타}$$
$$l_{ij}<x^*_{ij}<u_{ij},\ (i,j)\in\mathbb{B}$$

4. 용량 상하한에 대한 감도분석

용량 상하한에 대한 제 2 종 감도분석은 최적해의 구조($\mathbb{B},\mathbb{L},\mathbb{U}$)를 유지하는 용량 상하한의 범위를 구하는 것이다.

먼저 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)에 대한 용량 상하한의 변화 범위를 구해 보자. $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)에 대한 용량하한이 l'_{ij}로 변할 경우에는 $l'_{ij}=l_{ij}+\theta<x_{ij}$가 성립되면 된다. 따라서 $\theta<x_{ij}-l_{ij}$가 된다. $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)에 해당하는 용량상한이 u'_{ij}로 변할 경우에는 $x_{ij}<u'_{ij}=u_{ij}+\theta$가 성립되면 된다. 따라서 $\theta<x_{ij}-u_{ij}$가 된다. $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호 (i,j)에 해당하는 용량상한이 u'_{ij}로 변할 경우에는 $x_{ij}<u'_{ij}=u_{ij}+\theta$가 성립되면 된다. 따라서 $\theta>x_{ij}-u_{ij}$가 된다.

다음으로 $x_{ij}=l_{ij}$인 호(i,j)에 대한 용량 상하한의 변화 범위를 구해보자. 먼저 $x_{ij}=l_{ij}$인 호(i,j)에 해당하는 용량 상한이 u'_{ij}로 변할 경우에는 앞의 경우와 같이 $x_{ij}<u'_{ij}=u_{ij}+\theta$가 성립되면 되므로 $\theta>x_{ij}-u_{ij}$가 된다. 그러나 용량하한 l_{ij}가 l'_{ij}로 변할 경우에는 호(i,j)의 유통량을 계속 하한값으로 유지해야 하기 때문에 현재 흐르고 있는 유통량 x_{ij}도 l'_{ij}로 변하게 된다. x_{ij}가 l'_{ij}로 변하게 되면 이전에 만족되었던 유량보존법칙이 만족되지 않게 된다. 따라서 이 때에는 유량보존법칙이 성립될 수 있도록 유통량을 수정해 주어야 한다. 그런데 상한이나 하한값을 갖는 호는 계속 상한이나 하한값을 갖는 호로 유지해야 하기 때문에 반드시 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호를 통해서 유통량을 수정해야 한다.

이를 위해 호(i,j)의 시작점을 i, 끝점을 j라고 하자. 그리고 마디 j에서 시작하여 마디 i까지 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 경로를 $P(j,i)$라 하고, 마디 i에서 호(j,i)와 $P(i,j)$로 구성된 순환로를 $e(i)$라고 하자. 그러면 순환로 $e(i)=\{i,\ (i,j),\ P(j,i)\}$가 된다.

따라서 $x_{ij}=l_{ij}$인 호(i,j)의 용량하한이 $l'_{ij}=l_{ij}+\theta$로 변할 때 경로 $P(j,i)$에 속한 호(p,q)의 유통량을 다음과 같이 바꾸어 주게 되면 순환로 $e(i)$에서 유량보존법칙이 만족되게 된다.

만일 호$(p,q)\in P(j,i)$이면서 순방향호이면
$x'_{pq}=x_{pq}+\theta$
만일 호$(p,q)\in P(j,i)$이면서 역방향호이면
$x'_{pq}=x_{pq}-\theta$

이 때 $P(j,i)$에 속한 호(p,q)의 유통량은 각호에 주어진 용량 상하한 조건을 만족해야 하므로 $l_{pq}<x'_{pq}<u_{pq}$를 만족하는 범위내에서 변화될 수 있다.

[정리 7] 최소비용문제에 대한 최적해 X^*가 주어졌을 때 $x_{ij}=l_{ij}$인 호에 해당하는 용량 하한의 제 2 종 감도분석 결과는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 순환로 $e(i)$가 존재하면 $\theta_l<\theta<\theta_u$가 되고, 순환로 $e(i)$가 존재하지 않으면 $\theta=0$이 된다.

단, $\theta_l=\text{Max}[\max_{(p,q)\in \text{순방향}}\{l_{pq}-x_{pq}\}, \max_{(p,q)\in \text{역방향}}\{x_{pq}-u_{pq}\}, u_{ij} \mid \forall (p,q)\in P(i,j)$

$\theta_u=\text{Min}[\min_{(p,q)\in \text{순방향}}\{u_{pq}-x_{pq}\}, \min_{(p,q)\in \text{역방향}}\{x_{pq}-l_{pq}\}, u_{ij} \mid \forall (p,q)\in P(i,j)$

(증명) [정리 6]의 증명 참조

그런데 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 순환로 $e(i)$는 주어진 최적해가 정점 최적해인지 비정점 최적해인지에 따라 다르게 나타난다.

$l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호의 수가 n−1개인 정점 최적해가 주어진 경우에는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호들이 언제나 spanning tree를 형성하기 때문에 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호로 구성되는 순환로 $e(i)$가 유일하게 하나 존재하게 된다. 따라서 이 경우에 제 2 종 감도분석 결과는 제 1 종 감도분석 결과와 같게 된다.

그러나 비정점 최적해가 주어지는 경우에는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)를 연결하면 언제나 환을 포함하는 그래프 형태를 나타내기 때문에, 이 때에는 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)로 구성되는 순환로 $e(i)$가 다수개 존재하게 된다. 용량 상하한에 대한 제 2 종 감도분석은 이들 순환로를 통하여 유통량을 보낼 수 있는 최대 증가량이나 최대 감소량을 구하는 것이기 때문에 $l_{ij}<x_{ij}<u_{ij}$인 호(i,j)를 연결한 문제에서 최대 유통량 문제를 푸는 것과 같게 된다. 즉, 비정점 최적해 X^*가 주어졌을 때 $x_{ij}=l_{ij}$인 호(i,j)에 해당하는 용량 하한의 제 2 종 감도분석 결과는 $\theta_l<\theta<\theta_u$가 된다.

단, $\theta_u=\text{Max }\theta$

$(\theta_l=\text{Min }\theta)$

$$\text{s.t } \sum_k x^*_{jk}-\sum_k x^*_{kj}=\theta,\ j : \text{공급지}$$
$$=-\theta,\ j : \text{수요지}$$
$$=0,\ \text{기타}$$
$$l_{ij}<x^*_{ij}<u_{ij},\ (i,j)\in \mathbb{B}$$

5. 결론

본 연구에서는 최소비용문제의 감도분석을 제 1 종과 제 2 종 감도분석으로 구분하였다.

먼저 목적함수에 대한 제 2 종 감도분석은 주어진 네트워크를 변환시켜 여기에서 최단경로의 길이를 구함으로써 간단히 감도분석을 할 수 있는 방법을 제시하였다. 또한 최적기저가 주어지는 경우에는 제 2 종과 제 1 종의 결과가 같다는 것도 보였다.

우변상수나 용량 상하한에 대해서는 주어진 최적해가 나무형 최적해인지 비나무형 최적해인지에 따라 중간값의 유통량을 갖는 호만으로 구성되는 네트워크 문제에서 최대 유통량문제를 구하는 것이 우변상수나 용량 상하한의 감도분석이 되는 것을 보였다.

참고문헌

[1] 박순달, 「OR(경영과학)」, 민영사, 1991, pp 232-236

[2] 양병학, "선형계획법에서 비정점 최적해의 민감도 분석에 관한 연구", 서울대학교 공학박사 학위논문, 1990. 8

[3] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin, *Network Flows,*

Prentice-Hall. Inc. 1993

[4] W. H. Cunningham, "Theoretical Properties of the Network Simplex Method," *Mathematics of Oper. Res.*, Vol.4, No 2 (1979), pp. 196-208

[5] Tomas Gal, *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics*, McGraw-Hill, 1979

[6] Dan Gusfield, "A Note on Arc Tolerances in Sparse Shortest Path and Network Flow Problems," *Networks*, Vol. 13(1983), pp. 191-196

[7] In-soo Lee, "Shortest Path Problems : A Parametric Study," *J. of the Korean OR/MS Society*, Vol. 16, No. 2(1991) pp. 103-117

[8] Katta G. Murty, *Network Programming*, Prentice-Hall, Inc., 1992

[9] G. L. Nemhauser and Kan, *Handbooks in Operations Research and Management Sci*, Vol. 1, North-Holland, 1989

[10] N. Ravi and R. E. Wendell, "The Tolerance Approach to Sensitivity Analysis in Network Linear Programming," *Networks*, Vol. 18(1988), pp. 159-171

[11] D. R. Shier and Christoph Witzgall, "Arc Tolerances in Shortest Path and Network Flow Problems," *Networks*, Vol. 10(1980), pp. 227-291

[12] Robert Endre Tarjan, "Sensitivity Analysis of Minimum Spanning Trees and Shortest Path Trees," *Information Processing Letters*, Vol. 14, No. 1(1982), pp. 30-33

[13] Richard E. Wendell, "The Tolerance Approach to Sensitivity Analysis in Linear Programming," *Management Sci*, Vol. 31, No. 5(1985), pp. 564-578