

비선형 로터-하우징 시스템의 동특성 해석 연구

김 광 국*, 임 재 환*, 이 기 형*, 정 인 성**

A study on the Analysis of Dynamic Characteristic for Nonlinear Rotor-Housing Systems

Gang-Gug Kim*, Jae-Hwan Lim*, Kee-Hyung Lee*, In-Sung Chung**

ABSTRACT

Nonlinear analysis methods are developed which will enable the reliable prediction of the dynamic behavior of the space shuttle main engine(SSME) turbopumps in the presence of bearing clearances and other local nonlinearities.

A computationally efficient convolution method, based on discretized Duhamel and transition matrix integral formulations, is developed for the transient analysis. In the formulation, the coupling forces due to the nonlinearities are treated as external forces acting on the coupled subsystems. Iteration is utilized to determine their magnitudes at each time increment. The method is applied to a nonlinear generic model of the high pressure oxygen turbopumps, the convolution approach proved to be more accurate and highly more efficient. For determining the nonlinear, steady-state periodic responses, an incremental harmonic balance(IHB) method was also developed. The method was successfully used to determine dominantly harmonic and subharmonic(subsynchronous) responses of the HPOTP generic model with bearing clearances. A reduction method similar to the impedance formulation utilized with linear systems is used to reduce the housing-rotor models to their coordinates at the bearing clearances.

1. 서 론

현재의 복잡한 회전기계는 강한 비선형성을 주는 다양한 원인들(sources)을 포함하고 있고, 이것들은 베어링, 기어, 스플라인에서 간극, 스플라인, 실(seal)로터 날개 등에서 마찰, 압착 필립 뎀퍼 및 다른 유동효과를

포함한다.

실제적인 로터 시스템의 관찰된 비선형 거동으로는 점프 불연속거석⁽⁷⁾, 큰비동기 운동^(1,2,10), 준 주기응답 및 존재할 수 있는 혼돈⁽¹²⁾이 포함된다. Nataraj와 Nelson 등이 발표한 것과 같이 현재의 기계에서 미래의 발전은 주로 비선형 요소를 포함한 계를 해석하고 수학적

* 전북 대학교 기계공학과 대학원

** 전북 대학교 기계공학과 교수

으로 모델화하며 이해 및 규명하는 능력에 달려 있다.⁽¹¹⁾

SSME의 터보펌프는 복잡한 로터-하우징 계이고, 이들의 응답과 안정성이 그 들의 유연한 로터와 하우징 사이에 존재하며, 작업유와 실(seal), 베어링을 통해서 전달되는 우력에 결정적으로 의존할 수 있다. 특별한 관심은 볼 베어링과 하우징 사이의 기본적인 dead-band 간극 존재의 효과이고 이러한 간극은 터보 펌프 로터가 비선형 동적계로 응답하도록 작용한다. 따라서 일반적으로 로터-하우징계는 바람직하지 못한 부조화, 조합 및 내부공진으로 나타나고⁽¹²⁾ 그것은 비주기적이며 예측 불가능한 혼돈적 형태로 응답한다.^(12,14) 임계속도를 통과할 때 로터의 과도 응답은 비선형성이 존재할 때 상당히 다를 수가 있다.⁽⁹⁾

Funge-Kutta 적분법을 이용하여 Childs와 Moyer은 SSME의 HPOTP의 과도 비선형 해석을 하고, 실험적 결과와 유사한 부동기 로터 응답을 얻었다.⁽³⁾ 그들은 부동기 응답을 베어링 간극의 존재와 불안정한 impdeller-diffuser 힘의 존재 때문인 것으로 생각하였다. Glease와 Budley은 베어링 deadband가 밀봉 교차우력에 따르는 수정된 Jeffcott 모형에 미치는 영향을 조사하고 부동기, 동기 및 비주기형의 불균형력에 대한 로터의 응답을 나타냈다.⁽⁶⁾ Glease의 것과 같은 유사한 모형을 사용하여,⁽⁶⁾ Day와 Zalick는 비선형 고유 진동수를 갖는 극한 사이클에 이르렀을 때 베어링 간극과 교차 밀봉 우력의 존재하에서 응답에 관하여 발표 하였다.^(6,17)

자려 가진 극한 사이클이나 회전불균형으로 인한 강제 운동의 형태로 로터 시스템의 정상상태 주기응답을 결정하는 것이 종종 필요하다. 비선형 주기응답의 정확한 예측 및 안정성은 비선형 로터시스템의 동적거동의 완전한 묘사(picture)로 발전 시키는데 중요한 역할을 한다. 효과적인 일반적 방법은 비선형성을 포함하는 큰 로터-하우징 계의 가능한 주기 해를 직접적으로 결정하는데 분명히 필요하다. 반대로 직접적인 수학적 적분 방법은 정상상태 주기해를 얻는데에 이용된다.

본 연구의 주된 목적은 SSME의 터보엔진 같은 대형 로터-하우징계의 비선형 동적해석의 믿을 만하고 효과적인 해석적 및 계산 개발을 위한 것이다. 본 연구는 일반적인 다관 디스크형 로터-하우징계의 비선형 거동의 관점에서 수행한다. 이러한 목적 때문에 SSME 터보펌프의 일반적 모델은 Davis 등에 의해서 제안되었고,

이것은 본 연구에서 비선형 해석 방법에 사용 되었다. 집중조화균형방법을 확장하는 방법의 하나로서 Choi와 Noah에 의해 개발된 증분조화 균형법을 다자유도 로터 시스템의 주기응답을 결정하는데 적용하였다. 이러한 방법에 관려나하여, 뉴우튼법을 주어진 로터 매개변수에 대한 가능한 다수의 해를 결정하기 위해 적용하였다. 과도해석을 위해, 합성법을 적용하였는데, 이는 국부적 비선형성인 간극을 갖는 베어링을 통하여 선형 하우징 모형에 연계된 선형 로터 모형으로 구성되는 터보 펌프 시스템을 해석하는데 있어서 잇점이 있으며 매우 효율적이고 정확한 계산 절차를 구성할 수 있다.

2. 이론해석

2.1 모형화

2.1.1. 로터

과도 외력과 불균형 힘을 받는 로터의 적은 횡운동 $\{R\}$ 의 방정식은 다음과 같이 쓸 수가 있다.

$$[M]_R \{\ddot{R}\} - \dot{\phi} [G] \{\dot{R}\} + [K]_R \{R\} = \{F_I\}_R + \{F_E\}_R \quad (1)$$

(1)의 식에서 $\{R\}$ 은 변환과 회전의 변위와, 질량과 직경 관성 모멘트와 관계된 그런 변위를 포함하는 것만을 나타낸다. 로터의 회전속도는 $\dot{\phi}$ (Fig. 1)에 의해 나타나고 $[G]$ 은 취해진 판에 일치하는 회전운동 행렬이며, $\{F_I\}_R$ 은 하우징은 우력에 기인하는 로터에서의 우력을 나타내는 반면에 $\{F_E\}_R$ 은 불균형 힘을 포함하는

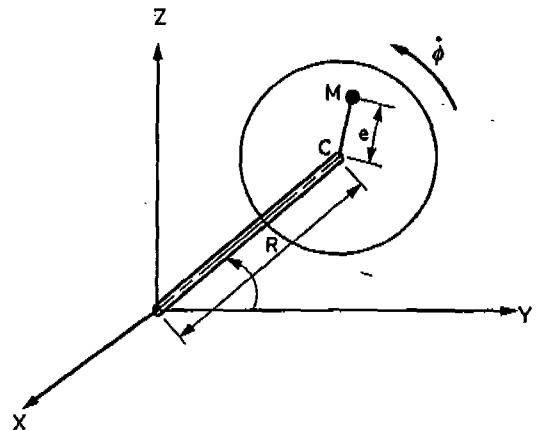


Fig. 1 The rotor coordinate system

내부 힘을 나타낸다.

모달 변환을 사용하고, 모달 감쇠 행렬 $[C]$ 을 더하면 다음식을 얻는다.

$$\{\ddot{q}\}_R + [D]_R \{\dot{q}\}_R + [\Lambda]_R = [\Psi]_R^T (\{F_I\}_R + \{F_E\}_R) \quad (2)$$

여기서

$$[D]_R = [C]_R - [\Psi]_R^T \phi [G]_R [\Psi]_R \quad (3)$$

$$[C]_R = [2\xi\omega_n]_R \quad (4)$$

2.1.2. 하우싱

하우싱의 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$[M]_H \{\ddot{H}\} + [K]_H \{H\} = \{F_I\}_H \quad (5)$$

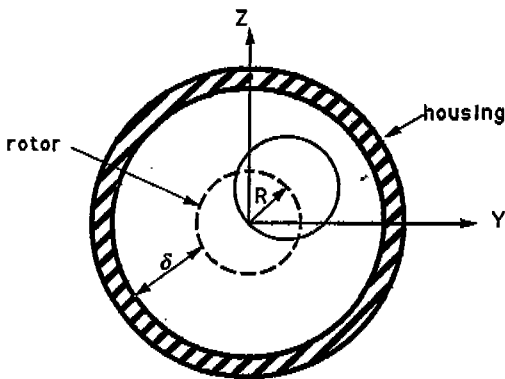
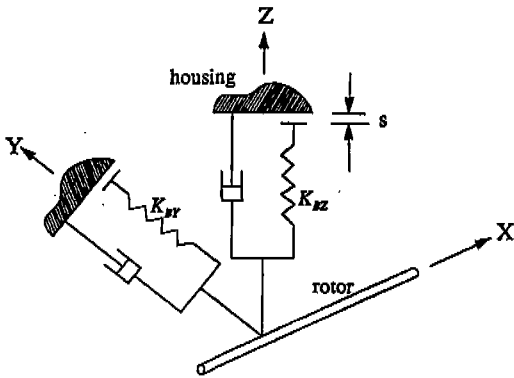


Fig. 2 Rotor and Housing displacements at bearing location

여기서 $\{H\}$ 은 Y,Z방향에 있는 각 node의 가로축과 회전 변위를 나타낸다.

하우싱의 모달 좌표의 항은 로터에 짝이 되지 않는 반면에 식 (5)은 후에 추가되는 모달 감쇠 행렬 형태를 취한다.

$$\{\ddot{q}\}_H + [D]_H \{\dot{q}\}_H + [\Lambda]_H \{q\}_H = [\Psi]_H^T (\{F_I\}_H + \{F_E\}_H) \quad (6)$$

여기서

$$[D]_H = [C]_H = [2\xi\omega_n]_H \quad (7)$$

$$[\Lambda]_H = [W_n^2]_H \quad (8)$$

2.1.3. 우력 (Coupling Forces)

로터와 하우싱 사이의 선형 우력으로 기인하는 힘은 seal, 임펠러, 터빈 등의 힘에서 기인하는 직접적이거나 교차되는 힘을 포함한다. 비선형 우력은 구름 베어링의 하우싱과 바깥쪽 레이스 사이의 간극에서 기인하는 것이다. Fig. 2는 각 gap이 혈겁게 지지된 베어링 모델을 나타낸다. 강성에 기인하는 하우싱에 작용하는 Y 방향으로의 베어링 힘은 Fig. 3에 나타나 있고 식은 다음과 같다.

$$R \geq \delta \text{ 일 때 } (F_B)_Y = K_{BY} (R - \delta) \frac{R_Y - H_Y}{R}$$

$$R \leq \delta \text{ 일 때 } (F_B)_Y = 0$$

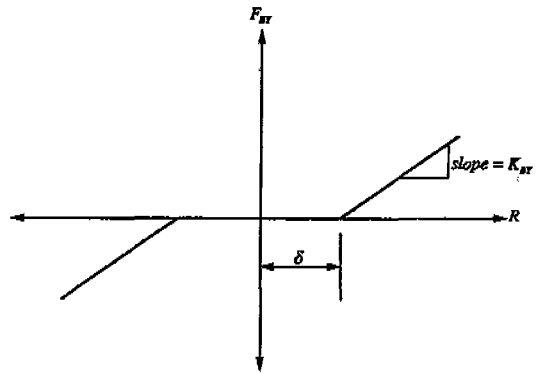


Fig. 3 Nonlinear bearing force, in Y-direction F_{BY} , due to K_{BY}

유사방정식은 Z방향으로 나타나고, Z방향에 있는 K_{BY} 은 베어링을 지지하는 강성이고 다음식으로 표현된다.

$$R = \sqrt{(R_Y - H_Y)^2 + (R_Z - H_Z)^2}$$

여기서

R_Y = 베어링에서 Y방향 로터의 물리적 변위

H_Y = 베어링에서 Y방향 하우싱의 물리적 변위

R_Z = 베어링에서 Z방향 로터의 물리적 변위

H_Z = 베어링에서 Z방향 하우싱의 물리적 변위

2.2. 과도 해석을 위한 방법

Noah 등에 의해서 제안된 하이브리드 방법은 연계된 로터-하우싱의 분석을 위하여 여기에 사용되어 졌다.⁽¹³⁾ 하우싱의 변위는 Duhamel 적분에 의해서 가장 잘 나타내 기고, 교대행렬 회전항의 존재로 부터 기인하는 로터에 대한 운동 방정식은 일차로 변환되며, 로터의 변위는 로터가 움직이는 동안 변환 행렬의 항으로 표기된다.

2.2.1 로터에 대한 변환행렬

로터의 운동방정식 (2)는 일차항에서 계산된다.

$$\{\dot{U}\}_R = [\alpha]_R \{U\}_R + \{P\}_R \quad (9)$$

$$[\alpha]_R = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[A]_R & -[D]_R \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서

$$\{P\}_R = \begin{Bmatrix} 0 \\ [\psi]_R^T (\{F_I\}_R + \{F_E\}_R) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

식 (9)의 해는 다음과 같이 쓸 수가 있다.

$$\{U(t)\}_R = e^{[\alpha]_R t} \{U_0\} + \int_0^t e^{[\alpha]_R(t-\tau)} \{P(\tau)\}_R d\tau \quad (12)$$

여기서

$$e^{[\alpha]_R t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\alpha]_R^k t^k}{k!} \text{는 변환행렬} \quad (13)$$

이고, $\{U_0\}$ 는 초기 일반화된 좌표이다.

2.2.2 하우싱에 대한 Duhamel 적분

하우싱 운동 방정식의 대칭형은 Duhamel 적분에 의

해 하우싱의 모달 변위로 나타낼 수 있고, 적분공식은 재래식의 수치적 적분스킴에 반대되는 완전해 (closed form expression)를 제공하는 잇점을 가지고 있다. 또한 이 표현은 직접적이고 대각행렬을 취급할 수가 있고 결국 빠른 계산 속도와 정확성을 얻을 수 있다.

방정식 (6)에 기초한 일반화된 하우싱 좌표는 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \{q(t)\}_H &= \left[e^{-\xi\omega_d t} \cos \omega_d' t \right] \{q(0)\}_H \\ &+ \left[\frac{1}{\omega_d} e^{-\xi\omega_d t} \sin \omega_d' t \right] \left(\{\dot{q}(0)\}_H + \xi\omega_n \{q(0)\}_H \right) \\ &+ \int_0^t \left[\frac{1}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) \right] \{P(\tau)\}_H d\tau \quad (14) \end{aligned}$$

여기서 $\{q(0)\}$, $\{\dot{q}(0)\}$ 은 초개해이고, ω_n , ω_d 은 하우싱의 비감쇠와 감쇠 고유진동수이며, ξ 은 하우싱의 감쇠비이고, $\{P(t)\}_H = [\psi]_H^T (\{F_I\}_H + \{F_E\}_H)$ 은 하우싱은 작용하는 일반화된 힘이다.

2.2.3 우력

하우싱에 작용하는 우력은 다음과 같이 주어지고

$$\{F_I\}_R = [K]_R (\{R\} - \{H\}) + [C]_R (\{\dot{R}\} - \{\dot{H}\}) \quad (15)$$

로터에 있어서의 우력은

$$\{F_I\}_R = -\{F_I\}_H$$

여기서 $[K]_R$ 와 $[C]_R$ 는 각각 우력강성과 감쇠행렬이고, 강성행렬은 각각의 반복에서 새로와진 이중선형 베어링 강성을 포함한다.

2.3 주기응답을 얻기위한 방법

deadband 간극을 갖는 구름 베어링을 통해서 가소성 하우싱과 상호작용을 하는 대표적인 다판 로터를 고려한다. 로터의 운동 방정식은 다음과 같은 행렬항의 방정식 (1)로부터 다시 계산된다.

$$[M]_R \{\ddot{R}\} + [C]_R \{\dot{R}\} + [K]_R \{R\} = \{F_C\}_R + \{F_I\}_R \quad (16)$$

여기서 $[C]_R$ 은 감쇠를 나타내고, 변위 vector $\{R\}$ 은 다음으로 정의할 수가 있으며,

$$\{R\} = \{R_{1X}, R_{1Y}, \dots, \beta_{MX}, \beta_{MY}\}$$

여기서, R_i 과 β_i 은 각각 변위와 회전을 나타내고, 첨자 M 은 총 node 수를 나타낸다.

특별히 간극을 갖는 베어링에 있어서 Y방향으로의 힘은 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$F_{bmy} = K_{bmy}(R_{ny} - H_{ny}) \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{(R_{ny} - H_{ny})^2 + (R_{nz} - H_{nz})^2}} \right) \quad (17)$$

여기서 m 과 n 은 각각 로터와 하우싱이 있는 베어링 node수를 나타내고, y 와 z 는 로터와 하우싱의 y 축과 z 축의 좌표를 나타낸다. 로터 변위는 하우싱 응답을 H 로 하는데 반하여 R 로 나타낸다. δ 기호는 베어링과 하우싱 사이의 deadband 간극의 크기를 나타낸다.

베어링 힘 F_{bmy} 또는 F_{bmz} 는 δ 가 방정식 (17)에 분모인 하우싱에 관계된 로터의 반지름 변위보다도 크다면 수렴할 것이고, 그렇지 않으면 베어링 힘은 방정식 (17)로 주어진 것 처럼 될 것이다. 비슷한 식은 비선형 베어링 힘이 z 방향에 있는 것으로 쓸 수 있으며 그것은 F_{bmz} 으로 나타낸다.

베어링 운동 방정식은 다음과 같은 행렬형태로 쓸 수가 있다.

$$[M]_H \{\ddot{H}\} + [C]_H \{\dot{H}\} + K\{H\} = \{F\}_H \quad (18)$$

여기서 $[C]_H$ 은 비례 등가 점성 감쇠 계수를 나타낸다.

시스템을 비선형 베어링 지지점에서 변위로 정리하기 위하여 운동 방정식을 변형할 필요가 있다. 이것은 부시스템 접근을 사용함에 따라 이루어 진다.

vector 좌표는 gap에서 장축(가로축)변위는 먼저 나타나도록 변형할 수가 있다.

$$\{R\} = \{R_{1y,2y,\dots,Ny}, R_{1z,2z,\dots,Nz}, R_{(N+1)y,(N+2)y,\dots,My}, R_{(N+1)z,(N+2)z,\dots,Mz}\}^T$$

여기서 $(1, 2, \dots, N)$ 은 비선형성에 관계된 베어링 node 수이고, 반면에 $(N+1, N+2, \dots, M)$ 은 기호로 바꾸는(assembling) 과정에서 제거되는 선형변위를 포하는 다른 node 수이다.

하우싱 좌표 vector는 비슷한 형태로 재정리할 수가 있고, 좌표 vector를 재정리 한후에 vector $[M]_R$, $[M]_H$, $[C]_R$, $[C]_H$, $[K]_R$ 과 $[K]_H$ 또 다른 힘 vector들은 그들의 vector성분에 따라 변형할 필요가 있다.

로터 시스템에 대한 종합적 증가 형태는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} [T]_R \{\Delta r\} - \{\Delta v\} &= \{Z\} \quad (19) \\ \{\Delta r\} &= \{\Delta A_{oy}^1, \Delta A_{oz}^1, \Delta A_{oy}^2, \Delta A_{oz}^2, \dots, \Delta A_{oy}^N, \Delta A_{oz}^N, \\ &\quad \Delta A_{1y}^1, \Delta A_{1z}^1, \Delta B_{1y}^1, \Delta B_{1z}^1, \dots, \Delta B_{1y}^N, \Delta B_{1z}^N, \\ &\quad \vdots \\ &\quad \Delta A_{ny}^1, \Delta A_{nz}^1, \Delta B_{ny}^1, \Delta B_{nz}^1, \dots, \Delta B_{ny}^N, \Delta B_{nz}^N\}^T \\ \{\Delta v\} &= \{\Delta C_{oy}^1, \Delta C_{oz}^1, \Delta C_{oy}^2, \Delta C_{oz}^2, \dots, \Delta C_{oy}^N, \Delta C_{oz}^N, \\ &\quad \Delta C_{1y}^1, \Delta C_{1z}^1, \Delta D_{1y}^1, \Delta D_{1z}^1, \dots, \Delta D_{1y}^N, \Delta D_{1z}^N, \\ &\quad \vdots \\ &\quad \Delta A_{ny}^1, \Delta A_{nz}^1, \Delta D_{ny}^1, \Delta D_{nz}^1, \dots, \Delta D_{ny}^N, \Delta D_{nz}^N\}^T \\ [T]_R &= \begin{bmatrix} [\bar{K}]_R & \dots & 0 \\ 0 & [\bar{S}]_R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & [\bar{S}_n]_R \end{bmatrix} \\ \{Z\} &= \{ \{C_m^o\} - [\bar{K}]_R \{A_m^o\} - \{W_{m1}\} - \{\bar{U}_1\} - [\bar{S}]_R \{C_{m1}\} \\ &\quad \{W_{m2}\} - \{\bar{U}_2\} - [\bar{S}]_R \{C_{m2}\}, \dots, \{W_{mn}\} \\ &\quad - \{\bar{U}_n\} - [\bar{S}_n]_R \{C_{mn}\} \}^T \end{aligned}$$

$(2N \times 2N)$ 과 $[\bar{S}]_R$ 인 $[\bar{K}]_R$ 은 $(i = 1, 2, \dots, n)$ 일때 $(4N \times 4N)$ 이다.

방정식 (19)으로 부터 $\{\Delta v\}$ 은 $\{\Delta r\}$ 의 편 도함수로 쓰여지고 편 도함수행렬들은 Jacobian 행렬을 생성하며, 우리는 결국 다음과 같은 방정식을 얻을 수가 있다.

$$\{\Delta v\} = [P]\{r\} \quad (20)$$

여기서 $[P]$ 은 다음과 같다.

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{oy}^1}{\partial A_{oy}^1} - \frac{\partial C_{oy}^1}{\partial A_{oz}^1} - \frac{\partial C_{oy}^1}{\partial A_{oy}^2} & \dots & \frac{\partial C_{oy}^1}{\partial B_{nz}^N} \\ \frac{\partial C_{oz}^1}{\partial A_{oy}^1} - \frac{\partial C_{oz}^1}{\partial A_{oz}^1} - \frac{\partial C_{oz}^1}{\partial A_{oy}^2} & \dots & \frac{\partial C_{oz}^1}{\partial B_{nz}^N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial C_{nz}^N}{\partial A_{nz}^1} - \frac{\partial C_{nz}^N}{\partial A_{oz}^1} - \frac{\partial C_{nz}^N}{\partial A_{oy}^2} & \dots & \frac{\partial D_{nz}^N}{\partial B_{nz}^N} \end{bmatrix}$$

여기서 윗첨자는 자유도 수를 나타내고 아랫첨자는 y 또는 z 방향으로의 제한된 조화항을 나타낸다.

여기서 [P]행렬은 역이산 FFT 방법과 이산의 수치 미분을 사용하므로서 결정할 수가 있다. 그 행렬은 수렴할 때까지 각 반복과정에서 새롭게 되어야만 한다. 가소성 하우싱에 대한 정상상태 해를 구하는 절차는 위에서 구성된 것과 같이 로터 시스템과 동일하다.

반복절차를 사용한 로터응답을 계산한 후에 로터와 하우싱 사이의 우력은 자동적으로 계산된다. 이러한 비선형 우력들은 절대 하우싱 변위와 비선형 우력을 새롭게 하기 위하여 하우싱 시스템에 적용된다. 다른 반복 과정은 새로와진 로터응답을 다시 한번 얻는 데 사용하고, 로터와 하우싱 응답까지의 반복은 동일한 정상상태 수렴해를 갖는다.

3. 수치해석

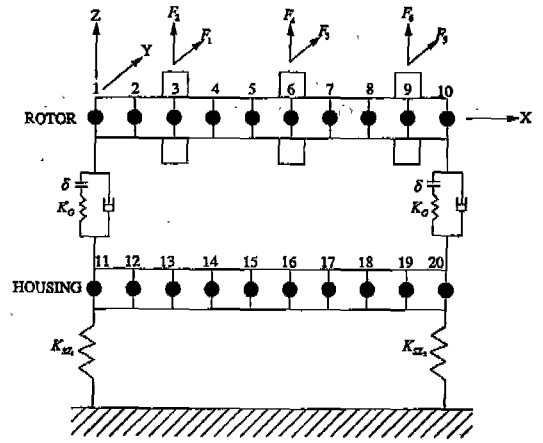
3.1 과도응답

합성방법이 Davis등에 의해서 만들어진 로터모델⁽⁵⁾에 응용되었고, 이 모델은 SSME 터보펌프의 간략화된 일반 모델을 나타내도록 제한 되었다. 현재의 일반모델 (Fig. 4)의 매개변수와 계수는 Table 1과 2에 주어졌고, 불균형 힘은 Fig. 4에 주어졌다.

베어링 위치에서 일반 로터-하우싱 모델의 응답은 Fig. 5에 나타난 가상의 시동-정지에서 결정된다. 시도아의 경우에 0초에서 0.01초 까지 증분 1×10^{-5} 을 사용하고 4차 Runge-Kutta와 현재의 합성 방법 (Fig. 6)을 비교하기 위하여 컴퓨터 CPU 시간을 나타냈다. 혼성 합성 방법은 4차 Runge-Kutta 방법의 빠르기의 거의 두배가 됨을 알 수가 있다. 게다가 Runge-Kutta 방법에서 요구하는 것보다도 더 큰 시간증분을 사용한 합성 방법을 사용하여도 원하는 정확성을 얻을 수가 있다.

비선형인 경우에 대해서 베어링1에서 반경 방향힘은 시동하는 동안에는 $\phi = 2600 \text{ rad/sec}$ (24830 rpm)에 가까운 피크를 갖고, 느린 정지 동안에는 $\phi = 3560 \text{ rad/sec}$ (34000 rpm)에서 더 큰 피크를 갖고, 베어링 간극이 0인 선형 시스템은 비선형 시스템 보다도 높은 베어링 하중 피크를 나타냈으며, 선형인 경우에 하중 피크는 기대 했던 것 처럼 임계속도에서 발생하였다.

3.2 주기 응답



Rotor : Shaft diameter : OD = 7.62 cm, ID = 0.0 cm

Material : steel, $E = 2.0685 \times 10^8 \text{ kPa}$
 Joint length = 7.62 cm
 Rotor length = 68.58 cm

Housing : Housing/Rotor weight ratio = 6/1

$(EI)_y = 3.3037 \times 10^6 \text{ kg}_f \cdot \text{cm}^2$

$(EI)_z = 6.6474 \times 10^6 \text{ kg}_f \cdot \text{cm}^2$

$F_1(t) = m_1 e^{\lambda^2} \cos \phi t$ $K_{z1} = 4.6114 \times 10^6 \text{ kg}_f / \text{cm}$

$F_2(t) = m_2 e^{\lambda^2} \sin \phi t$ $K_{z2} = 5.7642 \times 10^6 \text{ kg}_f / \text{cm}$

$F_3(t) = m_3 e^{\lambda^2} \cos \phi t$ $K_{z3} = 5.7642 \times 10^6 \text{ kg}_f / \text{cm}$

$F_4(t) = m_4 e^{\lambda^2} \sin \phi t$ $K_{z4} = 1.7293 \times 10^6 \text{ kg}_f / \text{cm}$

$F_5(t) = m_5 e^{\lambda^2} \cos \phi t$ $K_{z5} = K_{z6} = 5.7642 \times 10^6 \text{ kg}_f / \text{cm}$

$F_6(t) = m_6 e^{\lambda^2} \sin \phi t$ $\delta = 1.72 \times 10^{-4} \text{ cm}$

Fig. 4 The generic model

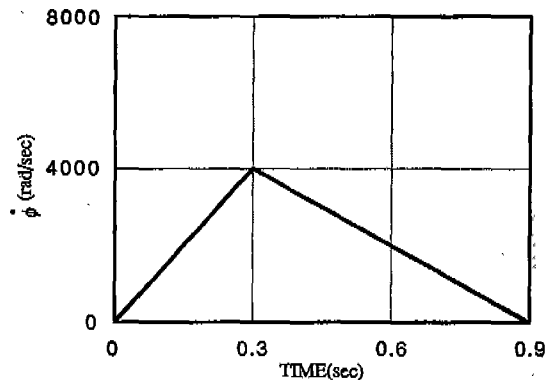


Fig. 5 Running speed of rotor

조화 균형/FFT 방법은 0-40,000rpm의 범위에서 일반적인 모델 (Fig. 4)의 강제 비선형 주기 응답 생성에 사용된다. Fig. 7은 약 1900 rad/sec과 4300rad/

Table 1 Parameter of the Generic Model

	Mass (kg·sec ² /cm)	imbalance (cm)	Moment of inertia(kg·cm·sec ²)	
			Polar	Diametrical
Disk 1	0.0229	0.0584	0.0050	0.0028
Disk 2	0.0448	0.0584	0.0345	0.0180
Disk 3	0.0591	0.0584	0.1797	0.0907

Table 2 Coefficients of the Generic Model

	K _{YY} =K _{ZZ} (kg/cm)	K _{XY} =K _{YX} (kg/cm)	C _{YY} =C _{ZZ} (kg·sec ² /cm)	Side Force(cm)	
				Y-direction	Z-direction
Disk 1	1.1528×10 ⁵	1.729×10 ⁴	72629	2.2467×10 ⁶	-1.0467×10 ⁵
Disk 2	-1.0260×10 ⁵	-4.6114×10 ⁴	1.1528	2.3225×10 ⁵	3.3047×10 ⁵
Disk 3	1.0030×10 ⁵	2.1904×10 ⁴	2.6516	1.0798×10 ⁶	0

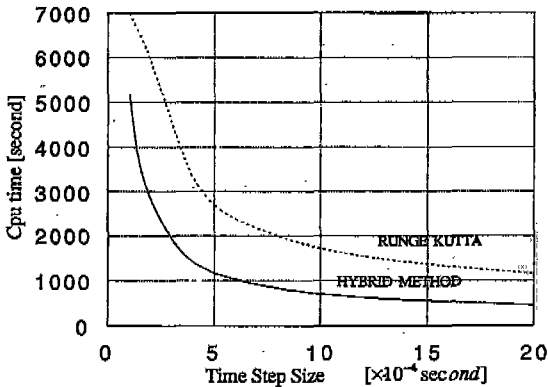


Fig. 6 CPU plot of hybrid method and Runge Kutta method

sec에서 발생하는 두개의 임계속도에서 기본적인 동기 응답을 보여주고, 그림은 왼쪽 베어링에서 하우싱에 관한 로터의 반경방향 변위를 보여준다. 임계속도 그래프는 Fig. 8에서 베어링 간극이 없는 일반적인 모형에 대하여 나타냈다. 자이로스코픽항이 포함되는데, 이들은 전방임계속도를 증가시키고 후방임계속도를 감소시키는 것으로 나타난다. 그림은 조화균형/FFT 방법을 사용해서 얻어진 선형의 경우와 아주 똑같이 되도록 하는 첫번째 두 개의 임계속도를 나타낸다. 수치적 계산이 부조화 응답의 존재를 조사하기 위하여 행해졌다. 1/n 차 부조화응답의 축 중심 궤도는 조화 및 부조화 진폭들에 의해 결정된 반경을 갖는 원들에 의해 경계지어진 영역내에 존재한다. 그 궤도는 전방 선회에 대한 (n-1)점과 후방 선회에 대한 (n+1)점에서 제한된 원과

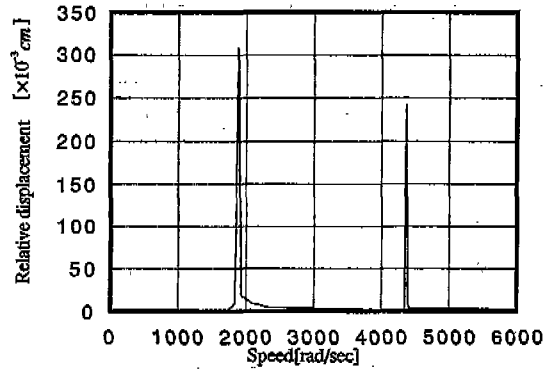


Fig. 7 Critical speed of linear generic model at bearing 1; eccentricity = 0.5 mils, no damping, no gyroscopic effects

만난다.⁽¹⁶⁾ 축중심 궤도는 부조화 응답을 확인하며 축협, gap 크기, 임계속도 근처에서 편심등에 대한 다양한 값을 갖는 1/n차 부조화 응답과 조화응답 사이의 진폭을 비교하기 위하여 연구 되었고, 부조화 응답을 허용하도록 감쇠는 모든 경우에 대하여 작은 값을 취하며, 그 결과가 Fig. 9, 10, 11 및 12에 보여진다. 이 그림들에 의하면 모든 부조화 응답들은 두번째 임계속도 주위에서 일어나며 모두 1/2차 임을 보여주고 있다. Fig. 9에서 조화와 부조화 진폭은 작은 축협일 경우에는 거의 같은 크기이고, Fig. 10에서 조화응답은 베어링 간극 크기를 줄일때 비례적으로 되며, 반대로 1/2차 부조화 응답은 크기 보다도 더 크게 된다. gap의 크기는 축협에 관계없이 HPOTP모델에 1/2차 부조화의 존재에 큰 영향을 미치고, Fig. 12의 축협은 Fig. 9의 축협 보다 10배 증가되어 있으며, 그 경우에 결과는 조화 응답보다 약간 증가한 부조화 응답의 진폭을 보여주고 있으므로, 이 결과는 축협도 임의의 부조화 응답이 일어날 것인가 아닌가에 대한 얼마간의 영향을 주고 있음을 나타내고 있다. 축협과 gap크기의 효과를 비교하는데 보다 자세한 조사가 연구되고 그 결과가 Fig. 13에 보여지고 있으며, 그림은 축협이 1/2차 부조화 응답의 존재에 상당한 영향을 주고 있다는 것을 보여주고 있다. 약 90.78kgf 축협과 0.5~0.7mils의 gap 크기는 1/2차 부조화의 큰 진폭을 유도 시키는 영역이고, 181.56kgf보다 큰 지나친 축협은 부조화응답의 감소 원인이 될 것이다. 일정한 gap 크기와 편심을 가지고 있다면 더 큰 부조화 응답이 일어날 수도 있는 축협 영

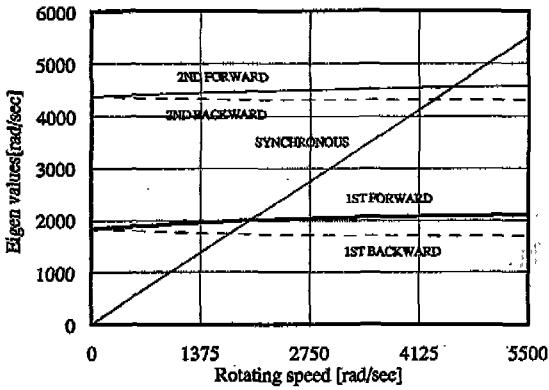


Fig. 8 Critical speed map for the linear generic model; no damping

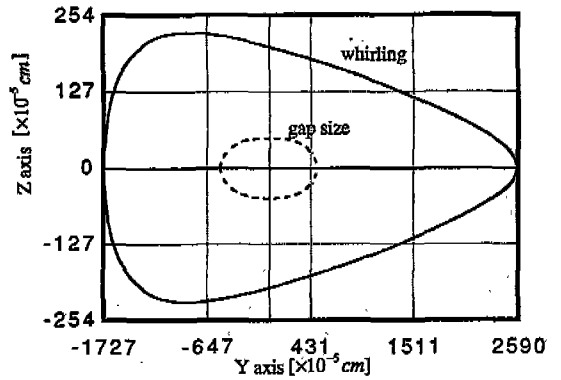


Fig. 10 Trajectory for subharmonic motion of order 1/2; gap = 0.2mils, eccentricity = 0.5mils, side force = 4.539kg_f, speed = 4210rad/sec

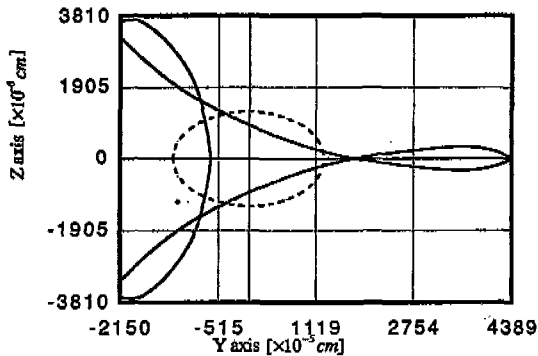


Fig. 9 Trajectory for subharmonic motion of order 1/2; gap = 0.5mils, eccentricity = 0.5mils, side force = 4.539kg_f, speed = 4210rad/sec

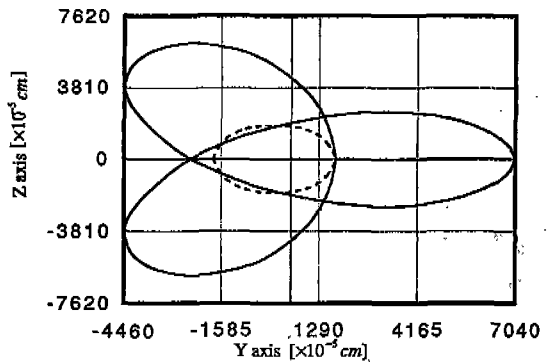


Fig. 11 Trajectory for subharmonic motion of order 1/2; gap = 0.7mils, eccentricity = 0.5mils, side force = 4.539kg_f, speed = 4210rad/sec.

역의 특별한 범위가 있으며, 이것은 Choi와 Noah에 의해서 제시된 결과와 일치한다.⁽⁴⁾

축힘의 변화를 가진 1/2차 부조화 응답의 존재에 대한 편심의 영향은 Fig. 14에서 보여주고, 그림은 편심이 오른쪽으로 최대 부조화 응답의 위치를 이동시키는 효과를 갖는 것을 보여주며, 최고 1/2차 부조화 응답 발생에서 축힘의 범위는 각각의 편심에 대해서 다르다. 또한 그림은 큰 편심량이 크면 클수록 부조화 응답은 작아지게 되는 것을 보여주고 있다.

이것은 다음의 사실에 의해 설 설명되어 지는데, 더 큰 편심에서 기인하는 더 큰 응답 진폭이 더 접촉 하도록 유도 되므로 이것은 시스템을 상대적으로 덜 비선형으로 되게 하고 결과적으로 이것은 더 낮은 부조화 진

폭으로 된다. 그러므로 어떤 제안된 디자인에서 gap의 크기와 축힘을 줄이거나 위험한 부조화 응답을 제거하기 위한 유지 기준(표준)을 주렁이는 것일 필요하게 될 것이다.

4. 결 론

본 연구에서 적용된 하이브리드 합성 접근법을 국부적 비선형성을 통하여 연계된 선형계의 과도 응답을 결정하기 위한 효과적인 적분 공식화를 제공한다. 상당히 효과적이라고 증명한 현재의 방법에서 대표적 응용은 국부적 비선형화를 만들고 베어링 간극이 존재하는 SSME 에서의 HPOTP의 일반적 모델의 과도응답을

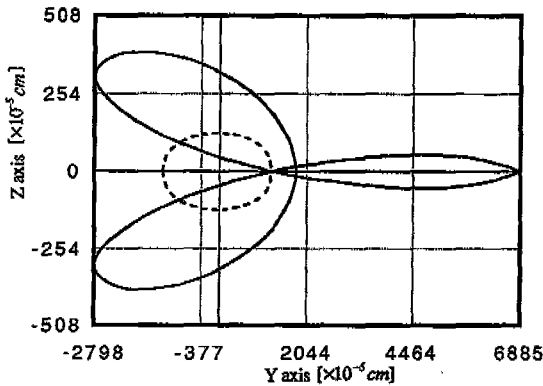


Fig. 12 Trajectory for subharmonic motion of order 1/2; gap = 0.5mils, eccentricity = 0.5mils, side force = 45.39kgf, speed = 4210rad/sec

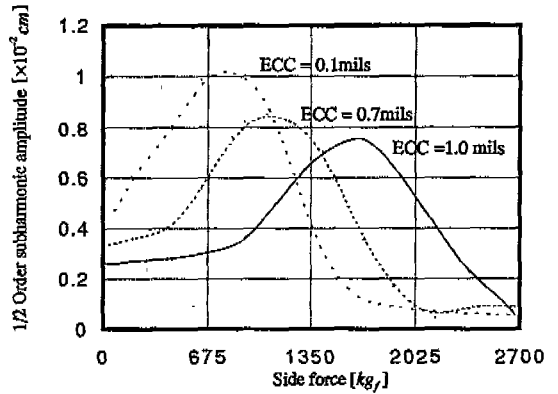


Fig. 14 Mass eccentricity effect on subharmonic motion of order 1/2; gap size = 0.5 mils, speed = 4210 rad/sec

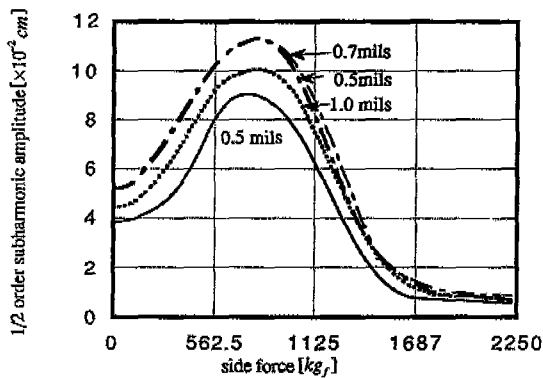


Fig. 13 Gap size effect on subharmonic motion of order 1/2; eccentricity = 0.5mils, speed = 4210 rad/sec

결정하는 것이다. 계산시간에서의 실질적 단축은 직접적으로 수치적 적분기술에 비교함으로써 알 수 있다.

변화 행렬의 사용으로 일반적인 속도계수 행렬을 갖는 다른 비보존계나 자이로 스코프 하중의 교대행렬을 포함하는 로터를 나타낸다. Duhamel 적분은 HPOTP의 하우싱이나 다른 비회전 비례 감쇄 구조물과 같은 고전적 모우드를 갖는 다른 계를 매우 효과적으로 나타낼 수 있다. 그 합성 공식은 다양한 선형 부시스템속에서 비선형이나 선형의 우력 매개변수로 쉽게 변환할 수 있는 잇점이 있다.

그 방법의 가능한 개선은 이 연구에서 사용되어진 반복절차의 최적화와 대체를 통하여 이루어 질수가 있다.

여기서 보여주는 결과에 의하면 베어링 간극의 존재가 HPOTP에서 심각하게 로터 응답을 변화시킬 수가 있다. 간단한 시스템에 대한 Ishida 등이 발표한 것에 의하면 비선형성의 존재에서 임계속도를 통과하는 것은 매우 어렵다.⁹⁾ 비선형성이 큰 다자유도 로터계의 정상상태 강제 진동을 결정하기 위한 효과적인 수치적 조화 균형 알고리즘을 개발하였다. 그 결과에 의하면 어떤 직접적 수치적 적분 방법보다 계산상으로 우수한 방법임을 보여주고, 게다가 다자유도 로터 시스템의 복잡한 비선형 정상상태 주기운동은 현재의 방법을 사용해서 쉽게 연구될 수 있다.

위험한 부조화 공명은 베어링 간극, 질량 편심, 유동 축힘(side force) 등이 있는 HPOTP에 대하여 발생할 수 있고, 위의 3개의 매개변수의 범위는 부조화 발생에 영향을 미칠 때 서로 관계 되어 있다. 특히 베어링에서 축진폭에 대한 베어링 간극 크기, 베어링에서의 국부적 강성과 축힘은 로터 시스템에서 비선형성의 정도에 큰 영향을 미치므로 응답과 안정성을 결정해야 한다.

REFERENCES

1. Beatty, R.F., "Differentiating Rotor Response Due to Radial Rubbing," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.107, pp.151-160, 1985.
2. Bently, D., "Forced Subrotative Speed

- Dynamic Action of Rotating Machinery," ASME paper No. 74-ET-16, Petroleum Mechanical Engineering Conference, Dallas, Texas, 1979.
3. Chils, D.W. and Moyer, D.S., "Vibration Characteristics of the HPOTP(High Pressure Oxygen Turbopump) of the SSME(Space Shuttle Main Engine), ASME Paper No. 84-GT-31, International Gas Turbine Conference, Amsterdam, Netherlands, June, 1984.
 4. Choi, Y.S., and Noah, S.T., "Nonlinear Steady-State Response of a Rotor Support System, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.109,11. 255-261, 1987."
 5. Davis, L.B., Wolfe, E.A., Beatty, R.F., "Housing Flexibility Effects on Rotor Stability," MSFC Advanced High Pressure O₂/H₂ Technology Conf. Proceedings, G. Marshall Space Flight Center, Huntsville, Alabama, 1984.
 6. Day, W.B., "Asymptotic Expansions in Nonlinear Rotor-dynamics," Quarterly of Appl.Math., Vol. XLIV, No. 4, PP. 779-792, 1987.
 7. Ehrich, F.f., "Subharmonic Vibrations of Rotors in Bearing Clearance," ASME paper No. 66-MD-1, Design Engineering Conference and Show, Chicago, ill., May 9-12, 1966.
 8. Glease, J.R. and Bukley, P., "Effect of Bearing DEadbands on Bearing Loads and Rotor Stability," MSFC Advanced High Pressure O₂/H₂ Technology Conference Proceedings, G. Marshall Space Flight Center; Hunsville, Alabama, June 27-29, 1984.
 9. Ishida, Y., Ikeda, T., "Transient Vibration of a Rotating Shaft with Nonlinear Spring Characteristics During Acceleration through a Major Critical Speed," JSMEInt. J., Vol.30, No.261, pp.559-564, 1987.
 10. Muszynska, A., "Partial Lateral Rotor to Stator Rubs," Proceedings of the I. Mech E. 3rd, Intl. conf. on vibrations in Rotating Machinery, Univ. of York. 11-13 Sept., pp.327-335, 1984.
 11. Nataraj, C., and Nelson, H.D., "Periodic Solutions in Rotor Dynamic Systems with Nonlinear Supprts: A General Support," ASME Design Conference, Oct, 1987.
 12. Neilson, R.D., and Barr, A.D.S., "Reaponse of Two Elastically Supported Rigid Rotors Sharing a Common Discontinuously Nonlinear Support," Proceedings of the Inbstitution of Mechanical Engineers, Heriot-Watt University, 13-15 Sept., pp.589-598, 1988.
 13. Noah, S.T., "Hybrid Methods for Rotordynamic Analysis of Nonlinear Rotor/Housing System." MSFC Advanced High Pressure O₂/H₂ Technology Conf. Prodeedings, G.Marshall Space Flight Center, Huntsville, Alabama, 1986.
 14. Shaw, S. and Holmes, P.J., "A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator," J. sound Vib., Vol.90, pp.129-155, 1983.
 15. Tondle, A., Some Problems of Rotor Dynamics, Chapman and Hall, Londo, 1965.
 16. Tondle, A., "Notes on the Identification of Subharmonic Resonances of Rotors," Journal of Sound and Vibration, Vol.31, No.1, pp.119-127.
 17. Zalik, R.A., "The Jeffcott Equations in Nonlinear Rotyrdynamics," NASA/ASEE Faculty Fellowship Report, NASA Marshall Huntsville, Alabama, 1987.