

<論 文>

단순급수함수를 이용한 임의 형상판의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Arbitrary Shape Plates with Simplified Series Function

정 대 근*

Dae-Gun Jeong

<1995년 4월 14일 접수 ; 1995년 7월 24일 심사완료>

Key Words : Vibration(진동), Simple Series Function(단순급수함수), Natural Frequency(고유진동수), Arbitrary Shapes(임의형상), Reyleigh-Ritz Method

ABSTRACT

A very simple and computationally efficient numerical method is developed for the free vibration of arbitrary shape plates. A set of two-dimensional simple series functions is used as an admissible displacement functions in the Rayleigh-Ritz method to obtain the natural frequencies for the arbitrary shape plates. From the prescribed starting function satisfying only the geometric boundary conditions, the higher terms in the series function are constructed with adding order of polynomial. Natural frequencies are obtained for the arbitrary shape plates. with combinational boundary conditions. The obtained numerical results are presented, some cases are verified with other numerical methods in the literature.

기 호 설 명

a, b	: 판 치수	T_{max}	: 최대 운동 에너지
C_i	: 고유 백타 상수	U_{max}	: 최대 변형 에너지
D	: 굽힘 강성, $Eh^3/12(1-\nu^2)$.	$W(\zeta, \eta)$: 변위 함수
D_{ij}	: 직교 이방성 판의 굽힘 및 비틀림 강성	X, Y	: 판의 직교 좌표
E_{ij}	: 횡탄성 계수	α	: 형상비, b/a
$fm(\zeta, \eta)$: 차수 함수	ζ, η	: 판의 단위화 좌표, $X/a, Y/a$
G	: 종탄성 계수	λ_0	: 고유치
h	: 판 두께	λ	: 무차원 진동 계수, $(\lambda_0)^{1/2}/2\pi$
[K]	: 강성 행렬	ν_{12}	: 푸아송비
m	: 이중 무한 변위 급수의 전개 항수	ρ	: 재료 밀도
		$\Phi(\zeta, \eta)$: 단순 급수 판함수
		$\phi(\zeta, \eta)$: 모서리 함수 또는 경계선 함수
		ω	: 각 진동수, (radian/sec).

*정회원, 국방과학연구소

1. 서 론

여러 연구가들에 의해 다양한 형상판에 대하여 다양한 해석방법으로 판의 진동해석에 대해 많은 연구가 수행되고 있다. 뿐만 아니라 최근 산업현장에서 다양한 형상의 판이 중요한 구조요소로 폭넓게 사용되고 있으며, 이에 따라 동적 및 진동거동특성에 관심이 증가되고 있다. 따라서 유한요소법, Galerkin 법, Rayleigh-Ritz법, 중첩법(Building block method), 그리드법(Grid work method) 및 기타 해석적 기법 등의 여러가지 방법으로 수행되고 있으며, 주어진 기하학적 형상과 경계조건에 따라 변형형상을 예측하여 직교다항식, Beam Function, β -Spline Function, 삼각함수, Exponential함수 등의 변위함수를 사용하고 있다. 따라서 주어진 문제의 변위형상 및 기하학적 형상에 따라 적합한 변위함수를 선택하게 되며, 이로 인하여 복잡한 실제문제에 적용하는데 규칙적 일관성이 없어진다. 그러므로 유한요소법의 절단(mesh) 정도에 따른 부정확함과 계산시간의 비효율성에도 불구하고 변위형상과 기하학적 형상에 무관하게 미분연속성을 만족하는 임의의 변위함수를 일관성있게 사용할 수 있으므로, 다양한 형상판에 대한 진동문제 해석에 가장 빈번히 사용되고 있음을 부인할 수 없는 실정이다. 1983년 이후 Singh and Chakraverty⁽²⁾, Rajalingham, Bhat and Xistric⁽³⁾, Kim and Dickinson⁽⁴⁾, Liew and Lam⁽⁵⁻⁸⁾ 등에 의해 Gram-schmidt의 직교성과 기하학적 경계조건을 만족하는 여러가지 형태의 변위함수를 사용하고, Rayleigh-Ritz법으로 여러가지 형상의 판에 대한 진동연구가 수행되어 졌다. 이영신, 정대근과 나문수⁽¹⁾는 단순급수함수를 이용하여 직교이방성 복합재료 삼각판의 자유진동을 수행하였다. Singh and Chakraverty⁽²⁾는 환형 및 타원의 변위함수를 XY 함수와 Exponential함수의 곱으로, Rajalingham, Bhat and Xistric⁽³⁾은 타원의 변위함수를 극좌표와 삼각함수의 곱으로 표시했다. 부채꼴판의 변위함수를 Kim and Dickinson⁽⁴⁾은 XY 함수와 삼각함수의 곱으로, Liew and Lam⁽⁵⁾은 XY 함수로 표시했다. 또한 Liew and Lam은 삼각형, 사각형, 육각형⁽⁶⁾, 팔각형⁽⁶⁾, 평행사변형⁽⁷⁾ 및 사다리꼴 형상⁽⁸⁾의 변위함수를 XY 함수로 표시했으나, 환형판⁽⁹⁾의 변위함수는 XY 함수와 삼각함수의 곱으로 표시했다. 그러나 대부분은 Gram-schmidt의 직교성을 만족하는 Orthogonal Polynomial을 변위함수로 사용함으로

써, 고차항이 될수록 변위함수는 복잡해진다. 따라서 본 논문에서는 Gram-schmidt의 직교성을 요구하지 않은 단순한 형태의 XY 함수로 표시되는 변위함수와 Rayleigh-Ritz법을 이용하고, 임의의 형상판에 대하여 분할영역을 적분하여 Liew & Lam, Rajalingham & Bhat, Kim & Dickinson 등이 수행한 여러가지 변위함수 중 가장 단순한 형태인 XY 함수만으로도 다양한 임의의 형상판의 진동문제에 적용할 수 있음을 보이고, 해석결과를 유용한 참고문헌과 비교함으로써 본 연구방법의 유용성을 입증하고자 한다.

2. 수 식 화

2.1 해석 모델

본 연구에서 해석하고자 하는 임의형상 모델 중 대표적인 사다리꼴 형상판의 기하학적 형상은 Fig. 1과 같다. 직교 좌표축은 각각 X와 Y, 변위길이는 각각 a, b로 하고, a에 대하여 무차원화 시켜 $\zeta = X/a$, $\eta = Y/a$ 로 하며, 기하학적 형상비는 $a = b/a$ 이다. 여기서 단층의 등방성 재료를 사용하며, 판 두께의 영향은 고려하지 않는다.

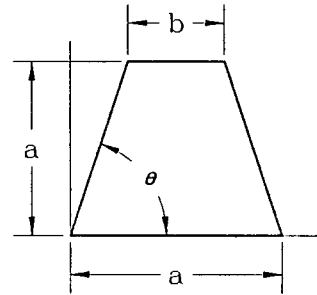


Fig. 1 Geometry and coordinate system

2.2 단순 급수함수 구성

변위함수 $W(\zeta, \eta)$ 를 2차원 단순급수함수 $\Phi(\zeta, \eta)$ 로써 표시하면 다음과 같다.

$$W(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\zeta, \eta) \quad (1)$$

여기서 $W(\zeta, \eta)$ 는 ζ, η 좌표에 대한 변위량, $\Phi(\zeta, \eta)$ 는 단순급수함수, m 은 전개급수(series)의 항수이며, C_i 는 상수항으로 고유벡타(eigen vector)이다. 임의의 변의 기하학적 형상을 표시하는 함수를 Ω_i 로 표시할 때 임의의 형상에서 각 변을 따라 최소한 기하적 경계조건을 만족시킬 수 있는 변함수(edge function) $\phi_i(\zeta, \eta)$ 를 가장 간단한 형태로 표

시하면 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} \phi_i(\zeta, \eta) = 1 & : \text{자유단} \\ \phi_i(\zeta, \eta) = \Omega_i & : \text{단순지지단} \\ \phi_i(\zeta, \eta) = \Omega_i^2 & : \text{고정단} \end{aligned} \quad (2)$$

각 변에서 경계조건을 만족하는 변함수 $\phi_i(\zeta, \eta)$ 을 곱하여 임의형상판 전체의 경계조건을 만족하는 초기판함수(starting plate function) $\Phi_i(\zeta, \eta)$ 를 다음식과 같이 구성하여 판영역 전체에 대해 경계조건을 만족하게 한다.

$$\Phi_1(\zeta, \eta) = \phi_1(\zeta, \eta) \times \phi_2(\zeta, \eta) \times \dots \times \phi_n(\zeta, \eta) \quad (3)$$

식 (2)를 적절히 구성하면 함수로 표시 가능한 임의의 형상과 경계조건의 조합에 적용 가능하다. 무한급수(series) $m \geq 2$ 인 고차항을 다음식과 같이 구성한다.

$$\Phi_m(\zeta, \eta) = fm(\zeta, \eta) \Phi_1(\zeta, \eta) \quad (4)$$

차수함수(generating function) $fm(\zeta, \eta)$ 은 고차항을 만들기 위해 부가되며, Pascal's triangular rule과 유사하게 얻어진다.

2.3 고유치 문제 해석

변위함수 식 (1)을 널리 알려진 변형 에너지식과 운동 에너지식에 대입하여, 변위량 $W(\zeta, \eta)$ 대신 단순급수함수 $\Phi(\zeta, \eta)$ 로써 표시하면 각각 식 (5)와 (6)으로 표시할 수 있다. 소진폭 진동에서 최대변형 에너지 U_{max} 은 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} U_{max} = & \frac{1}{2} a^2 \left\{ \iint_R \frac{D_{11}}{a^4} \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta^2} \right]^2 \right. \\ & + \frac{2D_{12}}{a^4} \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \\ & + \frac{D_{22}}{a^4} \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \eta^2} \right]^2 \\ & \left. + \frac{4D_{66}}{a_4} \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta \partial \eta} \right]^2 \right\} d\zeta d\eta \quad (5) \end{aligned}$$

운동에너지 T_{max} 은 다음식과 같다.

$$T_{max} = \frac{1}{2} \rho h a^2 \omega^2 \iint_R \left[\sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\zeta, \eta) \right]^2 d\zeta d\eta \quad (6)$$

여기서 D_{ij} 굽힘강성, ρ 는 재료밀도, h 는 재료두께, ω 는 각진동수(angular frequency)이다. 미지계수 C_i 에 대하여 Rayleigh-quotient로써 최소화 시키

고 C_i 에 대하여 정리하면 고유치지배방정식을 얻는다.

$$[K_{ij} - \lambda_0 M_{ij}] C_i = 0 \quad (7)$$

K_{ij} 는 강성행렬로써 식 (8)과 같이 표시된다.

$$K_{ij} = D'_{11} P_{ij} + D'_{22} Q_{ij} + 2D'_{12} (R_{ij} + S_{ij}) + 4D'_{66} T_{ij} \quad (8)$$

여기서 M_{ij} , P_{ij} , Q_{ij} , R_{ij} , S_{ij} , T_{ij} 는 다음 식들과 같다.

$$M_{ij} = \iint_R \Phi_i(\zeta, \eta) \Phi_j(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (9)$$

$$P_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\zeta, \eta)}{\partial \zeta^2} d\zeta d\eta \quad (10)$$

$$Q_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\zeta, \eta)}{\partial \eta^2} d\zeta d\eta \quad (11)$$

$$R_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\zeta, \eta)}{\partial \zeta^2} d\zeta d\eta \quad (12)$$

$$S_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\zeta, \eta)}{\partial \eta^2} d\zeta d\eta \quad (13)$$

$$T_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_j(\zeta, \eta)}{\partial \zeta \partial \eta} d\zeta d\eta \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \rho h \omega^2 a^4 / \sqrt{D_{11} D_{22}} \\ \lambda &= (\lambda_0)^{1/2} / 2\pi = (\omega a^2 / 2\pi) \sqrt{\rho h / \sqrt{D_{11} D_{22}}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} D'_{11} &= D_{11} / \sqrt{D_{11} D_{22}}, \quad D'_{12} = D_{12} / \sqrt{D_{11} D_{22}} \\ D'_{22} &= D_{22} / \sqrt{D_{11} D_{22}}, \quad D'_{66} = D_{66} / \sqrt{D_{11} D_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

λ_0 는 고유치(eigen value)이며, 등방성 재료인 경우에는 무차원진동계수 $\lambda = (\lambda_0)^{1/2} = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}$ 형태로 고유진동수(natural frequency)를 나타내며, 종횡비 $\alpha = b/a$ 이다. C_i 는 고유벡터(eigen vector)로써 식 (1)에 대입하여 변위량 $W(\zeta, \eta)$ 를 결정하게 되며, 식 (8)에서 굽힘강성 D'_{11} , D'_{22} , D'_{12} , D'_{66} 를 섬유적층각도로써 적절히 표현하면 복합재료의 섬유 방향에 대한 영향과 적층문제에 대해서도 적용 가능할 수 있다.

2.4 영역분할 적분법

Rayleigh-Ritz법에 기초를 둔 고유치문제는 단순한 형상의 진동문제를 폭넓게 해석할 수 있다. 그러나 복잡한 형상인 경우에는 식 (9)~(14)의 영역적분을 수행하는 방법이 단순하지 않으며 형상적분에 따른 오차가 증가될 수 있다. 또한 임의의 형상에 공통적으로 적용하기 위해서는 규칙적 방법이 필요하다. 본 논문에서는 임의의 형상에 적용하기 위해 영역분할 적분법을 사용하였다.

먼저 적분하기 용이한 사각요소로 분할하여 각각

의 분할요소에 대하여 적분하고, 이 분할요소를 식 (17)과 같이 합하는 방법으로 임의의 형상에 대하여 적분을 수행했다.

$$\iint_{R_{sum}} \Phi_i(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \sum_{j=1}^n \iint_{R_j} \Phi_j(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (17)$$

여기서 판전체면적 $R_{sum} = \sum_{j=1}^n R_j$

3. 수치예 및 고찰

3.1 수치예

해석적 방법으로 엄밀해를 구할 수 없는 복잡한 임의형상에 대하여 유한요소법과 같이 미소요소로 분할하지 않고도 진동문제를 근사적을 해석할 수 있음을 보이고자 한다. 본 연구방법의 유용성과 수치계산의 정확도를 확인하기 위해, 다양한 형상비와 경계조건을 가진 평행사변형, 사다리꼴, 정육각형, 정팔각형, 다양한 부채꼴, 타원 및 환형형상에 대하여 고유진동수를 계산했다. 재료물성치는 $E_1/E_2=1$, $G/E_2=0.3846$, $\nu_{12}=0.3$ 인 일반적인 등방성 재질을 사용했으며, 경계조건은 기하학적 경계조건을 모서리에 따라 표시할 수 있는 모든 경계조건에 사용할 수 있으나, 본 연구에서는 자유단(free support) F , 단순지지단(simply support) S , 고정단(clamped) C 이 적절히 조합된 다양한 경계조건에 대하여 고찰하고자 한다.

3.2 수렴성 검토

에너지법(energy method)은 엄밀해에 대하여 상계해(upper bound solution)로 접근하므로, 수치계산의 정확도는 단순급수 $\Phi_m(\zeta, \eta)$ 의 전개항수 m 을 증가시켜 적절한 수렴성을 얻음으로써 확인될 수 있다. 모든 변이 단순지지단인 사다리꼴판은 Table 1에 제시했다. 모드 1과 2는 전개항수 m 이 12일 때, 모드 3과 4는 m 이 20일 때 각각 1% 이내로 수렴하고 있으며 Liew⁽⁶⁾의 결과와 유사한 수렴정도로써 잘 일치하고 있다. 모든 변이 자유단인 평행사변형판은 Table 2에 제시했다. 모드 1과 2는 전개항수 m 이 20일 때, 모드 3과 4는 m 이 30일 때 각각 1% 이내로 수렴하고 있다. 내경이 고정단이며 외경과 반경이 자유단인 90° 환형부채꼴판은 Table 3에 제시했다. 모드 1은 전개항수 m 이 25에서, 모드 2은 전개항수 m 이 30에서, 모드 3과 4는 전개항수 m 이 35에서 2% 이내로 수렴하고 있으며, Liew⁽⁵⁾의 결과와

유사한 수렴정도로써 양호함을 보인다. 그러나 판의 형상이 복잡할수록, 모드의 차수가 증가할수록 변형

Table 1 Convergence pattern of the nondimensional frequency parameter $\lambda=(\omega a^2/2\pi)(\rho h/D)^{1/2}$ for the trapizodal plates with of all simply edges($\alpha=1/5$)

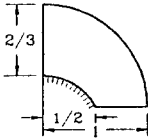
Mode	Convergency number m						
	4	8	12	16	20	24	28
1	* 6.67	6.02	6.02	6.01	6.01	6.01	
	6.67	6.02	6.02	6.01	6.01	6.01	6.01
2	*20.01	13.03	12.83	12.73	12.71	12.69	
	20.02	13.03	12.83	12.82	12.74	12.71	12.70
3	*20.19	19.08	15.48	15.46	15.34	15.34	
	20.26	19.14	15.52	15.50	15.47	15.45	15.37
4	*37.64	35.77	22.63	22.53	21.82	21.73	
	37.80	35.94	22.51	22.63	21.98	21.91	21.82

* : Ref(8)-Liew

Table 2 Convergence pattern of the nondimensional frequency parameter $\lambda=(\omega a^2/\pi^2)(\rho h/D)^{1/2}$ for the skew plates with of the free edges($\theta=45^\circ$)

Mode	Convergency number m							
	15	20	25	30	35	40	45	50
1	2.061	2.060	2.060	2.052	2.051	2.048	2.048	2.048
2	2.219	2.061	2.061	2.061	2.061	2.053	2.049	2.048
3	4.008	3.492	3.475	3.475	3.475	3.439	3.439	3.438
4	5.252	4.905	4.904	4.796	4.796	4.762	4.762	4.742

Table 3 Convergence pattern of the nondimensional frequency parameter $\lambda=\omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$ for the quarter annular plates with combinational edges

Plate geometry	Mode	Convergency number m			
		25	30	35	40
	1	* 8.300	8.251	8.192	8.145
		8.297	8.226	8.157	8.135
	2	*13.581	13.280	12.795	12.757
		13.534	13.247	12.764	12.637
	3	*24.676	23.529	22.404	22.033
		24.638	23.441	22.336	21.926
	4	*44.494	42.854	41.432	40.852
		44.430	42.729	41.359	40.608

* : Ref(5)-Liew

형태(mode shape)가 복잡하므로 수렴하기 위해서는 XY 함수인 $\Phi_m(\zeta, \eta)$ 의 전개항수 m 이 증가된다.

3.3 해석결과 검토

(1) 평형사변형판

Table 4는 5종의 경계조건을 가진 평형사변형판의 고유진동 모드 1~4까지 제시하고, Liew⁽⁷⁾ 등의 결과와 비교했다. 0°는 정사각형을 의미하므로 영역분활적분법에 대한 오차가 포함되지 않고 변형형태가 단순하므로, 따라서 거의 편차가 없다. 15°와 30°는 영역분활적분법의 오차가 포함되어 있으나, 고유진동수 λ 는 1%, 45°는 3% 이내의 오차로써 잘 일치하고 있다.

(2) 사다리꼴판

Table 5는 3종의 경계조건을 가진 사다리꼴판의 고유진동 모드 1~4까지 제시하고, Liew⁽⁶⁾의 결과와 비교했다. Liew의 결과와 1% 이내로 일치하고 있으므로 영역분활법에 대한 오차가 미세하다.

(3) 다각형판

Table 6은 5종의 경계조건을 가진 육각형판과 4종의 경계조건을 가진 팔각형판의 고유진동 모드 1~6까지 제시하고, Liew⁽⁶⁾의 결과와 비교했다. Liew의 결과와 1% 이내로 일치하고 있으므로 영역분활법에 대한 오차가 미세하며, 따라서 거의 편차가 없다. Table 6의 수치결과로 볼 때 육각형 및 팔각형판의 진동해석에 유용하며 임의의 다각형판에 대해서도 유용할 것으로 추론된다.

(4) 부채꼴판

Table 7은 직선과 원형곡선의 일부분이 조합된 형상인 부채꼴판의 고유진동 모드 1~4까지 제시하고, Liew⁽⁵⁾와 Kim⁽⁴⁾의 결과와 비교했다. Liew의 결과와 1% 이내로 일치하고 있으므로 영역분활법에 대한

Table 4 Comparison of the nondimensional frequency parameter $\lambda=(\omega a^2/\pi^2)(\rho h/D)^{1/2}$ for the skew plates

B.C.	θ	Mode number			
		1	2	3	4
CFFF	0°	* 0.35	0.86	2.17	2.77
		! 0.35	0.86	2.17	2.77
		0.352	0.862	2.160	2.756
	15°	* 0.36	0.88	2.25	2.67
		! 0.34	0.87	2.18	2.64
		0.363	0.882	2.254	2.683

SSSS	30°	* 0.40	0.96	2.54	2.64
		! 0.39	0.94	2.58	2.59
		0.398	0.963	2.590	2.636
	45°	* 0.47	1.14	2.76	3.22
		! 0.43	1.12	2.69	3.05
		0.461	1.175	2.781	3.393
CCSS	0°	* 2.00	5.00	5.00	8.00
		2.000	5.000	5.000	8.000
	15°	\$ 2.11	4.88	5.69	8.01
		! 2.11	4.88	5.69	8.01
		2.114	4.884	5.685	8.010
	30°	\$ 2.52	5.34	7.27	8.43
		* 2.54	5.36	7.33	8.59
		2.541	5.333	7.305	8.507
	45°	\$ 3.53	6.72	10.18	10.87
		* 3.54	6.71	10.22	10.92
		3.652	6.718	10.254	11.138
	CCSS	0°	* 2.40	5.24	5.96
2.396			5.236	5.942	8.727
15°		* 2.54	5.35	6.48	8.74
		2.536	5.346	6.479	8.754
30°		* 3.11	5.94	8.32	9.48
		3.050	5.946	8.235	9.372
45°	* 4.53	7.89	11.78	12.81	
	4.383	7.627	11.517	12.503	
CCSS	0°	# 2.74	6.13	6.16	9.41
		* 2.74	6.13	6.16	9.41
		2.741	6.133	6.159	9.406
	15°	# 2.91	6.09	6.95	9.53
		* 2.91	6.08	6.92	9.50
		2.895	6.074	6.929	9.487
	30°	# 3.52	6.80	8.95	10.36
		* 3.57	6.82	9.00	10.32
		3.467	6.727	8.844	10.208
	45°	# 5.08	8.87	12.95	13.67
		* 5.12	8.94	12.98	13.76
		4.930	8.656	12.588	13.453
CCCC	0°	3.646	4.177	6.778	6.778
	15°	3.871	7.391	8.379	11.112
	30°	4.677	8.279	10.697	12.111
	45°	6.689	10.799	15.140	16.119

* : Ref(7)-Liew
 # : Ref(7)-Nair
 ! : Ref(7)-Experiment
 \$: Ref(7)-Durvasula

Table 5 Comparison of the nondimensional frequency parameter $\lambda = (\omega a^2 / 2\pi)(\rho h / D)^{1/2}$ for the trapezoidal plates

B.C.	b/a	Mode number			
		1	2	3	4
CFFF	1/5	* 0.82	3.53	3.88	9.20
		0.821	3.521	3.893	9.173
	2/5	* 0.70	2.66	3.67	7.31
		0.704	2.655	3.674	7.317
3/5	* 0.64	2.06	3.56	6.20	
	0.635	2.057	3.560	6.203	
4/5	* 0.59	1.65	3.48	5.46	
	0.588	1.647	3.476	5.466	
SSSS	1/5	* 6.01	12.69	15.34	21.73
		6.008	12.710	15.370	21.620
	2/5	* 4.90	10.24	13.17	17.72
		4.902	10.176	13.194	18.114
3/5	* 4.08	8.91	11.12	16.72	
	4.080	8.906	11.138	16.820	
4/5	* 3.52	8.24	9.29	14.20	
	3.521	8.247	9.308	14.159	
CCCC	1/5	*11.32	19.45	23.30	30.57
		11.32	19.89	23.31	30.47
	2/5	* 9.22	15.59	19.87	24.55
		9.22	15.60	19.92	24.52
3/5	* 7.55	13.34	16.70	22.42	
	7.56	13.35	16.72	22.43	
4/5	* 6.44	12.27	13.88	19.44	
	6.44	12.27	13.89	19.45	

* : Ref(8)-Liew

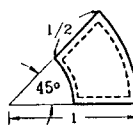
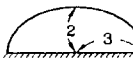

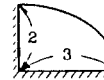


Table 6 Comparison of the nondimensional frequency parameter $\lambda = (\omega a^2 / \pi^2)(\rho h / D)^{1/2}$ for the hexagonal and octagonal plates

B.C.	Mode number					
	1	2	3	4	5	6
FFF	* 2.587	2.595	4.323	5.526	6.520	9.643
FFF	2.587	2.600	4.358	5.600	6.582	9.788
CFF	* 0.455	1.108	2.374	4.226	4.422	7.172
FFF	0.458	1.133	2.493	4.248	4.425	7.219

CSS	* 3.906	7.679	9.650	14.196	14.299	18.866
CSS	3.961	7.804	9.672	14.344	14.390	18.111
SSS	* 2.927	7.399	7.415	13.213	13.240	15.274
SSS	3.005	7.391	7.519	13.203	13.354	15.339
CCC	* 5.288	10.852	10.856	17.752	17.781	20.233
CCC	5.200	10.789	10.791	17.647	17.697	20.169
FFFF	* 2.048	2.048	3.438	3.703	4.739	4.739
FFFF	2.048	2.049	3.439	4.736	4.741	7.794
CFFF	* 0.334	2.848	1.838	3.413	3.452	5.204
FFFF	0.333	0.821	1.874	3.286	3.444	5.151
SSSS	* 2.248	5.861	5.861	10.309	10.309	11.910
SSSS	2.579	5.815	6.143	9.832	10.749	11.890
CCCC	* 4.031	8.432	8.432	13.756	13.756	15.626
CCCC	4.407	8.990	9.889	15.777	15.781	17.276

* : Ref(6)-Liew

Table 7 comparison of the nondimensional frequency parameter $\lambda = \omega a^2(\rho h / D)^{1/2}$ for the annular sector plates with combinational edges

Boundary conditions	Mode number			
	1	2	3	4
SSSS 	*68.38 #68.37 68.83	150.96 150.98 150.62	189.62 189.60 190.40	278.46 278.39 280.55
CF 	* 9.87 9.87	16.79 16.74	27.00 27.28	41.82 41.40
CF 	* 8.35 8.35	11.30 11.30	14.43 14.46	19.27 19.19
CF 	*21.31 21.22	48.42 47.96	81.25 81.32	89.27 88.32
CC 	*48.78 #48.78 48.78	87.77 87.78 87.79	104.88 104.89 104.91	136.93 137.10 136.90
SS 	25.61	56.85	70.11	98.01

* : Ref(5)-Liew

: Ref(4)-Kim & Dickinson

오차가 미세하다. 따라서 Table 7의 수치결과로 볼 때 직선과 곡선이 조합된 임의의 형상판에 대한 진동해석에 유용할 것으로 추론된다.

(5) 타원판

Table 8은 자유단, 단순지지단 및 고정단을 가지고 타원형상비가 1/5, 1/3, 1/2, 2/3 및 1인 타원판에 대한 고유진동 모드 1~6을 제시하고 Rajalingham⁽³⁾의 결과와 비교했다. 타원형상비 α 가 1인 정원은 경계조건이 자유단, 단순지지단 및 고정단 모두 Rajalingham의 결과와 거의 오차 없이 일치하고 있으므로 영역분할법에 대한 오차가 미세하다. 타원형상비 α 가 1/2인 타원이 자유단인 경우도 Rajalingham의 결과와 편차 1% 이내로 잘 일치한다. 그러나 단순지지단과 고정단인 경우는 모드 2에서 편차가 크며, 모드 5에서 예측하지 못한 새로운 모드가 하나 보인다. 이 편차와 새로운 모드에 대하여 세부적으로 검토할 필요가 있다.

Table 8 Comparison of the nondimensional frequency parameter $\lambda = \omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$ for the elliptic plates

B.C.	b/a	Mode number					
		1	2	3	4	5	6
F	1	* 5.26	5.26	9.06	12.24	12.24	20.51
	1	5.34	5.35	8.99	12.40	12.43	20.40
	2/3	6.46	7.98	16.25	16.51	17.55	29.37
	1/2	* 6.68	10.54	16.92	22.00	27.80	31.60
	1/2	6.65	10.54	17.16	22.00	27.77	32.60
	1/3	6.74	15.61	17.57	30.78	33.87	51.23
	1/5	6.76	17.67	25.74	34.20	48.62	78.52
	S	1	* 4.93	13.89	13.89	25.61	25.61
1	4.93	13.89	13.89	25.61	25.61	29.73	
2/3	8.28	17.83	27.45	31.80	41.40	52.25	
1/2	*13.22	34.84	38.40	46.20		62.80	
1/2	13.21	23.64	38.35	46.15	60.52	62.83	
1/3	27.08	40.14	57.05	84.29	98.53	116.32	
1/5	69.68	89.30	112.94	160.94	208.20	262.85	
C	1	*10.21	21.26	21.26	34.87	34.87	39.77
	1	10.22	21.26	21.28	34.88	34.91	39.90
	2/3	17.13	28.48	41.43	44.43	57.04	65.37
	1/2	*27.40	48.20	56.00	69.80		88.00
	1/2	27.37	39.50	56.00	69.85	78.01	88.07
	1/3	56.79	71.62	90.36	116.86	147.45	150.09
	1/5	149.65	172.05	198.61	249.35	296.41	403.61

* : Ref(3)-Rajalingham & Bhat

(6) 환형판

Table 9는 두개의 원형곡선이 조합된 형상인 환형판의 고유진동수 중 모드 1을 제시하고 Singh⁽²⁾의 결과와 비교했다. 환형의 내경과 외경의 비가 0.5~0.8로써 클때는 Singh의 결과와 1% 이내로 일치하고 있으나, 환형비가 0.2~0.4로써 작을 때는 1~6%까지 편차가 나타난다. 이 편차가 영역분할법에 의한 기하학적 오차의 가능성을 확인하기 위해 XY함수를 극좌표로 좌표변환하여 변경과 원주에 대하여 연속적분을 수행하여 그 결과를 비교 했으나 편차를 줄일 수는 없었다.

4. 결 론

기하학적 경계 조건만을 만족하는 단순한 급수함수(simplified series function)와 Rayleigh-Ritz Method를 사용하여 다양한 경계조건을 가지는 여러

Table 9 Comparison of the nondimensional fundamental frequency parameter $\lambda = (\omega a^2)(\rho h/D)^{1/2}$ for the annular plates with combination of free, simple and clamped edges

B.C.	Annular ratio				
	0.8	0.6	0.5	0.4	0.25
FF	* 3.197	3.871	4.214	4.541	5.065
	3.200	3.873	4.218	4.544	5.067
FS	* 8.782	4.809	4.074	3.654	3.592
	8.782	4.819	4.113	3.763	3.757
SF	* 9.455	5.664	5.051	4.777	4.930
	9.456	5.681	5.111	4.897	4.999
FC	* 84.67	20.60	13.10	9.118	5.593
	84.678	20.636	13.185	9.312	5.860
CF	* 92.81	25.24	17.60	13.51	10.56
	92.819	25.545	17.610	13.548	10.666
SS	*247.0	62.12	40.01	28.08	17.03
	247.07	62.163	40.055	28.089	17.382
SC	*381.6	94.26	59.91	41.37	24.18
	381.64	94.286	60.063	41.863	25.870
CS	*389.5	98.79	63.85	44.93	26.78
	389.53	98.797	63.881	44.959	26.996
CC	*559.1	139.6	89.25	61.91	35.87
	559.16	139.62	89.281	61.131	37.366

* : Ref(2)-Singh

가지 임의의 형상판에 대하여 무차원 고유 진동수를 조사하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 직선과 곡선이 조합된 여러가지 임의의 형상판의 고유진동수 예측에 기하학적 경계조건만을 만족하는 단순급수함수와 Rayleigh-Ritz법 적용이 유용하며, 기하학적 경계조건만을 만족하는 X 좌표와 Y 좌표로 조합된 단순한 급수함수(simplified series function)로써도 진동변형형상을 정확히 표현할 수 있다.

(2) 본 연구방법 결과로 고유진동수는 유용한 참고문헌들에 잘 일치했으며, 30항 이상에서 충분히 잘 수렴된다.

(3) 직선과 곡선이 조합된 복잡한 기하학적 형상에 대하여 유한 요소로 분할하지 않고서도 진동해석이 가능함을 보였다.

(4) 단순한 형태의 급수함수로써 판의 변위형상을 표현할 수 있으므로, 급수함수로 표현 가능한 임의의 형상에 대해서도 용이하게 확장하여 적용될 수 있는 가능성을 제시했다.

참 고 문 헌

- (1) 이영신, 정대근, 나문수, 1992, "단순급수함수를 이용한 직교이방성 복합재료삼각판의 자유진동 해석", 대한기계학회논문집, 제16권, 제15호, pp. 849~863.
- (2) Singh, B. and Chakraverty, S., 1993, "Transverse Vibration of Annular Circular and Elliptic Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Dimensions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 162, No. 3, pp. 537~546.
- (3) Rajalingham, C., Bhat., R.B. and Xistric, G.D., 1993, "Natural Frequencies and Mode Shapes of Elliptic Plates with Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials as Assumed Shape Function", Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, pp. 353~358.
- (4) Kim, C.S. and Dickinson S.M., 1989, "On the Free, Transverse Vibration of Annular and Circular, Thin, Sectorial Plates Subject to Certain Complicating Effects", Journal of Sound and Vibration, Vol. 134, No. 3, pp. 407~421.
- (5) Liew, K.M. and Lam, K.Y., 1993, "On the Use of 2-D Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method for Flexural Vibration of Annular Sector Plates of Arbitrary Shape", Int. J. Mech. Sci., Vol. 35, No. 2, pp. 129~139.
- (6) Liew, K.M. and Lam K.Y., 1991, "A Set of Orthogonal Plate Functions for Flexural Vibration of Regular Polygonal Plates", Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 113, pp. 182~186.
- (7) Liew, K.M. and Lam K.Y., 1990, "Application of Two-Dimensional Orthogonal Plate Function to Flexural Vibration of Skew Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 139, No. 2, pp. 241~252.
- (8) Liew, K.M. and Lam K.Y., 1991, "A Rayleigh-Ritz Approach to Transverse Vibration of Isotropic and Anisotropic Trapezoidal Plates Using Orthogonal Plate Functions", Int. J. Solids Structures, Vol. 27, No. 2, pp. 189~203.
- (9) Liew, K.M. 1993, "Treatments of Over-Restrained Boundaries for Doubly Connected Plates of Arbitrary Shape in Vibration Analysis", Int. J. Solids Structures, Vol. 30, No. 3, pp. 337~347.