

# 평판구조의 추계론적 유한요소해석

## Stochastic FE Analysis of Plate Structure

최 창 근\*

Choi, Chang-Koon

노 혁 천\*\*

Noh, Hyuk-Chun

.....

### 요 약

본 연구는 가중적분법을 이용한 추계론적 유한요소해석에 관한 것으로 구조계 내에 존재하는 재료상수와 기하학적 상수의 임의성을 해석에 고려하여 추계론적 해석을 수행하였으며 대상 구조로는 평판구조를 택하였다.

재료와 기하학적 해석인자의 임의성을 포함한 요소강성행렬의 유도를 위해서 임의장을 가정하였으며 임의장의 평균은 0이고 표준편차 값은 0.1을 사용하였다. 이러한 임의장의 특성은 auto-correlation 함수에 의해서 표현되었으며 이 함수는 반응변화도를 얻는 과정에 사용되었다.

본 연구에서는 평판의 두께에 대한 임의성을 고려하기 위해서 새로운 auto-correlation 함수가 유도되었다. 유도된 새로운 auto-correlation 함수는 재료탄성계수의 임의장 특성을 나타내는 기존의 함수와 임의장 분산계수의 함수로 나타났다.

수치해석결과는 몬테카를로 시뮬레이션 결과와 비교되었으며 상호 잘 일치하는 좋은 결과를 나타내었고 이들 결과는 제시된 이론적인 수렴치와도 잘 일치하였다. 평판두께에 대한 해석의 경우 역시 Lawrence의 결과는 물론 몬테카를로 시뮬레이션과 제시된 이론치와도 잘 일치하였다.

### Abstract

In this paper the stochastic FE analysis considering the material and geometrical property of the plate structure is performed by the weighted integral method. To consider the stochasticity of the material and geometrical property, the stochastic field is assumed respectively. The mean value of the stochastic field is 0 and the value of variance is assumed as 0.1. The characteristics of the assumed stochastic field is represented by auto-correlation function. This auto-correlation function is used in evaluating the response variability of the plate structure.

In this study a new auto-correlation function is derived to concern the uncertainty of the plate thickness. The newly derived auto-correlation function is a function of auto-correlation function and coefficient of variation of the assumed stochastic field.

The two results, obtained by proposed Weighted Integral method and Monte Carlo Simulation method, are coincided with each other and these results are almost equal to the theoretical result that is derived in this study. In the case of considering the variability of plate thickness, the obtained result is well coincide with those of Lawrence and Monte Carlo simulation.

.....

\* 한국과학기술원 토목공학과 교수  
 \*\* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

이 논문에 대한 토론을 1995년 9월 30일까지 본 학회에 보내 주시면 1996년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

### 1.1 추계론적 유한요소해석

일반적으로 공학에 있어서의 해석은 해석 대상 구조계가 정확하게 결정지어진 인수들의 함수라는 가정을 전제로 이루어지게 된다. 유한요소해석의 경우 요소 강성행렬을 생성할 때 개입되는 탄성계수나 포아송비, 평판의 경우 두께 등을 일정한 값으로 가정하고 해석을 수행한다. 그러나 그러한 이상적인 경우는 실제적으로 존재하지 않는다고 보아도 좋을 것이다. 즉, 우리는 구조계 내의 해석인자에 공간적(spatial) 또는 시간적(temporal)인 어떤 종류의 임의성(randomness) 또는 불확실성(uncertainty)이 존재한다는 가정을 필요로 하게 된다. 전통적으로 공학자들은 구조물의 설계에 있어서 안전율을 임의로 증가시키는 방법으로 구조계의 불확실성을 고려하여 왔다. 그러나 이러한 접근은 통계적인 이론에 근거하고 있지 않고 단지 해석자의 경험에 의존할 뿐이므로 이론적으로 타당성이 결여되어 있다고 볼 수 있을 것이다[12].

구조계의 내부에는 재료탄성계수(E)와 포아송비( $\nu$ ) 부재의 단면(A)이나 평판의 경우에는 평판의 두께(t) 그리고 구조에 작용하는 하중 등 많은 종류의 불확실성들이 존재한다. 지금까지의 연구는 주로 재료탄성계수의 공간적인 임의성에 의한 구조계 반응의 변화도(response variability)를 연구하는데 초점이 맞추어져 왔으며, 최근의 연구는 주로 컴퓨터를 이용한 추계론적 유한요소해석에 맞추어지고 있다[11].

### 1.2 연구동향

추계론적 해석은 통계학적인 방법과 수치해석적 방법의 두가지로 나누어질 수 있다. 통계학적 방법에는 정확해에 근사하다고 보고 있는 몬테카를로 시뮬레이션(M.C.S.) 방법이 있으며, 강성행렬의 역변환 방법을 개선한 Yamazaki와 Shinozuka의 Neumann전개 방법이 있다[4].

몬테카를로 시뮬레이션과 관련하여 임의장의 생성에 대한 논문들도 많이 발표되었다. 이들 논문들은 주로 생성되는 임의장이 주어진 auto-cor-

relation 함수에 잘 부합되도록 하는데에 그 초점이 맞추어졌다[8, 11, 13].

비통계학적인 방법으로는 Perturbation방법, Local average에 의한 해석법 그리고 본 연구의 대상인 가중적분법 등이 있다. Lawrence(1987)는 추계론적 해석 정식화에 Galerkin 접근 방법을 사용하는 방법을 제시하였다[2]. 그는 연구를 통하여 평판 두께의 임의성에 대한 해석도 수행하였다.

가중적분법(weighted integral method)은 Takada와 Shinozuka(1989) 및 Deodatis(1990)에 의해서 제안되었다. 이 방법에서는 확률변수들 요소내의 임의장에 대한 적분으로 구한다.

본 연구는 평판구조의 추계론적 유한요소해석에 가중적분법을 적용하고 재료상수의 임의성뿐만 아니라 구조의 기하학적인 특성중의 하나인 평판두께의 임의성에 대한 추계론적 유한요소해석을 수행하는 것이다.

## 2. 본 론

추계론적 유한요소해석(stochastic finite element analysis)을 통해서 우리는 임의장(random field) 또는 추계론적 장(stochastic field)으로 가정된 구조물의 해석인자를 해석에 고려하여 구조계 반응의 평균치와 분산치를 얻게 된다.

추계론적 해석에서 중요한 것은 구조계의 반응 변화도(response variability)의 하나인 공분산(covariance)인데 이것은 우리가 가정한 임의장의 불확실성이 구조계반응의 변화도에 어느 정도의 영향을 미치는가 하는 것을 나타내는 값이 된다.

구조계 반응의 변화도 정도를 나타내는 척도인 분산계수(C.O.V.)를 나타내 보면 다음과 같다.

$$\alpha_x = \left[ \frac{\text{Var}(x)}{E[x]^2} \right]^{1/2} = \frac{\sigma_x}{|x_0|} \quad (1)$$

### 2.1 가중적분법 (Weighted Integral Method)

이 방법은 임의장을 표현하는 임의장함수  $f(x)$ 와 알려진 결정론적 함수  $t(x)$ 의 곱에 대한 주어진 영역에서의 적분을 이용한다. 이는 하나의 확

를 변수  $X$ 가 되며, 식으로 표현하면 다음과 같다 [11, 14].

$$X = \int_{\Omega^e} f(x) t(x) d\Omega^e \quad (x \in \Omega^e, \Omega^e \subset \Omega) \quad (2)$$

### 2.2 Auto-correlation 함수

Auto-correlation 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$E[f(x_1) f(x_2)] = R_{ff}(\xi), \quad \xi = x_2 - x_1 \quad (3)$$

위의 식에서  $\xi$ 는 두점  $x_1, x_2$ 의 상대거리를 나타내는 상대거리 벡터이다. 위에서도 보듯이 auto-correlation 함수는 두점 사이의 상대거리 벡터만의 함수로 나타나는 특성을 가지고 있다.

### 2.3 Mindlin 평판 이론

본 연구에서는 Mindlin 평판이론을 기본으로 한 Heterosis 평판요소[1]를 사용하고자 한다. Mindlin 평판이론에서의 변위-변형률의 관계와 응력-변형률 행렬은 각각 식 (4), (5), (6)과 같다[7].

$$\begin{aligned} u &= -z\Psi_x & v &= -z\Psi_y & w &= w(x, y) \\ \epsilon_x &= -z\Psi_{x,x} & \epsilon_y &= -z\Psi_{y,y} \\ \gamma_{xy} &= -z(\Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}) & \gamma_{yz} &= w_{,y} - \Psi_y & \gamma_{xz} &= w_{,x} - \Psi_x \end{aligned} \quad (4)$$

$$D_K = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)D/2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기에서,  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{x,x} \\ \Psi_{y,y} \\ \Psi_{x,y} + \Psi_{y,x} \\ \Psi_y - w_{,y} \\ \Psi_x - w_{,x} \end{Bmatrix} = -[D_M] \{x\} \quad (6)$$

추계론적 유한요소해석시에는 위의 식에서 재

료탄성계수를  $E=E(x)$ 로, 두께를  $t=t(x)$ 로 가정하고 해석을 수행하게 된다. 여기에서,  $x$ 는 구조계가 존재하는 해석 영역에서의 위치벡터를 나타낸다.

강성행렬은 다음과 같이 쓰일 수 있다.

$$K^e = \int_{\Omega^e} B^T D_M B d\Omega^e \quad (7)$$

위의 강성행렬 식에서 변위-변형률 행렬은 아래와 같이 표현된다.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & \dots & 0 & N_{Node,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & 0 & N_{Node,y} \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & 0 & N_{Node,y} & N_{Node,x} \\ -N_{1,y} & 0 & N_1 & \dots & -N_{Node,y} & 0 & N_{Node} \\ -N_{1,x} & N_1 & 0 & \dots & -N_{Node,x} & N_{Node} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 2.4 추계론적 유한요소해석을 위한 정식화

본 연구의 첫번째 대상은 재료 탄성계수의 공간적 임의성을 고려한 추계론적 유한요소해석에 대한 것으로 다음과 같은 형태의 재료 탄성계수를 가정하기로 한다[3,4,5,6,10,11].

$$E(x) = E_0[1+f(x)] \quad (9)$$

위의 가정식에서  $E_0$ 는 재료 탄성계수의 평균치이고,  $f(x)$ 는 재료탄성계수의 공간적인 임의성을 나타내는 임의장 함수로 평균치는 0이다( $E[f(x)] = 0$ ). 임의장 함수  $f(x)$ 는 균질(homogeneous)이며, Gauss 분포를 가지는 함수로 가정한다.

강성행렬을 표현하는 식에는 응력-변형률 행렬인  $D_e$ 행렬이 개입되어 있다.  $D_e$ 행렬에 위의 식을 대입할 경우 강성행렬은 아래의 식과 같은 형태로 변형이 가능하다.

$$\begin{aligned} K^e &= \int_{\Omega^e} B^T D_e B d\Omega^e, \quad B = B_b + B_s, \\ D_e &= D_M = D_0(1+f(x)) \\ &= \int_{\Omega^e} B_b^T D_e^b B_b d\Omega^e + \int_{\Omega^e} B_s^T D_e^s B_s d\Omega^e \\ &= K_b^e + K_s^e \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서,  $K_b^e$ 와  $K_s^e$ 는 각각 휨과 전단에 대한 강성 행렬을 나타내는 것으로 아래의 두 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} K_b^e &= \int_{\Omega^e} B_b^T D_b^e B_b d\Omega^e \\ &= \int_{\Omega^e} B_b^T D_b^e B_b d\Omega^e + \int_{\Omega^e} f(x) B_b^T D_b^e B_b d\Omega^e \\ &= K_{b0}^e + \Delta K_b^e \end{aligned} \quad (11)$$

$$K_s^e = K_{s0}^e + \Delta K_s^e$$

그러므로 강성행렬은 다음과 같이 임의장의 평균치를 이용하여 얻어진  $K_0^e$ 와 임의장 함수를 포함한 부분인  $\Delta K^e$ 의 두 부분으로 분해될 수 있다.

$$\begin{aligned} K^e &= K_0^e + \Delta K^e \\ K_0^e &= K_{b0}^e + K_{s0}^e \\ \Delta K^e &= \Delta K_b^e + \Delta K_s^e \end{aligned} \quad (12)$$

여기에서,  $\Delta K^e$ 에 포함된 B행렬은 상수만을 포함한 행렬인  $B_i$ 와 독립인 다항식  $P_i$ 의 곱의 합으로 쓰여질 수 있다.

$$\begin{aligned} B_b &= B_{b1}P_{b1} + B_{b2}P_{b2} + \dots + B_{bN_b}P_{bN_b} \\ B_s &= B_{s1}P_{s1} + B_{s2}P_{s2} + \dots + B_{sN_s}P_{sN_s} \\ N_b &= B_b \text{에서 독립인 다항식의 수} \\ N_s &= B_s \text{에서 독립인 다항식의 수} \end{aligned} \quad (13)$$

위의 식을  $\Delta K^e$ 에 대입하여 정리하면 다음과 같다. 이 식은 확률변수인  $X_{ij}^e$ 항을 포함하고 있다.

$$\begin{aligned} \Delta K_b^e &= \int_{\Omega^e} f(x) B_b^T D_b^e B_b d\Omega^e \\ &= B_{b1}^T D_b^e B_{b1} X_{11}^e + (B_{b1}^T D_b^e B_{b2} + B_{b2}^T D_b^e B_{b1}) X_{12}^e \\ &\quad + \dots + B_{bN_b}^T D_b^e B_{bN_b} X_{N_b N_b}^e \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \Delta K_s^e &= \int_{\Omega^e} f(x) B_s^T D_s^e B_s d\Omega^e \\ &= B_{s1}^T D_s^e B_{s1} X_{11}^e + (B_{s1}^T D_s^e B_{s2} + B_{s2}^T D_s^e B_{s1}) X_{12}^e \\ &\quad + \dots + B_{sN_s}^T D_s^e B_{sN_s} X_{N_s N_s}^e \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\text{여기에서, } X_{ij}^e = \int_{\Omega^e} f(x) p_{ci} p_{cj} d\Omega^e$$

$$c = \begin{cases} b : \text{bending} \\ s : \text{shear} \end{cases}$$

$$i, j = 1 \dots N_b \text{ or } N_s$$

그러므로 강성행렬은 임의장을 고려한 항의 포함에 의해서 전체적으로 확률변수인  $X_{ij}^e$ 의 함수가 된다. 즉, 아래와 같은 표현이 가능하다.

$$\Delta K^e = \text{function of } X_{ij}^e, \quad c = b \text{ or } s \quad (15)$$

$$\text{thus } K^e = \text{function of } X_{ij}^e, \quad i, j = 1 \dots N_b \text{ or } N_s$$

평형 방정식  $KU=F$ 에서 강성행렬  $K$ 가 확률변수  $X_{ij}^e$ 의 함수이므로  $U=K^{-1}F$ 로 얻어지는 변위벡터  $U$  역시  $X_{ij}^e$ 의 함수라고 할 수 있다.

### 2.5 변위에 대한 체계론적 유한요소해석

전절에서 보았듯이 변위벡터  $U$ 는 확률변수  $X$ 의 함수이다. 본 절에서는 가중적분법(weighted integral method)을 나타내기 위해서 확률변수를  $X_{W_i}$ 로 나타내기로 한다.

변위벡터  $U$ 를 요소내의 확률변수  $X_{W_i}^e$ 에 대해서 Taylor전개를 수행하면 다음과 같다.

$$U \approx U_0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{W_i=1}^{N_{W_i}} (X_{W_i}^e - X_{W_i}^{e0}) \left( \frac{\partial U}{\partial X_{W_i}^e} \right)_E \quad (16)$$

위의 식에서 상하 첨자로 쓰인  $0$ 와  $(\cdot)_E$ 는 각각 평균치를 나타낸다.

여기에서  $KU=F$ 를 확률변수  $X_{W_i}^e$ 에 대해서 편미분하여 위의 식에 쓰인 마지막 항을 구하여 대입하면 다음과 같다[11, 14]. 이 식은 변위의 평균치를 나타내는  $U_0$ 와 가정한 재료탄성계수의 임의장에 의해서 발생하는 뒤의 항으로 이루어진다.

$$U \approx U_0 - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{W_i=1}^{N_{W_i}} X_{W_i}^e K_0^{-1} \left( \frac{\partial K}{\partial X_{W_i}^e} \right)_E U_0 \quad (17)$$

$E[X_{W_i}^e] = X_{W_i}^{e0} = 0$ 이므로 위의 식을 이용하여 변위의 평균치를 구하면

$$E[U] = U_0 \quad (18)$$

변위에 대한 공분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[U, U] \\ &= E[(U - U_0)(U - U_0)^T] \\ &= \sum_{e_1}^{N_e} \sum_{e_2}^{N_e} \sum_{W_{i1}}^{N_{w_1}} \sum_{W_{i2}}^{N_{w_2}} \left( K_0^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_{W_{i1}}} U_0 U_0^T \left( \frac{\partial K}{\partial X_{W_{i2}}} \right)^T K_0^{-T} \right) \\ & E[X_{W_{i1}}^e, X_{W_{i2}}^e] \end{aligned} \quad (19)$$

위의 식을 단순화하여 정리하면 다음과 같은 간단한 형태의 식을 얻을 수 있다.

$$\text{Cov}[U, U] = \sum_{e_1}^{N_e} \sum_{e_2}^{N_e} K_0^{-1} E[\Delta K^{e_1} | U_0 U_0^T \Delta K^{e_2}] K_0^{-T} \quad (20)$$

위의 식 (20)에서 평균치 연산자 내의 식을 전개해 보면 다음과 같은 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} & E[\Delta K^{e_1} U_0 U_0^T \Delta K^{e_2}] \\ &= \int_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} E[f(x_1)f(x_2)] \\ & B_{e_1}^T D_0 B_{e_1} U_0 U_0^T B_{e_2}^T D_0 B_{e_2} d\Omega_1^e d\Omega_2^e \quad (21) \\ &= \int_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} R_{ff}(\xi_1, \xi_2) B_{e_1}^T D_0 B_{e_1} U_0 U_0^T B_{e_2}^T D_0 B_{e_2} d\Omega_1^e d\Omega_2^e \end{aligned}$$

여기에서,  $B_e = B_{be} + B_{se}$ ,  $b = \text{bending}$ ,  $s = \text{shear}$   
 $\xi_1, \xi_2 = \text{요소 } e_1, e_2 \text{ 간의 상대거리벡터 } \xi$   
 의  $x, y$  방향의 성분  
 $D_0 = E_0$ 를 가지는  $D_M$

본 연구에서는 다음의 auto-correlation 함수를 사용하여 해석을 수행하고자 한다.

$$R_{ff}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_{ff}^2 \cdot \text{EXP} \left\{ -\frac{|\xi_1| + |\xi_2|}{d} \right\} \quad (22)$$

여기에서  $d$ 는 상관관계의 크기에 영향을 미치는 상관관계거리이다.

### 2.6 평판 두께의 임의성을 고려한 추계론적 해석

평판해석에서 임의성을 가지는 중요한 해석인자의 하나는 평판의 두께이다. 탄성계수의 임의성이 재료 특성에 대한 고려라고 한다면, 평판 두께의 임의성에 대한 해석은 기하학적 특성에 대한 고려라고 할 수 있다. 평판두께의 임의성을 고려

한 해석 역시 탄성계수에 대한 해석에서의와 같은 방법으로 이루어질 수 있다. 그러나 평판의 요소 강성행렬  $K^e$ 는 탄성계수  $E$ 에 대해서는 1차의 함수로 되어 있는 반면 평판의 두께  $t$ 에 대해서는 3차의 차수를 가지고 있는 것을 알 수 있다. Lamé parameter를 사용하여 평판의 변위-응력 행렬을 써보면 아래의 식과 같다.

$$D_e = \frac{t(x)^3}{12} \begin{bmatrix} 2\mu + \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & 2\mu + \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기에서,

$$\begin{aligned} \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \bar{\lambda} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}, \lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \end{aligned} \quad (24)$$

그러므로 요소강성행렬  $K^e$ 는 다음과 같이  $t(x)^3$ 의 함수가 된다.

$$K^e = K^e(t(x)^3) \quad (25)$$

공간의 좌표에 따라서 변하는 두께  $t(x)$ 를 탄성계수의 임의장 함수와 같은 형태인 아래의 식과 같이 가정하고,

$$t(x) = t_0(1+f(x)) \quad (26)$$

행렬  $D_e$ 에 대입하여 정리하면  $t(x)^3 = t_0^3 \cdot (1+3f+3f^2+f^3)$ 이므로 행렬  $D_e$ 는 다음의 두 부분으로 나누어진다.

$$D_e = D_0 + \Delta D, \Delta D = (3f+3f^2+f^3)D_0 \quad (27)$$

위의 식을 요소강성행렬식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$K^e = \int_{\Omega^e} B^T D_0 B d\Omega^e + \int_{\Omega^e} (3f+3f^2+f^3) B^T D_0 B d\Omega^e \quad (28)$$

위의 식에서  $D_0$ 는 행렬  $D_e$ 에서  $t(x)$  대신에  $t_0$ 를 대입하여 얻는 행렬로 두께의 평균치를 사용한 응력-변형률 행렬이고  $K_0^e$ 는 요소강성행렬의 평균

치,  $\Delta K^e$ 는 강성행렬의 변화도를 나타내는 행렬이다.

두께의 불확실성을 고려한 해석 역시 변위의 공분산 행렬을 얻기 위해서는 아래와 같은 계산이 필요하게 된다.

$$E[\Delta K^e U_0 U_0^T \Delta K^{e2}] \quad (29)$$

위의 식에 요소강성행렬의 구성에서 얻어진 강성행렬의 변화도를 나타내는 행렬  $\Delta K^e$ 를 대입하면 아래와 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} & E[\Delta K^e U_0 U_0^T \Delta K^{e2}] \\ &= E\left[\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} (3f_1 + 3f_1^2 + f_1^3)(3f_2 + 3f_2^2 + f_2^3) \right. \\ & \quad \left. B_1^T D_0 B_1 U_0 U_0^T B_2^T D_0 B_2 d\Omega_2^e d\Omega_1^e\right] \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} E\left[(3f_1 + 3f_1^2 + f_1^3)(3f_2 + 3f_2^2 + f_2^3)\right] \\ & \quad B_1^T D_0 B_1 U_0 U_0^T B_2^T D_0 B_2 d\Omega_2^e d\Omega_1^e \end{aligned}$$

평균연산자 내의 항을  $\hat{R}_{ff}(\xi)$ 로 표현하면 위의 식은 아래의 식과 같이 표현된다.

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \hat{R}_{ff}(\xi) B_1^T D_0 B_1 U_0 U_0^T B_2^T D_0 B_2 d\Omega_2^e d\Omega_1^e \quad \xi = x_2 - x_1, \quad (31)$$

$$x_1 \in \Omega_1^e, x_2 \in \Omega_2^e, \Omega_1^e, \Omega_2^e \subset \Omega$$

여기에서,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ff}(\xi) &= (9 + 18\sigma_{ff}^2 + 9\sigma_{ff}^4) R_{ff}(\xi) + 18R_{ff}^2(\xi) \\ & \quad + 6R_{ff}^3(\xi) + 9\sigma_{ff}^4 \end{aligned} \quad (32)$$

$R_{ff}(\xi)$  = Auto-correlation function of  $f(x)$

$\sigma_{ff}$  = coefficient of variation of random field

위에서 유도된 함수  $\hat{R}_{ff}(\xi)$ 는  $t(x)^3$ 의 함수로 나타나는 평판구조의 강성행렬에서 두께에 대한 변화도의 임의장을 표현하는 새로운 auto-correlation 함수라고 할 수 있다.

본 연구에서는 주된 연구 주제인 가중적분법의 결과에 대한 타당성의 검증에 위해서 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하여 그 결과와 비교하고자 한다. 사용한 알고리즘은 통계학적 전처리를 이용한

것이다[8].

### 3. 예제해석 및 결론

#### 3.1 예제 해석

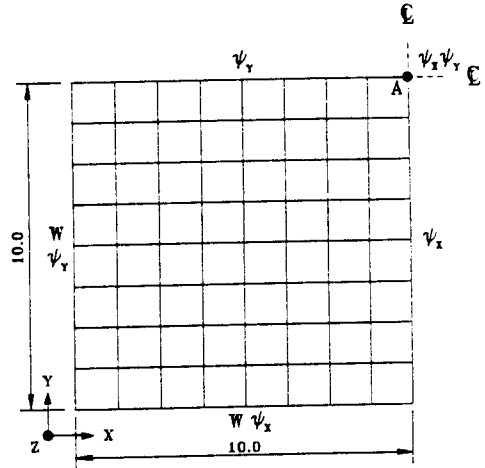


그림 1. 등방성 평판에 대한 1/4 모델링

예제로 사용된 평판구조는 그림 1과 같다. 위의 모델링은 가로 세로가 각각 20인 단순지지 평판에 대한 1/4 모델링이다. 각 변에 나타난 표시들은 묶여 있는 자유도를 나타낸 것이다. Z방향에 대한 변위의 공분산값은 그림 1의 점 A( $x=10.0, y=10.0$ )에서 구해졌다. 작용하는 하중은 평판의 윗면에 수직 하향으로 작용하는 등분포 하중으로 하였고, 그 값은  $q=1.0$ 으로 설정하였다. 평판의 재료 탄성계수  $E$ 는  $10.92E+03$ , 포아송비  $\nu$ 는 0.3, 임의장의 표준편차는 0.1로 하였고, 평판의 두께  $t$ 는 1.0의 값을 취하여 해석을 수행하였다.

식 (21), (31)의 Auto-correlation 함수의 수치적분에는  $10 \times 10$ 의 gauss quadrature가 사용되었다.

#### 3.2 평판 재료 탄성계수의 임의성에 대한 해석

그림 2와 그림 3은 각각 가중적분법과 몬테카를로 시뮬레이션(M.C.S.)에 의한 해석 결과로 그림 1의 A점에 대한 수직변위( $w$ )의 분산계수를 auto-correlation 함수의 상관관계거리  $d$ 의 변화에 따라 나타내 본 것이다. Auto-correlation 함수

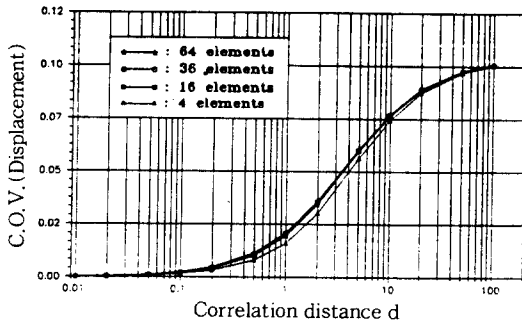


그림 2. 변위 분산계수의 상관관계거리에 따른 변화 (가중적분법)

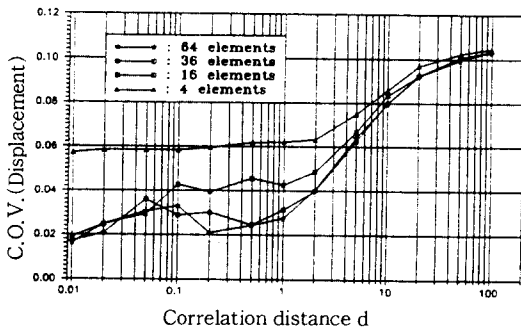


그림 3. 변위 분산계수의 상관관계거리에 따른 변화(M.C.S.)

에 사용된  $d$ 의 값이 큰 경우는 두 가지 방법 공히 임의장의 표준편차인 0.1의 값에 잘 수렴하고 있다. M.C.S.에는  $[4 \times n_f \times n_{elem}]$ 개의 표본이 사용되었고  $n_f$ 는 5를 사용하였다[8]. 여기에서,  $n_{elem}$ 은 구조의 모델링에 사용된 요소의 수이다.  $d$ 의 양 극값에서의 분산계수의 수렴에 대한 근거는 아래와 같다.

Auto-correlation 함수(식 22)에서  $d$ 의 값이 0에 가까울 경우 auto-correlation 함수의 형태는  $\xi$ 의 값이 0 근처의 부분에 집중된 형상을 나타내게 된다. 그러므로 이 함수의 영역에 대한 적분치는 매우 작은 값이 되고  $d$ 가 0에 수렴할수록 적분 값 역시 0으로 수렴하게 된다. 그러므로 공분산 값 역시 0으로 수렴하게 된다.

$d$ 의 값이 클 경우 지수함수의 값은 1.0의 값을 가지므로 auto-correlation 함수의 값은 임의장 표준편차의 제곱( $\sigma_{ff}^2$ )과 같게 되며, 상대거리벡터인  $\xi$ 의 값에는 무관한 일정한 값을 가지게 된다.

이러한 경우의 임의장의 특성을 표현해 보면 아래와 같다. 즉, 임의장  $f(x)$ 는 상대거리 벡터  $\xi$ 의 값에 무관하므로 구조계 내의 모든 요소에 대해서 일정한 값을 가지게 된다.

$$\langle f(x)_1, f(x)_2, f(x)_3, \dots \rangle = \langle c_1, c_2, c_3, \dots \rangle,$$

$$c_i = \text{constant} \quad (33)$$

이 경우 임의장  $f(x)$ 는 파장이 매우 큰 파의 형태를 갖는다고 생각할 수 있다.

추계론적 해석은 위의 각 임의장  $f(x)_i$ 에 대한 해석으로 이루어지게 된다. Ensemble mean의 개념으로 볼 때 위의 각 함수는 하나의 확률변수로 취급되며 그러므로 그 평균은 0이 되고 표준편차는 임의장의 표준편차( $\sigma_{ff}$ )와 같게 된다. 그러므로  $d$ 의 값이 커짐에 따라 분산계수의 값은  $\sigma_{ff} = 0.1$ 로 수렴하게 된다.

### 3.3 평판 두께의 임의성에 대한 해석

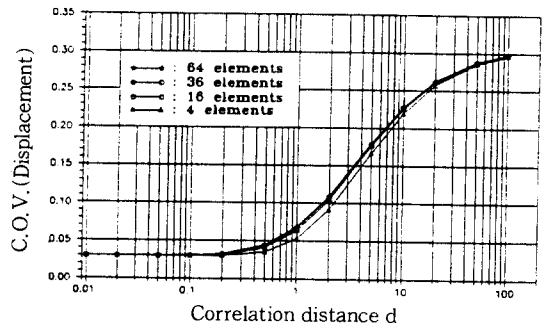


그림 4. 변위 분산계수의 상관관계거리에 따른 변화 (가중적분법)

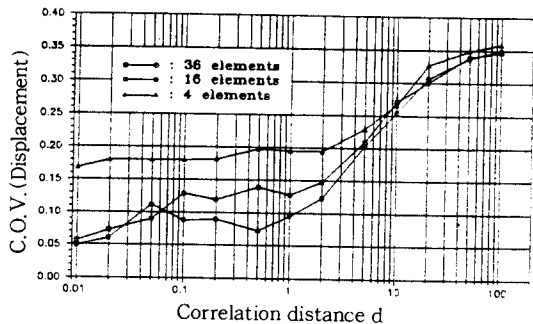


그림 5. 변위 분산계수의 상관관계거리에 따른 변화(M.C.S.)

그림 4와 그림 5는 평판두께의 임의성을 고려할 경우 상관관계거리 d의 값이 무한대로 감에 따른 그림 1의 A점에 대한 수직변위(w) 분산계수값의 수렴을 나타내고 있다. 가중적분법의 경우 0.3 정도에 수렴하고 있으며, M.C.S.의 경우도 사용요소의 증가에 따라 0.35 정도의 값에 수렴하고 있는 것을 알 수 있다. d의 값이 작은 경우와 큰 경우의 수렴치는 각각 다음과 같이 설명된다. d의 값이 0에 가까울 경우 auto-correlation 함수  $R_{ff}(\xi)$ 에 대한 적분값은 0에 가깝게 되며, 따라서 새로운 auto-correlation 함수는 다음의 값을 가진다 (식 32).

$$\hat{R}_{ff}(\xi) = 9\sigma_{ff}^2 \quad (34)$$

분산계수의 계산에는 위 식의 제곱근이 사용되게 되며, 평판두께의 가정된 표준편차가 0.1이므로 그 값은 0.0009의 제곱근인 0.03이 된다. 이 값은 그림 4에서 d값이 작을 경우의 수렴치와 같다. d의 값이  $\infty$ 에 가까울 경우 ensemble을 이루는 각 임의장 f(x)<sub>i</sub>가 상수값을 가진다는 것을 의미한다(식 33). 즉 auto-correlation 함수는  $\sigma_{ff}^2$ 의 값을 가지게 되고, 따라서 새로운 auto-correlation 함수  $\hat{R}_{ff}(\xi)$ 의 값은 0.09452의 값을 가지게 되고, 이의 제곱근은 0.3074로서 이 값은 d의 값이 무한대일 경우 분산계수값의 수렴치를 나타내고 있다.

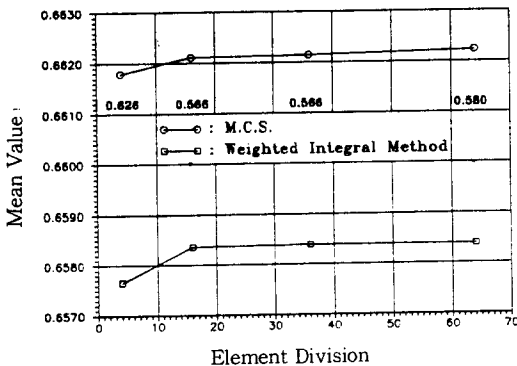


그림 6. M.C.S.과 가중적분법에 의한 해석의 평균값 비교

그림 6은 제안된 가중적분법과 M.C.S.에 의한 해석의 평균값을 비교한 것이다. 그래프의 내부에 쓰여진 숫자는 두 결과간의 차이를 %로 나타낸 것으로 첫번째 경우 0.626%의 차이가 가장 큰 차이로 나타나 두 방법간의 평균에 대한 결과가 잘 일치함을 보이고 있다.

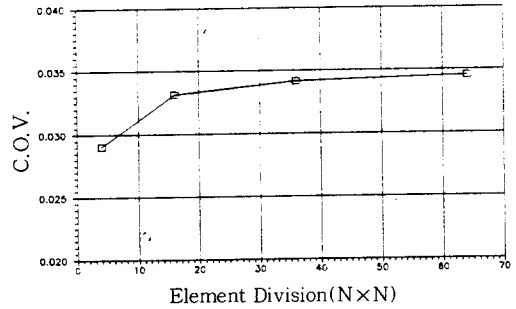


그림 7. 사용요소의 증가에 따른 분산계수의 변화

그림 7은 그림 1의 평판을 각각 (2x2), (4x4), (6x6) 그리고 (8x8)로 분할하였을 경우 구조 중간점의 수직 변위에 대한 분산계수의 변화를 나타낸 것이다. 여기에서 사용된 d의 값은 2.0이며 탄성계수의 임의성을 고려한 해석이다. 그림에서 보듯이 많은 수의 요소를 사용할 경우 분산계수의 값은 증가하는 경향을 보이고 있지만 실제로 개선되는 값은 크지 않으므로 적은 수의 요소를 사용하여도 좋은 결과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

표 1. 가중적분법과 M.C.S.의 결과 비교(d=2.0)

가중적분법 (WI)				
모 델 링	2x2	4x4	6x6	8x8
평 균	0.65765	0.65836	0.65839	0.65839
표준편차	0.01910	0.02182	0.02247	0.02274
분산계수	0.02904	0.03314	0.03413	0.03454
몬테카를로 시뮬레이션 (M.C.S.)				
모 델 링	2x2	4x4	6x6	8x8
평 균	0.66179	0.66211	0.66214	0.66223
표준편차	0.04136	0.03052	0.02636	0.02526
분산계수	0.06250	0.04609	0.03981	0.03814
평균치비율(R1) (M.C.S. / WI)	1.0063	1.0057	1.0057	1.0058
분산계수의 비율(R2) (M.C.S. / WI)	2.1522	1.3908	1.1664	0.1042



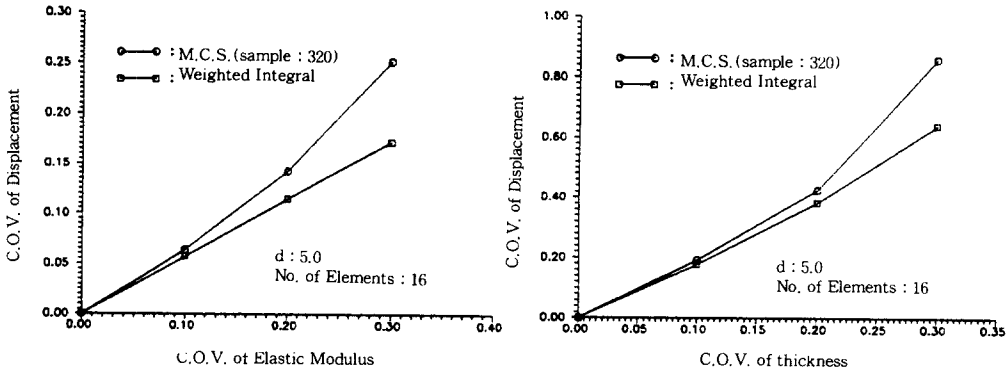


그림 8. 임의장 분산계수의 변화에 따른 변위분산계수의 변화

표 1은 요소를 세분화함에 따라 나타나는 두 방법의 결과를 비교하고 있다. 요소의 분할이 진행됨에 따라 두 결과는 상호간에 유사해지는 경향을 보이고 있다. M.C.S.의 경우 가중적분법보다는 항상 큰 결과를 보이고 있다. 이것은 Lawrence [2]도 같은 결과를 얻었으며, 일반적으로 M.C.S.에 의한 해석 결과는 수치해석법에 의한 결과보다는 큰 값을 나타내게 된다. 표준편차의 비율을 보면 요소의 분할에 따라서 두 결과의 비가 줄어드는 것을 볼 수 있다.

그림 8은 16개의 요소로 모델링된 평판에 대한 해석으로 임의장으로 가정한 평판의 탄성계수와 두께의 표준편차  $\sigma_{tf}$ 의 변화에 의한 중앙집중변위의 분산계수의 변화를 살펴본 것이다. 대부분의 수치해석적인 접근이 그렇듯이 가중적분법 역시 임의장 특성의 변화에 대해서는 선형적인 변화를 보이고 있다. 그런 이유로 임의장의 특성으로 가정한 임의장 표준편차가 증가하면 M.C.S. 방법과의 사이에 나타나는 결과의 차이도 증가하게 된다. 그러나 일반적으로 임의장의 표준편차는 적은 양(일반적으로 0.1 정도)으로 가정을 하게 되므로 가중적분법의 결과는 합리적이라고 할 수 있겠다.

### 3.4 Lawrence의 결과와의 비교

예제로 사용한 평판의 해석상수들은 각각 다음과 같다.

탄성계수  $E = 1.0 \times 10^7$     포아송비  $\nu = 0.3$   
 평판 변의 길이  $= 100.0$   
 중앙집중하중  $= 100.0$     평균 두께 값  $= 1.0$

상관관계거리  $d$ 는 Lawrence [2]와 같이 무한대의 값을 사용하였다. 실제로 해석에 사용된 상관관계거리의 값은  $1.0E+07$ 의 값을 사용하였다. 가중적분법에 의한 해석과 Lawrence에 의해 얻어진 값을 비교해 보면 표 2와 같다.

표 2. 제안된 방법과 Lawrence의 해석결과 비교 (M.C.S. 포함)

		제안된 방법	M.C.S.
본연구(W.I.) ( $d=\infty$ )	평균	1.2678E-02	1.2385E-02
	표준편차	3.9084E-03	4.2407E-03
	분산계수	3.0828E-01	3.1447E-01
Lawrence ( $d=\infty$ )	평균	1.3386E-02	1.3486E-01
	표준편차	3.8940E-03	4.1340E-03
	분산계수	2.9090E-01	3.0654E-01
평균비(본연구/Lawrence)		0.9471	1.0000
표준편차비(본연구/Lawrence)		1.0037	1.0258
분산계수비(본연구/Lawrence)		1.0597	1.0258
분산계수의 이론적 수렴치		3.074E-01	

Lawrence의 경우 변위의 평균치가 결정론적 해석과 비교해서 5.6% 정도 크게 나타났으나 변위에 대한 표준편차의 값은 본 연구에서 제안된 방법이 Lawrence의 결과에 비해 약간 더 크게 나타났다. 이것은 본 연구에서 제안한 방법이 평판두께의 임의성에 의한 변위의 변화도를 더 크게 나타내어 보다 좋은 결과를 보이고 있음을 말해주고 있다.

### 3.5 해석에 필요한 시간

가중적분법을 포함한 수치해석적 기법들의 연구가 이루어지고 있는 중요한 이유중의 하나는 M.C.S.을 포함한 추계론적 해석시 소요되는 엄청난 해석시간이다. 일례로 36개의 요소로 모델링한 평판(표본수=720)에 대해서 M.C.S. 해석 시에는 208분 31초의 해석 시간이 소요되는데 반해 가중적분법의 경우 27분 31초의 시간이 소요되었다. 이러한 해석시간상의 경제성은 구조계의 모델링에 사용된 요소수가 증가함에 따라 더욱 커지게 된다. Ghanem과 Spanos[9]의 경우 M.C.S.에 5,000개의 표본을 사용하였고, Lawrence[2]의 경우 10,000개의 표본을 사용하였으므로 해석에 많은 시간을 요하였을 것으로 생각된다.

### 3.6 결론

본 연구는 가중적분법에 의한 추계론적 유한요소해석법에 대한 연구로 본 방법의 적용성을 기존의 평면구조에 국한되었던 것을 평판구조로 확장하였고, 평판의 기하학적 특성인 평판두께에 대한 추계론적 유한요소해석을 가능하도록 하였다. 두 해석인자인 재료탄성계수(E)와 두께(t)의 임의성에 대한 추계론적 유한요소해석 정식화는 상당부분 같은 맥락에서 이루어졌다. 그러나 강성행렬은 두께에 대해서 3차의 함수로 나타나므로 두께의 임의성을 나타내는 새로운 auto-correlation 함수의 유도가 필요하게 된다(식 32). 평판 두께에 대한 해석의 경우 분산계수의 이론적 수렴치는 상관관계거리 d의 값이 0에 접근할 경우 0.03, 무한대에 접근할 경우 0.3074로 나타났으며, 유한요소정식화에 의한 해석의 결과는 이 값에 잘 수렴하는 좋은 결과를 나타내었다(그림 4). 얻어진 결과는 Lawrence가 해석한 결과 및 M.C.S.의 결과와 비교되었으며 이들은 상호간에 잘 일치하는 좋은 결과를 나타내었다(표 2).

### 참 고 문 헌

1. Thomas J. R. Hughes and Martin Cohen, "The 'Heterosis' Finite Element for Plate Bending," *Computers and Structures*, Vol. 9, No. 5, pp.445-450, 1978.
2. M. A. Lawrence, "Basis Random Variables in Finite Element Analysis," *International Journal*

- for *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1849-1863, 1987.
3. M. Shinozuka, "Structural Response Variability," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, No. 6, 1987.
4. F. Yamazaki, M. Shinozuka and G. Dasgupta, "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 8, 1988.
5. M. Shinozuka and G. Deodatis, "Response Variability of Stochastic Finite Element Systems," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 3, 1988.
6. G. Deodatis and M. Shinozuka, "Bounds on response variability of stochastic systems," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 115, No. 11, 1989.
7. R. D. Cook, D. S. Malkus and M. E. Plesha, "Concept and Application of Finite Element Analysis," John Wiley & Sons, 3rd ed, 1989.
8. F. Yamazaki, M. Shinozuka, "Simulation of Stochastic Fields by Statistical Preconditioning," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 116, No. 2, 1990.
9. Roger Ghanem and P. D. Spanos, "Polynomial Chaos in Stochastic Finite Elements," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, March, 1990.
10. G. Deodatis, "Weighted Integral Method. I : Stochastic Stiffness Matrix," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, No. 8, 1991.
11. G. Deodatis, W. Wall, and M. Shinozuka, "Analysis of Two-Dimensional Stochastic Systems by the Weighted Integral Method." In Spanos, P. D. and Brebbia, C. A., editors, "Computational Stochastic Mechanics." pp. 395-406, 1991.
12. M. Kleiber and T. D. Hein, "The Stochastic Finite Element Method." John Willy & Sons. pp.3-19, pp.83-96, 1992.
13. Chun-Ching Li, A. Der Kiureghian, "Optimal Discretization of Random Fields," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 119, No. 6, 1993.
14. 최창근, 노혁천, "사변형 요소를 이용한 추계론적 유한요소해석," 대한토목학회 논문집, 제13권, 제5호, pp.29-37, 1993. (접수일자 : 1994. 10. 17)