H_∞制御에 의한 竝列型 倒立振子의 制御에 關한 硏究

양 주 호 · 변 정 환
부산수산대학교 공과대학
(1995년 3월 3일 접수)

A Study on the Control of Parallel-Type Inverted Pendulum by H∞ Conrtol

Joo-Ho Yang, Jung-Hoan Byun
National Fisheries University of Pusan
(Received March 3, 1995)

In this paper, authors derive the state - space equiation about the parallel - type inverted pendulum which is adopted as control object, and constitute the control system by H∞ control theory. The modeling error is unavoidably existed by linearization error, measurement error, and so on. We regard this modeling error which is determined from the identification through frequency response as unstructured model uncertainty. An augmented state - space equiation with frequency weighting function is constructed for application of the H∞ theory, and the mixed sensitivity problem is considered. The weighting functions are determined in consideration of the model uncertainty and the response of system in frequency region. The H∞ controller is designed by using software package for controller design.

From results of response simulation, the control system designed with H∞ theory guarantees low sensitivity for disturbance as well as robustness against the model uncertainties.

기호설명

$C_{1,2}$[N · m · s] : 진자 1, 2의 축 점성마찰 계수
F[N · s/m] : 대차, 벨트, 풀리, 모터계의 등가 점성 계수
G_{zw} : w부터 z까지의 전달함수
g[m/s²] : 중력 가속도
$H_{1,2}$[N] : 대차와 진자 1, 2사이에 작용하는 힘의 수평방향 성분
$J_{1,2}$[N · m · s²] : 진자 1, 2의 회전 모멘트
K : 제어기 전달함수
L : 루프전달함수
$l_{1,2}$[m] : 회전축의 중심으로부터 진자 1, 2의 중심까지의 거리
M_1[kg] : 대차, 벨트, 풀리, 모터계를 포함한 등가질량
$m_{1,2}$[kg] : 진자 1, 2의 질량
P : 제어대상 전달함수
r[V] : 기준입력
S : 감도함수
T : 상보감도함수
$T_{1,2}$[s] : 진자 1, 2의 주기
u[V] : 앰프의 입력전압
$V_{1,2}$[N] : 대차와 진자 1, 2사이에 작용하는

힘의 수직방향 성분

W_S : 감도함수의 주파수 하중
W_T : 상보감도함수의 주파수 하중
w : 외란과 잡음, 목표치 등의 외부입력
y[V] : 출력 Z의 측정치
Z[m] : 대차의 변위
Z_i[m/V] : 출력 Z에서 y까지의 게인
z : 위치와 힘 등의 제어된 출력
α[N/V] : u로부터 대차에 작용하는 힘의 게인
γ : Ws(s)에 관련된 비례 상수
$\xi_{1,2}$: 진자 1, 2의 감쇠비
$\theta_{1,2}$[rad] : 진자 1, 2의 편직선으로부터의 각도
$\lambda_{1,2}$: 진자 1, 2의 대수 감쇠률
$\omega_{1,2}$[rad/s] : 진자 1, 2의 고유진동수

서 론

도립진자는 불안정한 시스템의 전형적인 예로써 다양한 제어 이론의 유효성을 검정하기 위해서 실험실에서 널리 이용되고 있다. 그리고 도립진자는 일반적으로 단일형(Single - Type), 직렬형(Series - Type), 유연형(Flexible - type), 병렬형(Parallel - Type) 등으로 나누어진다[1].

본 논문에서 제어 대상으로 하는 도립진자는 평면 레일(Rail)을 따라 이동하는 하나의 대차 위에 2개의 진자를 병렬로 나열시킨 병렬형 도립진자이다. 이 병렬형 도립진자는 단일형 도립진자와 비교해서 안정화 제어가 곤란한 특성을 갖는다. 특히, 2개 진자의 동적 고유특성이 다르면 이론적으로 제어 가능 이지만, 고유 진동수가 같으면 제어가 불가능하다.

수학적 모델링은 고차 시스템의 저차원화 및 선형화 등으로 실제 시스템에 대한 불완전한 묘사이므로 항상 모델링 오차가 존재할 수 있다. 그러므로 제어 시스템 설계시 모델링 오차를 고려하지 않으면 시스템 성능 뿐만 아니라 안정도 문제까지 만족스럽지 않은 경우가 발생할 수도 있다. 그래서 모델링 오차를 고려한 안정 -강인성 문제[2,3]가 중요한 설계사양으로 부각되고 있다. 따라서 저차원화 및 선형화를 했을 때 발생하는 모델링 오차가 존재함에도 불구하고 강인한 제어 시스템이 되도록 설계할 필요가 있다. 이러한 점에서 강인성에 주목하고 있는 H∞제어이론을 제어 시스템 설계에 적용해보고자 한다.

본 논문에서는 제어 대상을 수학적으로 모델링하고, 주파수 응답을 이용하여 대차와 진자에 관련된 각각의 파라미터를 동정한다[4,5]. 그리고 H∞제어기를 적용하기 위하여 상태공간에서의 확장계를 구성한 후, 혼합감도 문제로써 H∞제어기를 설계한다[6]. 최종적으로 응답 시뮬레이션을 통하여 설계된 제어기의 유효성을 검증한다. 본 연구에서의 제어기 설계 및 응답 시뮬레이션에는 범용 제어계 설계용 지원 소프트웨어 패키지를 이용하였다.

도립진자 시스템의 모델링

도립진자 시스템은 구동 모터를 포함한 대차와 진자부분으로 크게 나눌 수 있다. 본 장에서는 이 두 부분을 각각 분리하여 모델링하고, 최종적으로 결합된 시스템에 대해 모델링한다.

2. 1 대차의 모델링

대차에 대한 수학적 모델링을 위하여 대차의 운동을 그림으로 표시하면 Fig.2 - 1과 같다.

Fig.2 - 1로부터 대차에 대한 운동 방정식은 식 (2 - 1)과 같다.

$$M\ddot{Z}(t)=au(t)-F\dot{Z}(t)-(H_1(t)+H_2(t)) \quad (2-1)$$

여기서,

F[N · s/m] : 대차, 벨트, 풀리, 모터계의 등가 점성 계수

$H_{1,2}$[N] : 진자 1, 2로부터 대차에 작용하는 힘

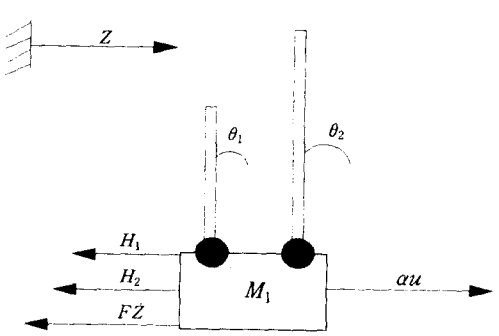

Fig. 2 - 1 The motion of cart

의 수평방향 성분

M_1[kg] : 대차, 벨트, 풀리, 모터계를 포함한 등가질량

u[V] : 앰프의 입력전압

Z[m] : 대차의 변위

α[N/V] : u로부터 대차에 작용하는 힘의 게인이다.

2.2 진자의 모델링

Fig.2-1에 있는 2개의 진자에 대한 수학적 모델링을 위하여 진자 1의 운동을 그림으로 표시하면 Fig.2-2와 같다.

Fig.2-2로부터 진자 1 및 진자 2에 관한 운동방정식은 식(2-2), (2-3), (2-4)와 같다.

$$J_1\ddot{\theta}_1 = V_1 l_1 \sin\theta_1 - H_1 l_1 \cos\theta_1 - C_1\dot{\theta}_1$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 = V_2 l_2 \sin\theta_2 - H_2 l_2 \cos\theta_2 - C_2\dot{\theta}_2 \qquad (2-2)$$

$$m_1\frac{d^2}{dt^2}(z + l_1\sin\theta_1) = H_1$$
$$m_2\frac{d^2}{dt^2}(z + l_2\sin\theta_2) = H_2 \qquad (2-3)$$

$$m_1\frac{d^2}{dt^2}(l_1\cos\theta_1) = V_1 - m_1 g$$
$$m_2\frac{d^2}{dt^2}(l_2\cos\theta_2) = V_2 - m_2 g \qquad (2-4)$$

여기서,

$C_{1,2}$[N · m · s] : 진자 1, 2의 축 점성마찰 계수

g[m/s²] : 중력 가속도

$H_{1,2}$[N] : 진자 1, 2가 대차로부터 받는 힘의 수평방향 성분

$J_{1,2}$[N · m · s²] : 진자 1, 2의 회전 모멘트

$l_{1,2}$[m] : 회전축의 중심으로부터 진자 1, 2의 중심까지의 거리

$m_{1,2}$[kg] : 진자 1, 2의 질량

$V_{1,2}$[N] : 진자 1, 2가 대차로부터 받는 힘의 수직방향 성분

$\theta_{1,2}$[rad] : 진자 1, 2의 편직선으로부터의 각도이다.

2.3 대차와 진자를 결합한 시스템의 모델링

Fig.2-3은 대차와 진자를 결합한 시스템을 나타낸 것이다. 이 시스템에 대한 모델링은 앞절에서 유도된 식(2-1), (2-2), (2-3), (2-4)로 부터 얻어진다. 즉, 식(2-3)을 식(2-1)에 대입하면

$$(M_1 + m_1 + m_2)\ddot{Z} + (m_1 l_1\cos\theta_1)\ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2$$
$$= -F\dot{Z} + (m_1 l_1\cos\theta_1)(\dot{\theta}_1)^2 + (m_2 l_2\sin\theta_2)(\dot{\theta}_2)^2 + au \qquad (2-5)$$

이 되고, 식(2-3) 및 (2-4)를 식(2-2)에 대입하여 H_1, H_2, V_1, V_2를 소거하면

$$(m_1 l_1\cos\theta_1)\ddot{Z} + (J_1 + m_1 l_1^2)\ddot{\theta}_1 = -C_1\dot{\theta}_1 + m_1 g l_1\sin\theta_1$$
$$(m_2 l_2\cos\theta_2)\ddot{Z} + (J_2 + m_2 l_2^2)\ddot{\theta}_2 = -C_2\dot{\theta}_2 + m_2 g l_2\sin\theta_2 \qquad (2-6)$$

이 된다. 식(2-5) 및 (2-6)은 θ(t)에 대한 비선형 미분방정식이므로 cosθ=1, sinθ=θ, sin θ$(\dot{\theta})^2$=0

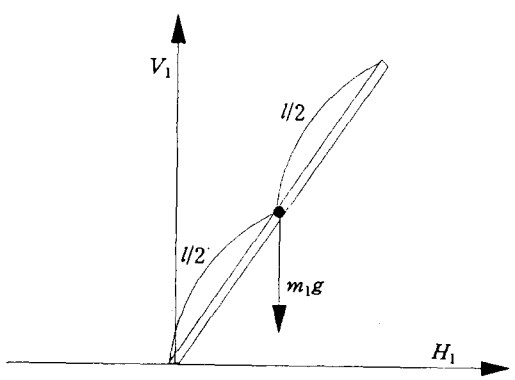

Fig. 2-2 The motion of pendulum

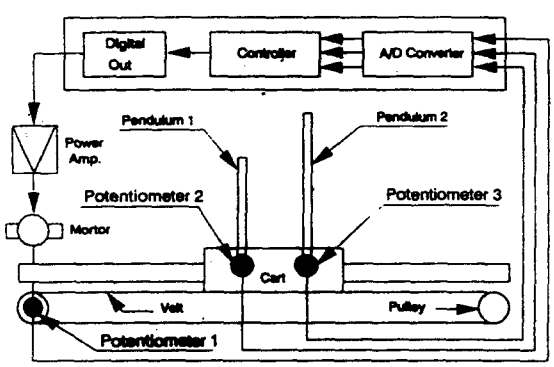

Fig. 2-3 Schematic diagram of experimental apparatus

으로 가정하여 선형화하면 식(2-7) 및 (2-8)이 된다.

$$M\ddot{Z}+m_1l_1\ddot{\theta}_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2=-F\dot{Z}+au \qquad (2-7)$$

$$m_1l_1\ddot{Z}+J_{11}\ddot{\theta}_1=-C_1\dot{\theta}_1+m_1gl_1\theta_1$$

$$m_2l_2\ddot{Z}+J_{22}\ddot{\theta}_2=-C_2\dot{\theta}_2+m_2gl_2\theta_2 \qquad (2-8)$$

여기서,

$M\triangleq M_1+m_1+m_2$, $J_{11}\triangleq J_1+m_1l_1^2$, $J_{22}\triangleq J_2+m_2l_2^2$ 이다.

식(2-7) 및 (2-8)로 부터 시스템의 동특성을 상태공간 모델식으로 표현하기 위하여 다음과 같이 상태변수를 정의하면 상태방정식 및 출력방정식은 식(2-18) 및 (2-19)와 같이 된다.

$$x_1\triangleq Z(t) \qquad (2-9)$$

$$x_2\triangleq\theta_1(t) \qquad (2-10)$$

$$x_3\triangleq\theta_2(t) \qquad (2-11)$$

$$x_4\triangleq\dot{x}_1=\dot{Z}(t) \qquad (2-12)$$

$$x_5\triangleq\dot{x}_2=\dot{\theta}_1(t) \qquad (2-13)$$

$$x_6\triangleq\dot{x}_3=\dot{\theta}_2(t) \qquad (2-14)$$

$$\ddot{Z}(t)=-\frac{(m_1l_1)^2g}{J_{11}L}\theta_1-\frac{(m_2l_2)^2g}{J_{22}L}\theta_2-\frac{F}{L}\dot{Z}+\frac{m_1l_1C_1}{J_{11}L}\dot{\theta}_1+\frac{m_2l_2C_2}{J_{22}L}\dot{\theta}_2+\frac{\alpha}{L}u \qquad (2-15)$$

$$\ddot{\theta}_1(t)=\frac{m_1l_1L_{11}+m_1gl_1}{J_{11}}\theta_1+\frac{m_1l_1L_{12}}{J_{11}}\theta_2+\frac{m_1l_1L_{13}}{J_{11}}\dot{Z}-\frac{(m_1l_1L_{14}+C_1)}{J_{11}}\dot{\theta}_1-\frac{m_1l_1L_{15}}{J_{11}}\dot{\theta}_2-\frac{m_1l_1L_{16}}{J_{11}}u \qquad (2-16)$$

$$\ddot{\theta}_2(t)=\frac{m_2l_2L_{11}}{J_{22}}\theta_1+\frac{m_2l_2L_{12}+m_2gl_2}{J_{22}}\theta_2+\frac{m_2l_2L_{13}}{J_{22}}\dot{Z}-\frac{m_2l_2L_{14}}{J_{22}}\dot{\theta}_1-\frac{(m_2l_2L_{15}+C_2)}{J_{22}}\dot{\theta}_2-\frac{m_2l_2L_{16}}{J_{22}}u \qquad (2-17)$$

상태방정식 :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\\ \dot{x}_5(t)\\ \dot{x}_6(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&L_{11}&L_{12}&L_{13}&L_{14}&L_{15}\\ 0&L_{21}&L_{22}&L_{23}&L_{24}&L_{25}\\ 0&L_{31}&L_{32}&L_{33}&L_{34}&L_{35}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\\ x_5(t)\\ x_6(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ L_{16}\\ L_{26}\\ L_{36}\end{bmatrix}u(t) \qquad (2-18)$$

출력방정식 :

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} \qquad (2-19)$$

여기서,

$$L\triangleq\frac{J_{11}J_{22}M-(m_1l_1)^2J_{22}-(m_2l_2)^2J_{11}}{J_{11}J_{22}}$$

$$L_{11}\triangleq-\frac{(m_1l_1)^2g}{J_{11}L},\ L_{12}\triangleq-\frac{(m_2l_2)^2g}{J_{22}L},\ L_{13}\triangleq-\frac{F}{L}$$

$$L_{14}\triangleq\frac{m_1l_1C_1}{J_{11}L},\ L_{15}\triangleq\frac{m_2l_2C_2}{J_{22}L},\ L_{16}\triangleq\frac{\alpha}{L}$$

$$L_{21}\triangleq\frac{m_1l_1L_{11}+m_1gl_1}{J_{11}},\ L_{22}\triangleq\frac{m_1l_1L_{12}}{J_{11}},\ L_{23}\triangleq\frac{m_1l_1L_{13}}{J_{11}}$$

$$L_{24}\triangleq-\frac{(m_1l_1L_{14}+C_1)}{J_{11}},\ L_{25}\triangleq-\frac{m_1l_1L_{15}}{J_{11}},\ L_{26}\triangleq-\frac{m_1l_1L_{16}}{J_{11}}$$

$$L_{31}\triangleq\frac{m_2l_2L_{11}}{J_{22}},\ L_{32}\triangleq\frac{m_2l_2L_{12}+m_2gl_2}{J_{22}},\ L_{33}\triangleq\frac{m_2l_2L_{13}}{J_{22}}$$

$$L_{34}\triangleq-\frac{m_2l_2L_{14}}{J_{22}},\ L_{35}\triangleq-\frac{(m_2l_2L_{15}+C_2)}{J_{22}},\ L_{36}\triangleq-\frac{m_2l_2L_{16}}{J_{22}}$$

이다.

2.4 파라미터의 동정

2.4.1 대차에 관련된 파라미터의 동정

진자가 없는 경우에 구동 모터를 포함한 대차에 관련된 파라미터(등가질량 M_1, 등가점성 마찰계수 F, u로부터 대차에 작용하는 힘의 게인 α)는 Fig.2-4와 같은 제어계를 구성하여 주파수 응답 실험과 장력의 측정으로 동정한다.

Fig.2-4 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{Z}+F\dot{Z}=au \qquad (2-20)$$

$$y=Z_iZ \qquad (2-21)$$

$$u=r-y \qquad (2-22)$$

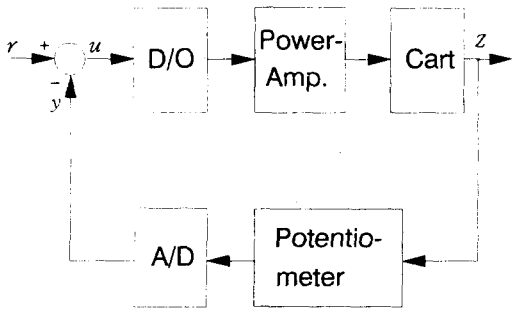

Fig. 2 - 4 Block diagram of cart control system for identification of parameters

여기서,

r[V] : 기준입력
y[V] : 출력 Z의 측정치
Z[m] : 대차의 변위
Z_i[m/V] : 출력(Z)에서 y까지의 게인

이다.

식(2 - 21) 및 (2 - 22)를 식(2 - 20)에 대입하면 식(2 - 23)과 같이 된다.

$$\ddot{y}+\frac{F}{M_1}\dot{y}+\frac{\alpha}{M_1 Z_i}y=\frac{\alpha}{M_1 Z_i}r \qquad (2-23)$$

식(2 - 23)을 2차 시스템의 일반형으로 표현하면 식(2 - 24)와 같이 된다.

$$\ddot{y}+2\xi\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=\omega_n^2 r \qquad (2-24)$$

따라서 식(2 - 23)과 식(2 - 24)의 계수를 비교함으로써 F와 M_1을 식(2 - 25) 및 (2 - 26)으로부터 구할 수 있다.

$$\frac{F}{M_1}=2\xi\omega_n \triangleq a_1 \qquad (2-25)$$

$$\frac{\alpha}{M_1 Z_i}=\omega_n^2 \triangleq b_1 \qquad (2-26)$$

식(2 - 24)를 전달함수로 표현하면 식(2 - 27)과 같다.

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{b_1}{s^2+a_1 s+b_1} \qquad (2-27)$$

입력측에 다양한 주파수(ω)의 정현파를 가했을 때, 그 주파수 응답선도는 Fig.2 - 5이며, 이 응답

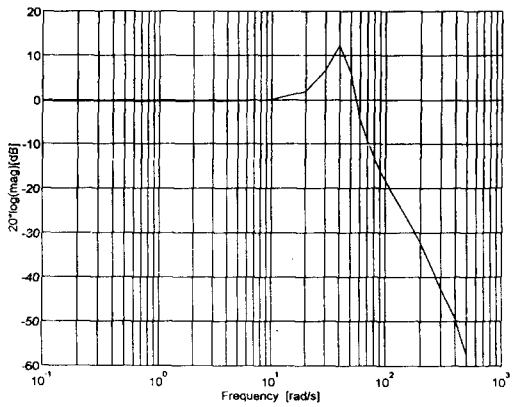

Fig. 2 - 5 Frequency response of the cart control system

선도에서 구한 ω_n 및 ξ와 장력의 측정으로 부터 구한 α를 식(2 - 25)와 식(2 - 26)에 대입하면 다음과 같이 파라미터의 값을 동정할 수 있다.

$\omega_n=40$, $\xi=0.12$, $\alpha=19.35$, $Z_i=0.084$,
$a_1=9.6$, $b_1=1600$
$\therefore M_1=\frac{\alpha}{b_1 Z_i}\ 0.144$[kg],
$F=M_1 a_1=1.382$[N · s/m]

2. 4. 2 진자에 관련된 파라미터의 동정

진자에 관련된 파라미터(진자의 회전모멘트 $J_{1,2}$ 및 진자의 축점섬마찰 계수 $C_{1,2}$)를 동정하기 위하여 본 연구에 이용된 진자 1과 진자 2를 Fig.2 - 6과 같이 자유진동을 시켜 실험적인 방법으로 진동의 응답을 구한다. 그리고 이 진자의 운동방정식의 해와 비교하여 진자에 관련된 파라미터 값을 동정한다.

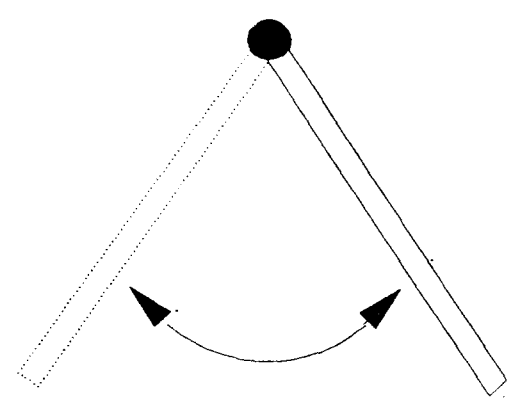

Fig. 2 - 6 Free vibration of Pendulum

진자의 자유진동 운동 방정식은 식(2-28)과 같고,

$$J\ddot{\theta}+C\dot{\theta}+mgl\sin\theta=0 \qquad (2-28)$$

미소각에서는 $\sin\theta\fallingdotseq\theta$이므로 식(2-28)은 식(2-29)와 같이 된다.

$$J\ddot{\theta}+C\dot{\theta}+mgl\theta=0 \qquad (2-29)$$

식(2-29)을 단순 2차시스템의 일반형으로 가정하면 식(2-30)과 같이 되고,

$$\ddot{\theta}+2\xi\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=0 \qquad (2-30)$$

식(2-29)와 식(2-30)의 계수를 비교하면 식(2-31) 및 (2-32)가 된다.

$$J=\frac{mgl}{\omega_n^2} \qquad (2-31)$$

$$C=2\xi\omega_n J \qquad (2-32)$$

초기조건이 $\theta(t=0)=\theta_0$, $\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0=0$일 때, 식(2-29)의 해는 식(2-33)이 된다.

$$\theta(t)=\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot e^{-\xi\omega_n t}\cdot\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t+\Phi) \qquad (2-33)$$

여기서, $\Phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\ (1>\xi>0)$이다. (2-34)

그리고 식(2-33)으로부터 식(2-35)가 얻어진다.

$$\frac{|\theta_1|}{|\theta_2|}=e^{\xi\omega_n T} \qquad (2-35)$$

여기서, $T=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}$ 이다. (2-36)

그리고 식(2-35)의 양변에 자연대수를 취하면 진자의 대수 감쇠률 λ는 식(2-37)과 같이 얻을 수 있다.

$$\lambda=\ln\frac{|\theta(t_1)|}{|\theta(t_2)|}=\frac{2\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (2-37)$$

그리고 식(2-36) 및 (2-37)를 ξ와 ω_n에 대하여 정리하면 각각 식(2-38), (2-39)로 되고,

$$\xi=\frac{\lambda}{\sqrt{4\pi^2+\lambda^2}} \qquad (2-38)$$

$$\omega_n=\frac{\sqrt{4\pi^2+\lambda^2}}{T} \qquad (2-39)$$

식(2-39)를 식(2-31)에 대입하면 진자의 등가 관성모멘트 J는 식(2-40)과 같고,

$$J=\frac{mglT^2}{4\pi^2+\lambda^2} \qquad (2-40)$$

그리고 식(2-38), (2-39), (2-40)을 식(2-32)에 대입하여 정리하면 축의 등가 점성마찰계수 C는 식(2-41)과 같다.

$$C=\frac{2mglT\lambda}{4\pi^2+\lambda^2} \qquad (2-41)$$

따라서, Fig.2-7과 같은 응답실험 결과로부터 구한 λ_1, λ_2, T_1, T_2를 식(2-38)과 식(2-39)에 대입하여 구한 값 ξ_1, ξ_2, ω_{n1}, ω_{n2}를 식(2-40)과 식(2-41)에 대입하면 파라미터 J_1, J_2, C_1, C_2는 다음과 같다.

진자 1의 파라미터 :

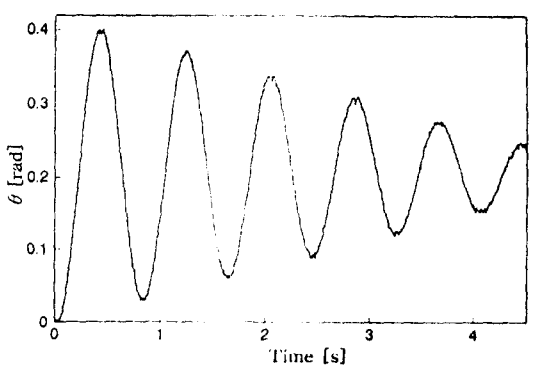

Fig.2-7(a) Response of free oscillation of pendulum 1

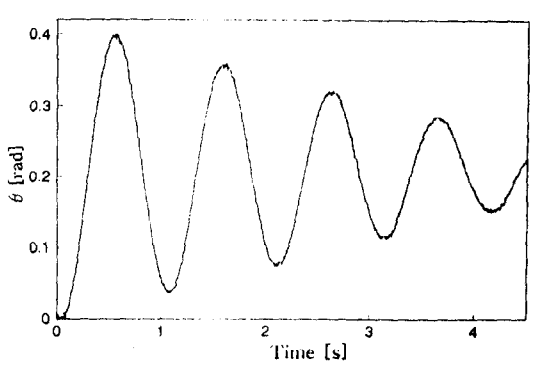

Fig.2-7(b) Response of free oscillation of pendulum 2

$m_1=7.6148\times10^{-3}$[kg], $l_1=1.2150\times10^{-1}$[m],
$T_1=8.1350\times10^{-1}$[s],
$\lambda_1=1.0851\times10^{-1}$, $\xi_1=1.7267\times10^{-2}$,
$\omega_{n1}=7.7248$ [rad/s]
$\therefore J_1=1.5210\times10^{-4}$[N · m · s^2],
$C_1=4.0576\times10^{-4}$[N · m · s]

진자 2의 파라미터 :
$m_2=3.6697\times10^{-3}$[kg], $l_2=2.1000\times10^{-1}$[m],
$T_2=1.0480$[s],
$\lambda_2=1.5712\times10^{-1}$, $\xi_2=2.4999\times10^{-2}$,
$\omega_{n2}=5.9973$[rad/s]
$\therefore J_2=2.1020\times10^{-4}$[N · m · s^2],
$C_2=6.3026\times10^{-5}$[N · m · s]

H∞ 제어기 설계

3.1 H∞ 제어 문제

$H\infty$제어의 일반화된 제어계은 Fig.3 - 1과 같이 표현 할 수 있다. 여기서, w는 외란과 잡음, 목표치 등의 외부입력을 나타내고, u는 제어입력을 나타낸다. 또 z는 위치와 힘 등의 제어된 출력(피제어량)을 나타내고, y는 센서로 측정된 출력(관측량)을 표시하고 있다. $H\infty$제어는 시스템을 내부 안정화하는 모든 제어기 $K(s)$중에서, w로부터 z까지의 전달함수의 $H\infty$ - norm을 지정하는 값보다 작게 하는 제어기를 선정하여 $u=Ky$의 피드백제어를 행하는 것이다. 즉 w부터 z까지의 전달함수를 $G_{zw}(s)$로 하면, $H\infty$제어문제는 다음의 조건을 만족하는 보상기 $K(s)$를 구하는 것이다.

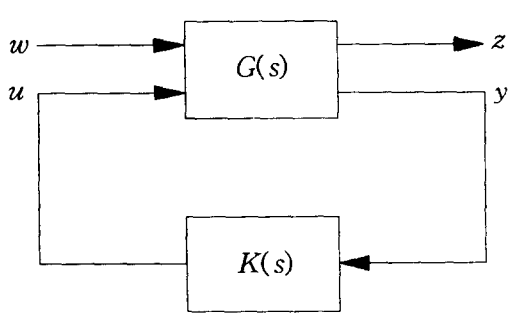

Fig. 3 - 1 Generalized control system

(1) $K(s)$는 $G(s)$를 안정화한다.
(2) $\| G_{zw}(s) \|_\infty < 1, \ \forall\omega$ (3 - 1)

단, $H\infty$ - $norm$은 최대특이치 $\bar{\sigma}$를 써서 다음과 같이 정의된다.

$$\| G_{zw}(S) \|_\infty : \sup \bar{\sigma}\{G_{zw}(jw)\} \qquad (3-2)$$

$H\infty$제어기법에는 여러가지 방법이 있으나, 본 연구에서는 혼합감도문제를 이용하여 제어기를 설계한다.

3.2 혼합감도 문제

플랜트 및 보상기의 전달함수를 P, K라 하면 출력측으로부터 감도함수는 $S=(I+KP)^{-1}$로 되는데, 본 연구에 제어대상의 경우는 출력수(3)가 입력수(1)보다 크기 때문에 KP가 $Full\ Rank$를 갖지 않으므로 출력측으로부터의 저감도화는 의미가 없다. 따라서 이 경우는 입력측으로부터 본 혼합감도문제를 고려하는 것이 타당하다.

$H\infty$ 제어문제로 제어계를 구성하기 위해 감도함수와 상보감도함수에 주파수 하중을 가하여 Fig.3 - 2와 같은 확대계를 구성하였다. 입력(w)로부터 편차(e)까지의 전달함수(감도함수 $S(s)$)와 입력(w)으로 제어대상 $P(s)$의 제어입력(u)까지의 전달함수(상보감도함수 $T(s)$)는 루프전달함수를 $L(s)$라 하면 각각 식(3 - 3) 및 (3 - 4)로 표현된다.

$$S(s)=[I+L(s)]^{-1} \qquad (3-3)$$
$$T(s)=L(s)[I+L(s)]^{-1} \qquad (3-4)$$

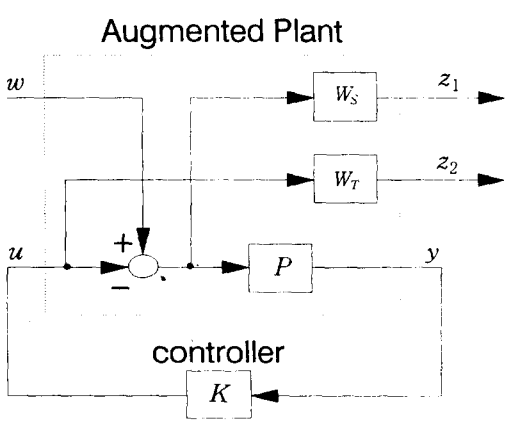

Fig. 3 - 2 Augmented control system

여기서, $L(s) \triangleq K(s)P(s)$이다.

감도함수와 상보감도함수는 어느 쪽이나 작은 쪽이 좋지만, 식(3-3), 식(3-4)로부터 감도함수와 상보감도함수는 독립되어 있지 않고, 한쪽을 작게 하면 다른쪽은 크게 되어, 동시에 작게하는 것은 불가능하다. 그래서 서로 다른 주파수영역에서 감도함수와 상보감도함수을 작게 하기 위해 주파수 하중을 고려한다.

Fig.3-2에서의 $W_S(s)$와 $W_T(s)$는 각각 감도함수($S(s)$)와 상보감도함수($T(s)$)에 대한 주파수 하중을 나타내는 유리함수이다.

제어대상에 가한 외란의 영향을 적게 하기 위해서는 외란이 가해진 주파수(낮은 주파수)에서 감도함수를 작게 하면 된다. 일반적으로 감도함수는 행열로 표시되기 때문에 크기의 척도로서 최대 특이치 $\bar{\sigma}$를 이용한다.

$$\bar{\sigma}\{S(iw)\} < |\gamma^{-1} W_S^{-1}(jw)| \qquad (3-5)$$

여기서, γ는 스칼라이다. 이 조건을 $H\infty - norm$을 이용해서 나타내면

$$\| \gamma W_S(s) S(s) \|_\infty < 1 \qquad (3-6)$$

로 된다. 하중함수 $W_S(s)$은 게인이 외란이 가해진 주파수(낮은 주파수)대에서 크게 되도록 선택한다.

다음으로 상보감도함수($T(s)$)에 대한 하중함수에 대해서 고찰하자. 제어대상의 곱셈형 불확실성을 $\Delta(s)$라 하면, 불확실성을 고려한 제어대상을 $G'(s)$는 식(3-7)과 같이 된다.

$$G'(s) = \{I + \Delta(s)\} G(s) \qquad (3-7)$$

이 경우 불확실성($\Delta(s)$)가 $G(s)$와 $G'(s)$의 불안정극의 수를 변하지 않도록 하면, 로버스트 안정성의 조건 :

$$\bar{\sigma}\{T(jw)\} < |W_T^{-1}(jw)|$$

을 만족하면

$$\bar{\sigma}\{D(jw)\} \le |W_T(jw)| \qquad (3-8)$$

로 되는 불확실성($\Delta(s)$)에 대해서 폐루프계는 안정하고, 식(3-9)가 얻어진다.

$$\| W_T(s) T(s) \|_\infty < 1 \qquad (3-9)$$

본래의 시스템에 대한 불확실성은 고주파수에서 크기 때문에, 하중함수 W_T의 게인은 고주파수에서 크게 되도록 선택한다.

이상의 것에 의해 식(3-6)과 식(3-9)를 동시에 만족하는 제어기 $K(s)$를 구하면 된다. 최대 특이치의 성질을 이용하면, 아래의 식(3-10)이 성립하기 때문에,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \le \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \le \bar{\sigma}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \qquad (3-10)$$

이것을 이용하여 식(3-6)과 (3-9)를 식(3-11)과 같은 하나의 식으로 표현하는 것이 가능하다.

$$G_{zw}(S) = \left\| \begin{bmatrix} \gamma W_S(s) S(s) \\ W_T(s) T(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \qquad (3-11)$$

이것이 혼합감도문제이다.

3.3 주파수 하중

병렬형 도립진자는 불안정하기 때문에 폐루프계를 안정하게 하는 제어기를 구하지 않으면 안된다. 이 경우 다음 사항이 요망되어진다.

(1) 실제 모터에 대해서 정확하게 모델링하는 것은 어렵고 오차를 포함한다고 생각해야 한다. 이 때문에 모델링이 불확실한 경우에도 안정하여야 한다.

(2) 대차와 진자의 파라미터 변동에 대해서도 안정하여야 한다.

이상을 만족하는 제어기를 구하기 위해 H∞ 제어이론 중 혼합감도문제를 이용하여 제어계 설계를 행한다.

앞에서 기술한 것처럼 감도함수 $S(s)$에 대한 주파수하중 $W_S(s)$은 낮은 주파수에서는 게인이 크고 높은 주파수에서는 게인이 작은 것을 선택한다. 여기서는 다음과 같은 일차 하중함수를 이용한다.

$$W_S(s) = \frac{0.2(s+1000)}{s+0.1} \qquad (3-12)$$

다음으로 상보감도함수 $T(s)$에 대한 주파수하중 $W_T(s)$를 선정하기 위하여 대차의 모델링에 대한 불확실성의 주파수 특성은 Fig.3-3과 같다. 그림

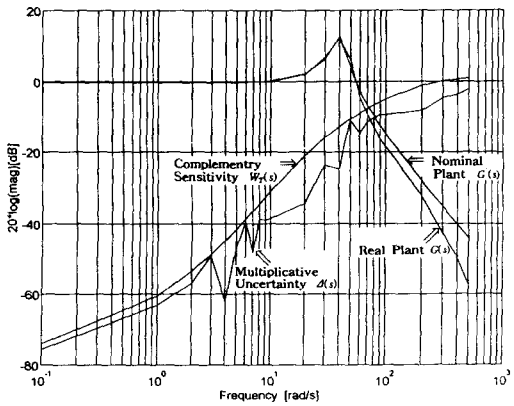

Fig. 3 - 3 Bode Plot of Multiplicative Uncertainty

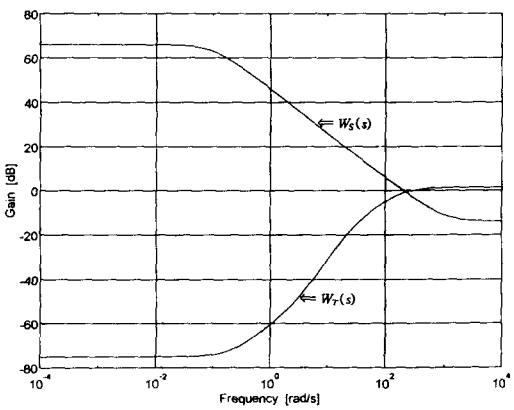

Fig. 3 - 4 Bode Plot of $W_S(S)$ and $W_T(S)$

으로부터 식(3 - 9)를 만족하는 $W_T(s)$를 식(3 - 13)과 같이 선택한다.

$$W_T(s)=\frac{4000(s+0.2)(s+3)}{3390(s+20)(s+200)} \qquad (3-13)$$

하중함수 W_S와 W_T의 주파수응답은 Fig.3 - 4와 같다.

3.4 H∞제어기의 계산

Fig.3 - 2의 확대계를 상태공간으로 표시하면 식(3 - 14)와 같다.

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+B_1w+B_2u\\ z&=C_1x+D_{11}w+D_{12}u\\ y&=C_2x+D_{21}w+D_{22}u\end{aligned} \qquad (3-14)$$

여기서,

$$A=\begin{bmatrix}A_p & 0 & 0\\ 0 & A_{ws} & 0\\ 0 & 0 & A_{wt}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}B_p\\ B_{ws}\\ 0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}-B_p\\ -B_{ws}\\ B_{wt}\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & C_{ws} & 0\\ 0 & 0 & C_{wt}\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix}C_p & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}D_{ws}\\ 0\end{bmatrix},\ D_{12}=\begin{bmatrix}-D_{ws}\\ D_{wt}\end{bmatrix},\ D_{21}=[0],\ D_{22}=[0]$$

이다. 여기서, $x\in R^9$은 상태, $w\in R^1$은 외부 입력, $u\in R^1$은 제어입력, $z\in R^2$은 출력, $y\in R^3$는 관측 출력을 의미한다. 윗 식(3 - 14)에서 (A, B_2)는 가안정, (C_2, A)는 가검출이다.

$H\infty$제어기의 계산은 三平 과 美多 등이 제안한 상태공간에서의 $H\infty$제어 알고리즘[7]을 이용하여, 엄밀히 프로퍼(Strictly Proper)한 제어기를 범용 제어계 설계용 지원 소프트웨어 패키지를 이용하여 구하였다. 이때, $\mu=1\times10^{-7.5}$, $\varepsilon=1\times10^{-7}$로 하였고, 스칼라 γ에 관한 반복 계산을 한 경우, 식(3 - 11)을 만족하는 γ의 최대치는 15이고, 여기서는 $\gamma=1$로 한 경우의 얻어진 제어기의 전달함수의 개략적인 값을 표현하면 $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}K_1(s)=[&2.994\times10^5s^8+7.873\times10^7s^7+4.198\times10^9s^6+8.933\times10^{10}s^5+7.957\times10^{11}s^4+\\&2.313\times10^{12}s^3+3.69\times10^{12}s^2+3.492\times10^{11}s+1.358\times10^6]/[s^9+1776s^8+2.606\times10^6s^7+6.758\times10^8s^6+2.585\times10^{10}s^5+\\&3.254\times10^{11}s^4+1.194\times10^{12}s^3+6.91\times10^{11}s^2+9.662\times10^{10}s+3.961\times10^9]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_2(s)=[&-1.048\times10^6s^8-2.668\times10^8s^7-1.33\times10^{10}s^6-4.17\times10^{11}s^5-8.79\times10^{12}s^4-\\&9.305\times10^{13}s^3-3.45\times10^{14}s^2-1.792\times10^{14}s-1.478\times10^{13}]/[s^9+1776s^8+2.606\times10^6s^7+6.758\times10^8s^6+2.585\times10^{10}s^5+\\&3.254\times10^{11}s^4+1.194\times10^{12}s^3+6.91\times10^{11}s^2+9.662\times10^{10}s+3.961\times10^9]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_3(s)=[&-6.197\times10^5s^8-1.567\times10^8s^7-6.28\times\end{aligned}$$

$$10^9s^6+8.98\times10^{10}s^5+7.3\times10^{12}s^4+1.003\times10^{14}s^3+3.569\times10^{14}s^2+1.824\times10^{14}s+1.494\times10^{13}]/[s^9+1776s^8+2.606\times10^6s^7+6.758\times10^8s^6+2.585\times10^{10}s^5+3.254\times10^{11}s^4+1.194\times10^{12}s^3+6.91\times10^{11}s^2+9.662\times10^{10}s+3.961\times10^9] \quad (3-15)$$

식(3-15)의 제어기는 H_∞제어문제의 해로 얻어졌기 때문에, 구성된 폐루프계는 안정하게 된다. 이 경우의 폐루프 전달함수 $G_{zw}(s)$에 대한 Bode선도를 Fig.3-5에 나타내었고, 이 그림에서 알 수 있듯이 식(3-1)이 만족됨을 알 수 있다. Fig.3-6은 주파수하중 $\gamma W_S^{-1}(s)$와 $S(s)$, Fig.3-7은 W_T^{-1}와 $T(s)$에 대한 bode선도를 나타내었다. Fig.3-6의 선도에서는 식(3-6)이 만족함을 알 수 있고, Fig.3-7의 선도에서는 식(3-9)가 만족됨을 알 수 있다.

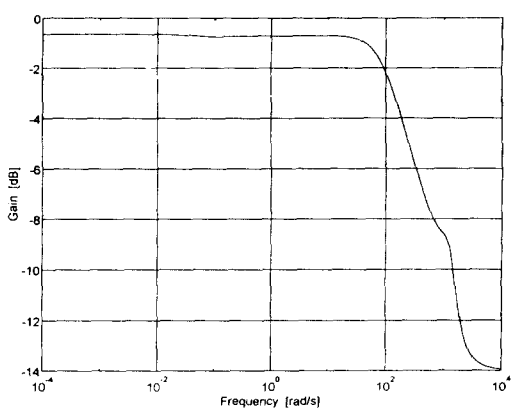

Fig. 3-5(a) Bode Plot of $G_{z1w}(s)$

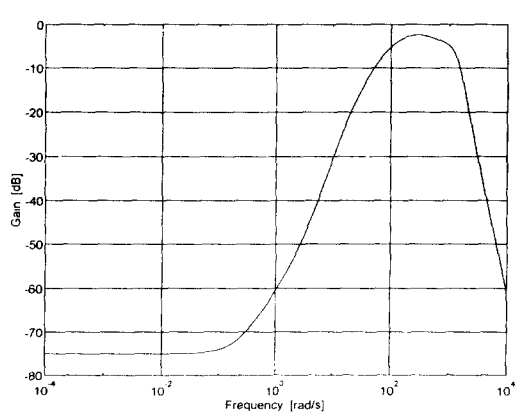

Fig. 3-5(b) Bode Plot of $G_{z2w}(s)$

응답 시뮬레이션 및 검토

Fig.3-8은 진자 1(y_2)과 진자 2(y_3)의 초기상태

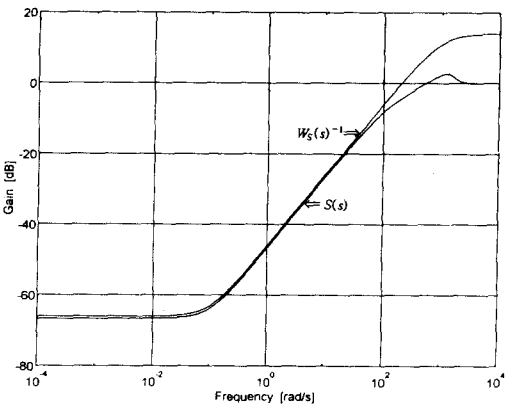

Fig. 3-6 Bode Plot of Sensitivity and $WS(S)^{-1}$

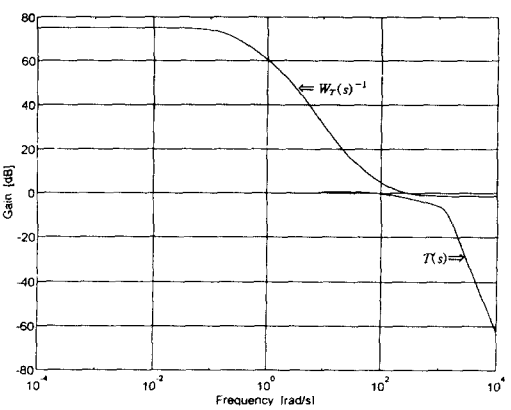

Fig. 3-7 Bode Plot of Complementary Sensitivity and $WT(S)^{-1}$

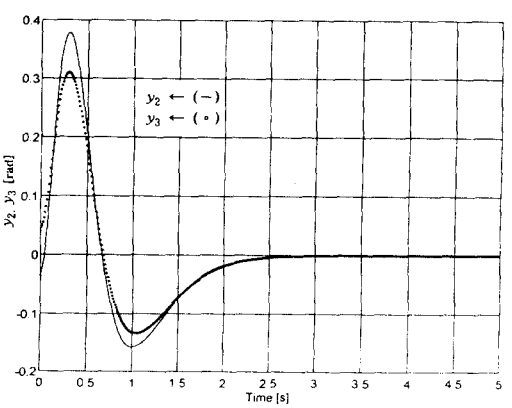

Fig. 3-8 Response of pendulum 1 & 2(y_2, y_3) which have initial state of y_2= -0.04[rad], y_3= 0.04[rad]

를 $y_2 = -0.04$[rad], $y_3 = 0.04$[rad]로 둔 상태에서 제어를 행한 경우의 시뮬레이션 응답선도이다. 그림으로부터 알 수 있듯이 진자 1(y_2)의 고유진동수(ω_{n1})보다 진자 2(y_3)의 고유 진동수(ω_{n2})가 작기 때문에 진자 1(y_2)의 응답속도가 더 빠르다. 따라서 진자 2(y_2)를 진자 1(y_3)의 기울어진 방향과 일치시킨 후에 두 진자의 상태가 0에 수렴하도록 제어되고 있음을 알 수 있다.

또한 Fig.3-8의 응답선도로부터 진자 1(y_2)과 진자 2(y_3)는 각각 약 2.5초 후에 상태가 안정화 되는 양호한 제어계가 구성되었음을 알 수 있다.

Fig.3-9는 Fig.3-8에서와 같은 초기상태에서 진자 2에 관련된 모든 파라미터(m_2, l_2, J_2, C_2)를 12% 변동시킨 후에 제어를 행하

였을 경우의 응답선도이다. Fig.3-8의 경우와 비교하면 진자의 최대 상태 값이 0.07[rad] 정도 증가하고, 과도응답이 약 0.5초 정도 길어졌을 뿐이고. 각각의 진자를 안정화 시키는 데는 문제가 없다.

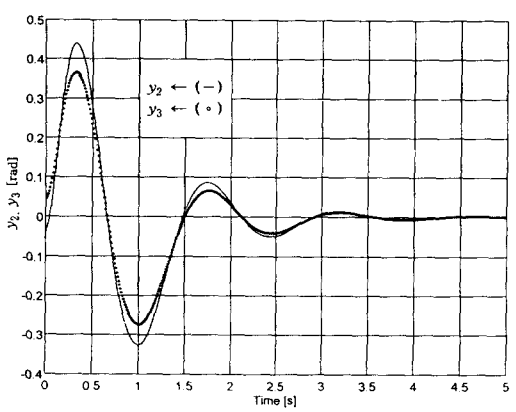

Fig. 3-9 Response of pendulum 1 & 2(y_2, y_3), when plant perturbation is generated

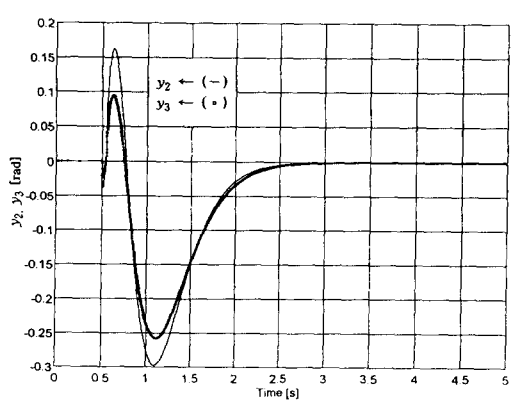

Fig. 3-10 Response of pendulum 1 & 2(y_2, y_3), when disturbance is inflicted on pendelum 2.

그러므로 Fig.3-9는 제어기가 강인한 안정성(Robust stability)을 갖고 있음 보여준다.

Fig.3-10은 제어를 하고 있는 중, 진자 2에 0.05동안 0.1[rad]의 외란을 가했을 경우의 응답선도이다. 응답선도로부터 약 2초 후에 두 진자의 상태가 안정하게 됨을 보이고 있으며, 이로부터 제어계는 양호한 외란제거 성능도 아울러 갖고 있음을 보여준다. 즉, 본 연구에서 설계한 제어기는 강인한 성능(Robust performence)을 을 가지고 있음을 알 수 있다.

결 론

병렬형 도립진자를 수학적으로 모델링하고 주파수 응답법에 의해 파라미터를 동정하여, H_∞ 제어이론 중 혼합감도문제에 의거하여 제어계를 설계한 후 응답 시뮬레시션을 한 결과 그 응답으로부터 모델링의 불확실성에 대처할 수 있는 강인한 제어계를 구성할 수 있었다.

앞으로 실제 시스템에 대한 제어를 과제로 남겨두고 있다. 시뮬레이션 응답과는 달리 실제 응답실험에서도 좋은 결과를 얻기 위해서는 여러가지의 어려움이 있을 것으로 예상된다. 특히 응답 시뮬레이션에서도 나타난 바와같이 진자가 미소각으로 기울어진 상태에서 제어를 할 경우에도 각 상태의 변동량이 크고, 또한 상당한 제어입력을 요한다. 따라서 센서 잡음에 대한 영향을 충분히 고려할 필요가 있으므로, 노이즈를 많이 발생시키는 PWM 방식의 직류모터 구동 드라이버보다는 선형 드라이버를 이용하는 것이 적절할 것으로 예상된다.

참고문헌

1) 川谷亮治, 山口尊志(1993) : 竝列型2重倒立振子系の解析とその安定化, 計測自動制御學會論文集, Vol.29, No.5, p.582 - p.580

2) M. Morari, E. Zafiriou(1989) : Robust Process

Control, Prentice Hall Inc

3) 松村文夫, 田政之, 清水正直(1990) : H∞ 制御理論を適用した磁氣浮上系, T.IEE Japan, Vol.110 - D, No.10

4) 金光植 譯(1992) : 機械振動力學, 普成文化社

5) Willame. Riley, Leroy D. Sturges(1993) : Dynamics, John Wiley &SonsInc

6) John C. Doyle, Bruce A. Francis Allen R. Tannenbaum(1992) : Feed Back Control Theory, Macmillan Publishing Company

7) 川路茂保 金澤一伸(1991) : フレキシブル 倒立振子の H∞制御, 第14回 Dynamical System Theory シンポジウム