

# 유한요소법을 이용한 고무 연결요소의 정-동강성 계수에 관한 연구

## Study on the Static and Dynamic Stiffness Coefficients of Rubber Connector by Using Finite Element Method

박 노 길\*

Park, No-Gill

박 성 태\*\*

Park, Sung-Tae

### 요 약

고무 재질로 이루어진 차량 구조물의 연결요소에 대한 등가 강성계수는 차량 시스템 동역학 특성에 매우 민감하게 영향을 주므로 이에 대한 신뢰성있는 해석이 요구된다. 본 논문에서는, 고무의 역학 모델을 정하중 하에서는 유한 변형 및 Hook 모델로 그리고 동하중 하에서는 Voigt 모델로 가정하여, 연결요소의 등가 정-동 강성계수를 유한요소법으로 해석하고자 한다.

실제 차량에 사용되고 있는 동일 모양의 방진고무들을 실험 평가한 결과 강성계수값들의 분산 정도가 심함을 알 수 있었다. 유한요소 해석에 필요한 고무 재질의 물성치의 신뢰성을 높이기 위하여 제품의 특정 방향 정특성 실험 데이터로부터 역으로 재질의 물성치를 규명하였다. 그 물성치로부터 원하는 방향에서의 강성계수를 산출하여 실험치와 비교하여 효용성을 보였다.

### Abstract

Since the mechanical properties of the rubber connectors used in the vehicle structures are sensitive on the dynamic characteristics of the system, they must be exactly evaluated. In this paper, both finite deformation theory and Hookean model are considered to calculate the stiffness coefficients of rubber connectors. An expert system is developed by using finite element method.

When the equivalent stiffness coefficients on the same kinds of isolators used in actual vehicles were empirically examined, the results were largely dispersed due to the lack of the quality control on the material properties. To compensate the errors caused by the mathematical modeling and the mechanical properties, a practical method which identifies the shear and bulk moduli of rubber with the experimented overall force-deformation curves is suggested and applied to the engine isolators of vehicle.

\* 부산대학교 공과대학 생산기계공학과

\*\* 울산대학교 공과대학 자동차공학과

이 논문에 대한 토론을 1995년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

차량 구조물의 연결요소인 부시(bush) 혹은 방진고무는 차량시스템의 진동 특성에 중요한 영향을 주므로, 연결요소의 동특성 파라미터들은 신뢰성 있는 시스템 동역학 해석을 위해 정확하게 규명될 필요가 있다. 차량의 모델들이 급속히 변하고 있는 현상에서 시스템 변경에 따른 이상 진동 현상은 빈번히 발생하는 문제 중의 하나이다. 따라서 고무 연결요소의 재설계를 통한 시스템 특성의 조정 작업은 실용적이며 현재 많이 활용되고 있다. 이와 관련하여 고무 연결요소의 특성 파라미터 해석을 위한 전용 프로그램의 개발은 실용적 가치가 충분하다고 본다.

수치해석의 신뢰성은 일차적으로 입력데이터의 정확성에 달려 있다. 그런데 국내에서 생산되는 고무 연결요소의 특성치 분산 정도가 너무 심하여 수치 결과에 대한 신뢰성을 갖기가 매우 어려운 형편이다.<sup>(1)</sup> 본 논문에서는 고무에 대한 수학적 모델 오차와 물성치 오차를 극복하기 위하여 실제 제품에 대한 특성 곡선 실험 데이터로부터 역으로 고무의 물성치를 규명하고 규명된 물성치를 이용하여 원하는 특성 파라미터들을 산출하는 방법을 제안하고 상용차용 육면체 방진고무에 적용하여 실용성을 검토하고자 한다.

## 2. 고무 변형 해석의 이론적 배경

고무는 강철의 탄성계에 비하여 매우 작기 때문에 적은 하중에도 큰 변형이 생긴다. 따라서 변형률과 변위의 관계는 유한변형으로 가정한다. 재료의 응력과 변형률의 관계는, 정하중 하에서는 Hook 재질로 하고 동하중 하에서는 Voigt 모델로 가정한다.

고무 연결요소는 3차원 등계수(isoparametric) 8점 유한요소를 사용한다. 기하학적 비선형으로 인하여 시스템 평형방정식은 비선형이므로 해석을 위하여 증분이론(Incremental theory)<sup>(2)</sup>을 도입한다. 동특성 곡선의 산출은 비교적 안정한 수치적분법인 Newmark  $\beta^{(3)}$ 법을 사용한다. 본문 수식은 index notation에 summation convention이

적용된다.

### 2.1 변형률과 응력

본 논문의 변수 표기 및 수식 표기에 있어서는, 첨자를 이용하여 벡터 및 행렬의 성분을 나타내고 첨자의 중복 표기로서 수식 합산을 나타내기로 한다.<sup>(4)</sup> 변형체 내의 임의의 한 점에서, 변형 전의 위치  $a_i$ , 변형 후의 위치  $x_i$ , 및 변위  $u_i$ 는 다음과 같다.

$$u_i = x_i - a_i \quad (1)$$

변위와 변형률과의 관계를 유한변형으로 가정할 때, Almansi 변형률 텐서  $e_{ij}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$ds^2 - ds_0^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j \quad (2)$$

여기서  $ds_0$ ,  $ds$ 는 각각 변형 전후 미소 길이이다.

변형 전후의 미소 위치 변화 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$dx^i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da^j = h_{ij} da^j \quad (3)$$

여기서  $h_{ij}$ 는 변형률 구배텐서(gradient tensor)로서,

$$h_{ij} = \delta_{ij} + u_{ij} \quad (4)$$

이고  $u_{ij} = \partial u_i / \partial a_j$ 이다.

한편  $da^i = g_{ij} dx^j$ 로 놓을 때,  $g_{ij}$ 는  $g_{ij} = \partial a_i / \partial x_j$ 로 정의되는 변형률 구배텐서로서

$$g_{ij} h_{jk} = \delta_{ik} \quad (5)$$

의 관계가 성립한다. 따라서 식(3), (4), (5)를 식(2)에 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ki} g_{kj}) \quad (6)$$

유한 변형계에서 사용되는 응력들에는 Kirch-

hoff 응력, Lagrange 응력, Euler 응력, 그리고 Cauchy 응력이 있는데, 이들은 각각 미소 단면에 작용하는 힘과 단면적을 변형 전 상태와 변형 후 상태로 할 것이냐에 따라 정의되는 응력들이다. 변분 원리에 의하여 유도될 평형방정식은 Lagrange 응력을 사용할 때 수식화가 간편하므로, Lagrange 응력과 Euler 응력을 사용하고자 한다. 재료의 물성치는 Euler 응력과 Euler 변형도 관계식에 대한 파라미터들로 주어진다.

Lagrange 응력 텐서를  $T_{ij}$ , Euler 응력 텐서를  $\sigma_{ij}$ 라 하면 이들 사이의 관계는 다음과 같다.

$$T_{ij} = |h_{rs}| g_{jm} \sigma_{mi} \quad (7)$$

여기서

$$|h_{rs}| = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} \quad (8)$$

이다. Hook 재질에서 Euler 응력과 Almansi 변형률 사이의 관계식은

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{aa} \delta_{ij} + 2Ge_{ij} \quad (9)$$

이다. 여기서  $\lambda$ 는 체적탄성계수,  $G$ 는 횡탄성계수이다.

### 2.2 정강성계수의 평가

가상일 원리를 적용하면 개별 유한요소에 대하여 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\int T_{ji} \delta u_{ij} dV_0^{(e)} = \int f_i \delta u_i dS_0^{(e)} \quad (10)$$

여기서  $\delta$ 는 변분(variation) 기호,  $f_i$ 는 경계면에서의 표면 작용력,  $V_0^{(e)}$ ,  $S_0^{(e)}$ 는 각각 요소의 부피 및 경계면이다.  $u_{ij}$ 는 변위  $u_i$ 의  $a_j$  방향 변화률로서  $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}$ 로 정의되는 변형률이다.

유한요소는 3차원 등계수(isoparametric) 8절점 요소를 사용하기로 한다. 요소 절점  $k(k=1, 2, \dots, 8)$ 에서의  $i$ 방향 변위 성분을  $d_{ik}$ 라 하면,  $u_i$ 는

다음과 같다.

$$u_i = N^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d_{ik} \quad (11)$$

여기서  $N^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 는 8점 node 직육면체 요소의 형태함수이고  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 는 요소내의 국부 좌표계이다.  $u_{ij}$ 를 절점 변위성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$u_{ij} = L_j^k d_{ik} \quad (12)$$

여기서  $L_j^k = \frac{\partial N^k}{\partial \xi_a} \frac{\partial \xi_a}{\partial a_j}$ 이다.

식 (11), (12)를 식 (10)에 대입하여 절점의 가상변위  $\delta d_{ik}$ 를 소거하면 요소의 평형 방정식,

$$\int L_j^k T_{ji} dV_0^{(e)} = \int N^k f_i dS_0^{(e)} \quad (13)$$

을 얻는다. 이 식은 절점  $k$ 에서 방향  $i$ 에 대한 평형방정식이다.

비선형 방정식의 해석을 위하여 증분이론(Incremental theory)을 적용하면 식 (13)은

$$\int L_j^k \Delta T_{ji} dV_0^{(e)} = \int f_i^{(n+1)} N^k dS_0^{(e)} - \int L_j^k T_{ji}^{(n)} dV_0^{(e)} \quad (14)$$

와 같은 증분식으로 된다. 여기서 상첨자  $(n)$ ,  $(n+1)$ 은 증분의 단계 번호이고,  $\Delta$ 는 증분량을 뜻한다.

식 (14)의 Lagrange 응력 증분  $\Delta T_{ji}$ 를 절점 변위 성분의 증분으로 나타내기 위하여, 식 (7)에 증분을 취하면,

$$\Delta T_{ji} = \Delta |h_{rs}| g_{jm} \sigma_{mi} + |h_{rs}| (\Delta g_{jm} \sigma_{mi} + g_{jm} \Delta \sigma_{mi}) \quad (15)$$

이 된다.  $\Delta |h_{rs}|$ 는, 식 (8)로부터,

$$\Delta |h_{rs}| = H_{ab} \Delta h_{ab} \quad (16)$$

이고 여기서  $H_{ab}$ 는 다음과 같다.

$$H_{11} = h_{22}h_{33} - h_{23}h_{32}, H_{12} = h_{23}h_{31} - h_{21}h_{33}$$

$$\begin{aligned} H_{13} &= h_{21}h_{32} - h_{22}h_{31}, & H_{21} &= h_{12}h_{31} - h_{13}h_{22} \\ H_{22} &= h_{11}h_{33} - h_{13}h_{31}, & H_{23} &= h_{12}h_{31} - h_{11}h_{32} \\ H_{31} &= h_{12}h_{23} - h_{13}h_{23}, & H_{32} &= h_{13}h_{21} - h_{11}h_{23} \\ H_{33} &= h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \end{aligned} \quad (17)$$

식 (15)의  $\Delta g_{jm}$ 은 다음과 같은 과정으로 얻는다. 식 (5)에 증분을 취하면,

$$\Delta g_{ji}h_{ik} + g_{ji}\Delta h_{ik} = 0 \quad (18)$$

이 되고, 식 (18)에  $g_{km}$ 를 곱하고, 첫째 항에  $h_{ik}g_{km} = \delta_{im}$ 의 식을 적용하여 정리하면,

$$\Delta g_{jm} = -g_{km} g_{ji} \Delta h_{ik} \quad (19)$$

이 된다.

또 식 (15)의  $\Delta \sigma_{mi}$ 는 다음과 같이 얻는다. 식 (9)에 증분을 취하면,

$$\Delta \sigma_{mi} = \lambda \Delta e_{aa} \delta_{mi} + 2G \Delta e_{mi} \quad (20)$$

이고 식 (20)의  $\Delta e_{mi}$ 는, 식 (6)으로부터

$$\Delta e_{mi} = -\frac{1}{2}(g_{ki}\Delta g_{km} + g_{km}\Delta g_{ki}) \quad (21)$$

이므로 식 (19)를 식 (21)에 대입하여 정리하면,

$$\Delta e_{mi} = R_{miab} \Delta h_{ab} \quad (22)$$

이다. 여기서  $R_{miab} = \frac{1}{2}g_{ka}(g_{bm}g_{ki} + g_{bi}g_{km})$ 이다.

식 (16), (19), (20)을 식 (15)에 대입하여 정리하면,

$$\Delta T_{ji} = C_{jibc} \Delta h_{bc} \quad (23)$$

이 되는데 여기서

$$\begin{aligned} C_{jibc} &= g_{jm}\sigma_{mi}H_{bc} + |h_{rs}|(-g_{jt}g_{mc}\sigma_{mi} \\ &\quad + \lambda g_{ji}R_{aabc} + 2Gg_{jm}R_{mibc}) \end{aligned} \quad (24)$$

이다.

한편, 식 (4)에 증분을 취하여 식 (12)를 대입하면,  $\Delta h_{bc} = L_c^m \Delta d_{bm}$ 이 되므로, 이 식을 식 (23)에 적용한 후, 식 (23)을 식 (14)에 대입하면 다음과 같은 요소의 평형 방정식을 얻는다.

$$K_{ib}^{km} \Delta d_{bm} = \int f_i^{(n+1)} N^k dS_0^{(e)} - \int L_j^k T_{ji}^{(n)} dV_0^{(e)} \quad (25)$$

여기서  $K_{ib}^{km}$ 는 변형 비선형을 고려한 요소의 강성 텐서로서,

$$K_{ib}^{km} = \int L_j^k C_{jibc} L_c^m dV_0^{(e)} \quad (26)$$

이다. 이 때 상첨자 k, m은 요소의 절점번호를, 하첨자 i, b는 3차원 공간의 좌표성분을 나타낸다. 따라서 식 (25)를 절점변위 증분벡터  $\Delta \underline{U}^{(e)}$ 와 요소 강성행렬  $[K^{(e)}]$ , 그리고 절점력 증분벡터  $\Delta \underline{F}^{(e)}$ 로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[K^{(e)}] \Delta \underline{U}^{(e)} = \Delta \underline{F}^{(e)} \quad (27)$$

여기서

$$\Delta \underline{U}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \Delta d_{11} \\ \Delta d_{21} \\ \Delta d_{31} \\ \Delta d_{12} \\ \Delta d_{22} \\ \Delta d_{32} \\ \vdots \\ \Delta d_{18} \\ \Delta d_{28} \\ \Delta d_{38} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \underline{F}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \Delta f_{11} \\ \Delta f_{21} \\ \Delta f_{31} \\ \Delta f_{12} \\ \Delta f_{22} \\ \Delta f_{32} \\ \vdots \\ \Delta f_{18} \\ \Delta f_{28} \\ \Delta f_{38} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

이고,  $\Delta \underline{F}^{(e)}$ 의 성분  $\Delta f_{ij}$ 는, 식 (25)로부터,

$$\Delta f_{ij} = \int f_i^{(n+1)} N^j dS_0^{(e)} - \int L_j^i T_{ji}^{(n)} dV_0^{(e)} \quad (29)$$

이다. 그리고 요소 강성행렬  $[K^{(e)}]$ 의 I행, J열 성분  $K_{ij}^{(e)}$ 는

$$K_{ij}^{(e)} = K_{ib}^{km} \quad (30)$$

이다. 따라서  $I=3(k-1)+i$ ,  $J=3(m-1)+b$ 이다.

2.3 동강성계수 평가

고무 연결요소의 작용점에서 조화변위를 가하여 반력을 계산하면 그림 1의 이력곡선(hysteresis loop)이 얻어진다. 고무 연결요소를 스프링-점성감쇠기 요소로 가정할 때, 동강성계수  $K_d$ 는 히스테리시스곡선의 최대변위와 최소변위 차  $\Delta F$ 의 비로 정의한다. 동가 점성계수는 다음과 같은 식으로부터 얻을 수 있다.<sup>(5)</sup>

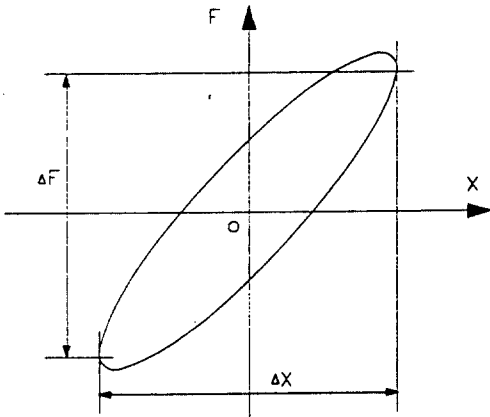


그림 1. 이력곡선

$$c_{eq} = \frac{\Delta W}{\pi \omega X^2} \quad (31)$$

여기서  $\Delta W$ 는 고무 연결요소에서 사이클당 손실된 에너지량으로서, 그림 1의 이력곡선의 면적으로부터 직접 얻는다.  $\omega$ ,  $X$ 는 각각 조화변위의 주파수와 진폭이다. 고무의  $c_{eq}$ 는 조화가진 주파수에 영향을 많이 받으므로 손실계수(loss factor)  $h$ 를 대신 사용하는 경우가 많으므로 이들 계수와 관계는 다음과 같다.

$$h = \frac{c_{eq}\omega}{K_d} \quad (32)$$

고무 연결요소의 이력곡선을 산출하기 위해서, 고무 변형체를 Voigt 모델<sup>(6)</sup>로 가정한다. 응력과

변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{ea} \delta_{ij} + 2G e_{ij} + \eta_\lambda \dot{e}_{aa} \delta_{ij} + 2\eta_G \dot{e}_{ij} \quad (33)$$

여기서  $\lambda$ ,  $G$ 는 각각 체적탄성계수, 횡탄성계수이고  $\eta_\lambda$ ,  $\eta_G$ 는 각각 체적점성계수, 횡점성계수이다.

동하중을 받는 고무 요소에 가상일의 원리를 적용하면 운동방정식은 다음과 같다.

$$\int \rho_0 \ddot{u}_i N^k dV_0^{(e)} + \int T_{ji} L_j^k dV_0^{(e)} = \int f_i N^k dS_0^{(e)} \quad (34)$$

여기서  $\rho_0$ 는 변형전 고무의 밀도이다.

식 (34)의 첫째항은 관성항으로서, 요소의 질량이 절점에 집중되어 있다고 가정하면,  $\frac{1}{8}m^{(e)}\ddot{d}_{ik}$ 이 된다. 여기서 요소 질량  $m^{(e)} = \rho_0 V_0^{(e)}$ 이다.

식 (33)을 식 (7)에 대입하면  $T_{ji}$ 이 얻어지므로 식 (34)의 둘째항은

$$\int T_{ji} L_j^k dV_0^{(e)} = \int |h_{rs}| g_{jm} (\lambda e_{aa} \delta_{mi} + 2G e_{mi} + \eta_\lambda \dot{e}_{aa} \delta_{mi} + \eta_G \dot{e}_{mi}) L_j^k dV_0^{(e)} \quad (35)$$

이 된다. 식 (35)의 오른쪽 항에서  $|h_{rs}|$ ,  $g_{jm}$ ,  $e_{mi}$ 는 각각 식 (4), (5), (6), (8), 그리고 (12)에 의하여 절점변위 성분  $d_{ik}$ 의 함수로 표시된다. 또 식 (35)의  $\dot{e}_{aa}$ ,  $\dot{e}_{mi}$ 는, 요소 내속도장의 형태함수가 변위장의 형태함수와 동일하다고 가정할 때, 식 (22)의 양변에  $\Delta t$ 로 나누어  $\dot{e}_{mi} = R_{miab} \dot{h}_{ab}$ 이 되고 다시  $\dot{h}_{ab} = L_b^k \dot{d}_{ak}$ 이므로,

$$\dot{e}_{mi} = R_{miab} L_b^k \dot{d}_{ak} \quad (36)$$

이 된다. 식 (36)을 (35)에 적용하면, 결국, 식 (34)의 둘째 항은 요소 절점변위 성분  $d_{ak}$  및 요소 절점속도 성분  $\dot{d}_{ak}$ 의 함수로 유도된다.

요소 전체를 통합하면 다음과 같은 시스템 미분방정식을 얻는다.

$$M\ddot{\underline{d}} + \underline{F}(\underline{\dot{d}}, \underline{d}) = \underline{f}(t) \quad (37)$$

여기서  $M$ 은 시스템 질량행렬,  $\underline{d}$ 는 시스템 절점 변위벡터,  $\underline{f}(t)$ 는 외력벡터이다.  $\underline{F}(\underline{\dot{d}}, \underline{d})$ 는 식

(34)의 둘째 항으로부터 유도되는 감쇠요소와 스프링요소에 의한 시스템 질점력벡터이다.

대부분 유한요소 방정식이 강성계(stiff system)<sup>(3)</sup>에 속하기 때문에 수치적분은 안정한 알고리즘을 택하는 것이 바람직하다. 본 연구에서는 시스템 비선형 미분방정식 (37)을 수치해석하기 위하여 절대 안정적인 Newmark  $\beta$ (NB)법을 사용하고자 한다. NB법은 수치적 과감쇄특성을 가지고 있으며 정도도 양호한 편이다. 비선형 시스템 미분방정식 (37)에 NB-법을 적용하는 과정은 다음과 같다.

증분이론을 적용하면, 첨자  $n$ 을 기지(known)의 상태, 첨자  $n+1$ 를 미지(unknown)의 상태로 할 때,

$$M \ddot{\underline{d}}_n + \underline{F}(\dot{\underline{d}}_n, \underline{d}_n) = \underline{f}(t_n) \quad (38)$$

$$M \ddot{\underline{d}}_{n+1} + \underline{F}(\dot{\underline{d}}_{n+1}, \underline{d}_{n+1}) = \underline{f}(t_{n+1}) \quad (39)$$

이 성립한다. 양변을 빼어 정리하면 다음과 같다.

$$M \Delta \ddot{\underline{d}}_n + C_n \Delta \dot{\underline{d}}_n + K_n \Delta \underline{d}_n = \underline{f}(t_{n+1}) - \underline{f}(t_n) \quad (40)$$

여기서  $C_n = \left( \frac{\partial \underline{F}}{\partial \dot{\underline{d}}} \right)_n$  이고  $K_n = \left( \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{d}} \right)_n$  이다.  $\dot{\underline{d}}_{n+1}$ ,  $\underline{d}_{n+1}$ 은 다음 식으로 주어진다.

$$\dot{\underline{d}}_{n+1} = \dot{\underline{d}}_n + \Delta \dot{\underline{d}}_n \quad (41)$$

$$\underline{d}_{n+1} = \underline{d}_n + \Delta \underline{d}_n \quad (42)$$

여기서

$$\Delta \dot{\underline{d}}_n = \{ (1-\delta) \dot{\underline{d}}_n + \delta \dot{\underline{d}}_{n+1} \} \Delta t_n \quad (43)$$

$$\Delta \underline{d}_n = \Delta t_n \dot{\underline{d}}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (\Delta t_n)^2 \ddot{\underline{d}}_n + \beta (\Delta t_n)^2 \ddot{\underline{d}}_{n+1} \quad (44)$$

이다. 계수  $\delta$ ,  $\beta$ 는 안정성이나 精度의 관점에서 결정해야 할 정수로서, 일반적으로  $\delta=1/2$ 로,  $\beta=1/4$ (정가속도법) 혹은  $\beta=1/6$ (선형가속도법)로 선택한다.<sup>(3)</sup>

### 3. 실무 적용 및 결과 토의

변형 비선형을 고려한 점탄성 Voigt 모델의 변

형체의 유한요소 해석 프로그램을 식 (27) 및 식 (37)을 근거로 개발하고 상용차 엔진 장착용 고무 마운트에 적용하여 정특성 곡선과 동특성곡선(히스테리시스 곡선)을 산출하고자 한다. 그림 2는 칫수가 기입된 고무 마운트의 유한요소망이다. 마운트 상하단은 주철제로 보강되어 있고 고무의 재질은 R515C1 NR이다. 요소망을 미세하게 분할하지 않아도 강성계수의 정밀도가 유지됨을 모사실험으로 확인하고 계산시간의 절약을 위하여 그림 2와 같이 요소 수를 적게 분할하였다.

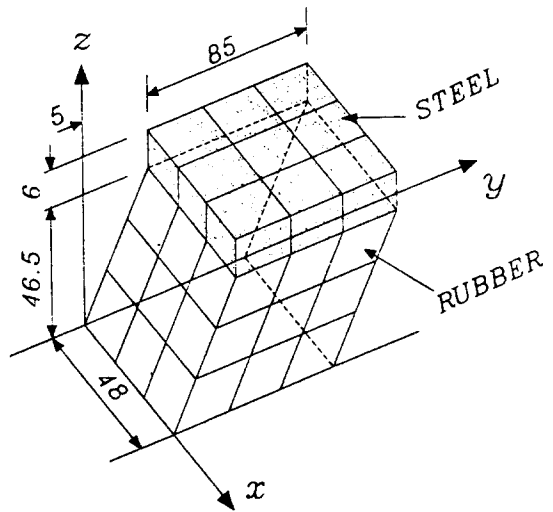


그림 2. 상용차 엔진 마운트의 유한요소 모델(단위 : mm)

#### 3.1 고무 물성치 실험 평가

재료의 기계적 성질을 선형으로 가정한 고무의 물성치(체적탄성계수, 횡탄성계수, 체적점성계수, 및 횡점성계수)가 재료시험에 의해 평가되어야 한다. 그런데 마운트용 고무의 첨가재 함량, 첨가재 분포 상태, 그리고 제작 과정에 따라 물성치가 상당한 차이를 보이고 있기 때문에 재료 물성치의 정확성을 확보하기가 현실적으로 매우 어려운 실정이다. 표 1<sup>(1)</sup>은 국내 고무 납품업소에서 제작한 굴삭기의 엔진 마운트에 대한 가진실험 결과를 수록한 것이다. 같은 종류의 마운트를 8개 샘플링하여 가진 실험한 결과 동강성계수의 표준편차가 평균값의 1/3에 이르도록 큰 편차를 보여주고 있다.

표 1. 굴삭기 엔진 마운트의 동강성 계수 실험 결과  
(단위:  $10^6\text{N/m}$ )

주파수 변 위	10Hz			15Hz			20Hz		
	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.5
case 1	1.86	1.85	1.82	1.85	1.84	1.87	1.87	1.90	1.85
case 2	4.80	4.00	3.70	4.50	4.01	3.80	4.80	4.20	3.70
case 3	3.06	2.66	2.53	3.12	2.66	2.58	3.15	2.70	2.59
case 4	4.50	4.10	3.60	4.70	3.70	3.60	4.60	3.90	3.20
case 5	3.75	3.49	3.05	3.87	3.30	3.10	3.87	3.37	3.08
case 6	3.26	2.96	2.79	3.30	2.84	2.75	3.41	2.88	2.79
case 7	3.50	2.90	2.80	3.60	2.90	2.80	3.50	2.90	2.70
case 8	2.10	2.10	2.00	2.10	2.10	2.00	2.20	2.10	2.20
평 균	3.35	3.01	2.79	3.38	2.93	2.81	3.43	2.99	2.76
표준편차	0.97	0.77	0.63	0.96	0.69	0.64	0.97	0.75	0.54

은 횡탄성계수  $0.700 \times 10^6 (\text{N/m}^2)$ 을 추정하였고 포아송비는 비압축성 재질로 가정하여 0.49로 놓았다. 표 2는 방진 고무의 물성치 실험 데이터이다. 재질은 R515C1 NR로서 제품과 동일한 방진 고무이고 사용된 시편은 덤벨3호를 이용하여 변형률을 30%에서 30% 간격으로 300%까지 측정하였다. 사용결과는 반복수행한 3번의 실험치를 다음과 같이 평균하여 산출하였다.

$$M = 0.7\sigma_1 + 0.2\sigma_2 + 0.1\sigma_3 \quad (45)$$

표 2. 재료 시험 결과

$\epsilon$	$\sigma(\text{kgf/cm}^2)$
0.3	8.522
0.6	13.196
0.9	18.293
1.2	24.546
1.5	32.261
1.8	41.207
2.1	51.095
2.4	62.115
2.7	73.832
3.0	86.855

\* 재질 : 엔진 마운트용 방진고무, R515C1 NR

\* 사용시편 : 덤벨3호

곡선맞춤은 고무제품의 압축(-z)시험 및 전단(+y)시험 데이터를 기준으로 이산화된 곡선 오차의 rms(root mean square) 값을 최소화하는 방향으로 실행하였다. 오차 최소화를 위한 목적함수는 다음과 같다.

$$J = W_1 \sqrt{\sum_{i=1}^N (C_{ex,i} - C_{cal,i})^2} + W_2 \sqrt{\sum_{i=1}^N (S_{ex,i} - S_{cal,i})^2} \quad (46)$$

여기서  $W_1, W_2$ 는 가중치,  $C_{ex,i}, C_{cal,i}$ 는 각각 하중점에서 -z 방향 변위  $d_{c,i}$ 에 대한 압축력의 실험치와 해석치,  $S_{ex,i}, S_{cal,i}$ 는 각각 하중점에서 +y 방향 변위  $d_{s,i}$ 에 대한 전단력의 실험치와 해석치이고 N은 이산화 갯수이다.

### 3.2 물성치 역산에 의한 특성 파라미터 산출

수치해석 결과의 신뢰도는 물성치의 정확성이 전제되어야 하는데 표 1의 실험 결과에 의하면 고무 재질의 물성치 평가에 많은 어려움이 있음을 알 수 있다. 따라서 신뢰성있는 특성파라미터를 얻기 위하여는 고무제품 군 중에서 샘플링하여 직접 실험 추출로 얻을 수 있는데 그 경우는 제품 형태가 다양하기 때문에 실험이 필요하고 경우에 따라서 실험을 위한 지그 설계의 어려움이 따른다.

본 연구에서는, 손쉬운 방향의 특성곡선들을 실험으로 추출한 후 이들의 실험 데이터를 근거로 곡선맞춤(curve fitting)하여 고무의 물성치를 역산한 후, 필요한 특성행렬의 성분들을 산출하는 방법을 제안하고자 한다. 구체적인 내용을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 고무 제품에 대하여 특정 방향의 정특성 실험을 실시한다.
- (2) 실험조건과 일치하는 하중 조건 하에서 정특성 곡선을 산출한다.
- (3) 곡선맞춤법에 의하여 실험치와 가장 근접한 물성치를 찾는다.
- (4) 얻어진 물성치로 원하는 방향의 특성 곡선을 산출한다.

물성치 초기값들은 수집한 정보와 실험을 통하여 다음과 같이 택하였다. 강철 보강재의 횡탄성 계수 및 포아송비는 각각  $0.793 \times 10^{11} (\text{N/m}^2)$ , 0.25로 놓고 고무의 물성치는 엔진 마운트와 같은 재질의 시편을 제작하여 재료시험하고 이로부터

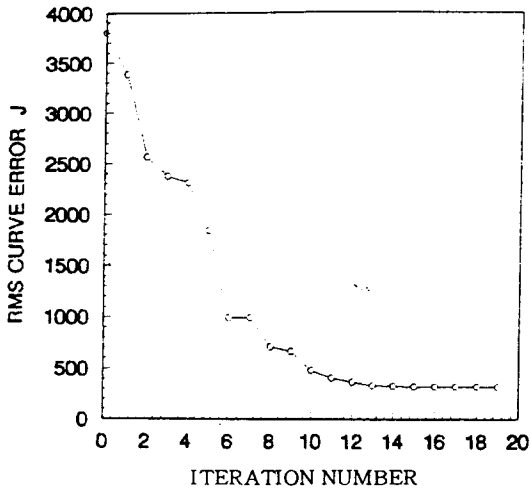


그림 3. 단순직접탐색법에 의한 RMS 곡선오차

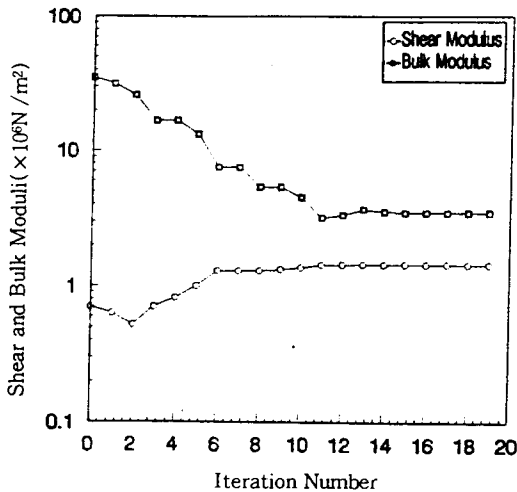


그림 4. 단순 직접 탐색법에 의한 횡탄성계수와 체적탄성계수의 변화

곡선맞춤을 위해 식 (46)을 최소화시키는 횡탄성계수와 체적탄성계수를 찾기 위해서 황금분할에 의한 탐색법(golden section search method)을 적용하였다.<sup>(7)</sup> 가중치  $W_1=1.0$ ,  $W_2=5.0$ 에 대한 목적함수의 최소화 계산 과정이 그림 3에 수록되어 있는데 반복시행 횟수 19 정도에서 수렴되는 경향을 보이고 있다. 반복시행 횟수에 따른 횡탄성계수 및 체적탄성계수의 변화가 그림 4에 도시되어 있다. 횡탄성계수는 초기값보다 약 2배인 1.

$44 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 로 증가하였고 체적탄성계수는 초기값보다 약 1/10인  $3.49 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 로 감소하였다. 이는 고무의 실질 체적변화율이 예상보다 크다는 것을 뜻한다. 체적탄성계수 변화를 포아송비 변화로 나타내면, 0.49에서 0.32로 감소하는 것으로 나타났다.

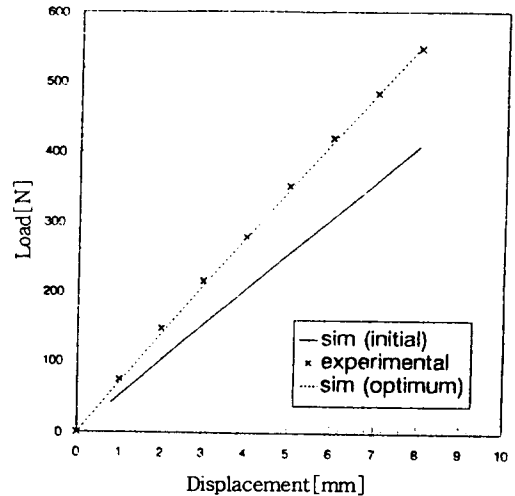


그림 5. (+y) 방향 정적 변위에 대한 반력의 수치해석 결과

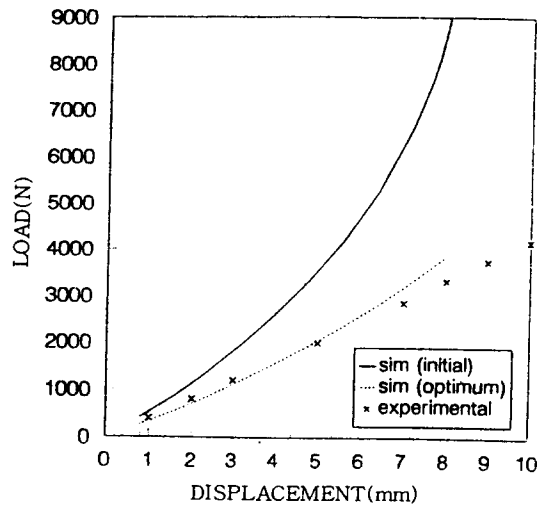


그림 6. (-z) 방향 변위에 대한 반력의 수치해석 결과

그림 5는 +y 방향 변위에 대응하는 반력에 대한 정특성 곡선을, 그림 6은 -z 방향에 대한 정특성 곡선을 도시한 것이다. 수치해석 초기치와 최



적치 그리고 실험치가 비교되어 있다. 이들 방향에 대한 정특성 곡선이 물성치 규명의 근거로 삼았기 때문에 최적치는 실험치와 잘 일치한다.

그림 7은 규명된 고무 물성치로  $-y$  방향에 대한 정특성 곡선을 산출한 결과이다. 최종 결과는 실험 결과와 거의 일치함을 보여주고 있다. 그림 8은  $+z$  방향 정특성 곡선을 도기한 것인데 최종 결과가 기준 실험치에 비교하여 연화되었다. 인장방향 특성곡선의 오차는 크게 개선되지 못하였는데 그 이유는 유한변형과 Hook재질로 가정한 변형체역학 모델의 오차에 기인하는 것으로 판단된다.

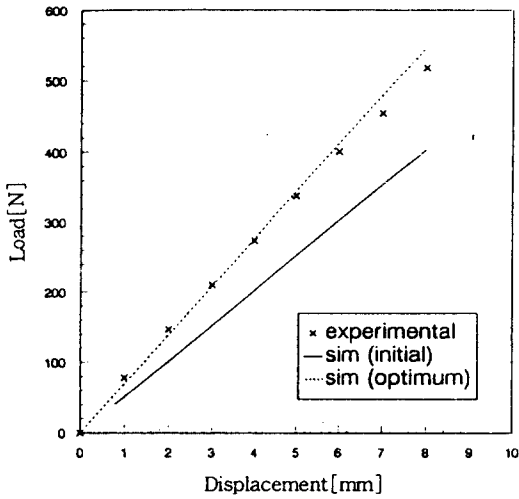


그림 7. ( $-y$ ) 방향 정적 변위에 대한 반력의 수치해석 결과

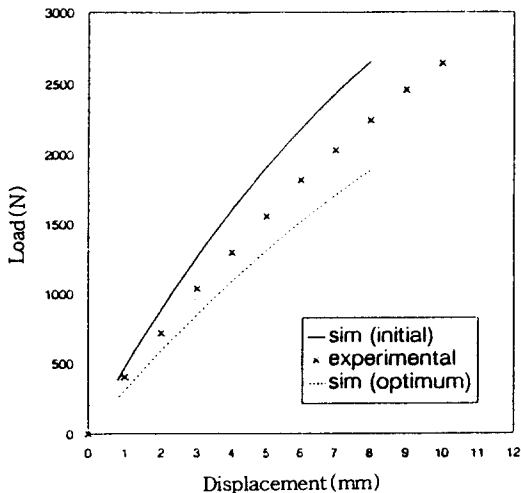


그림 8. ( $+z$ ) 방향 변위에 대한 반력의 수치해석 결과

### 3.3 엔진 마운트의 동특성 곡선 산출

그림 9는 히스테리시스 곡선을 산출하기 위하여 입력한 단순조화변위와 그의 시간도함수인데, 과도응답으로 인한 수치적 불안정을 피하기 위하여  $t=0$ 에서 속도 불연속이 일어나지 않도록 입력 조화변위를 변형시켰다. 그림 10은 고주파인 100Hz, 진폭 0.5mm의 조화변위에 대한 주어진 변위와 계산된 반력으로서 오버슈트가 비교적 큰 과도응답을 보여주고 있다.

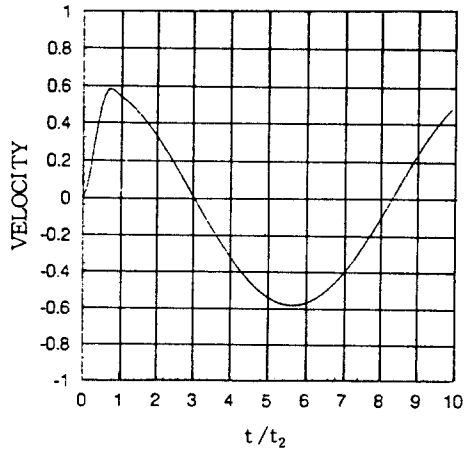
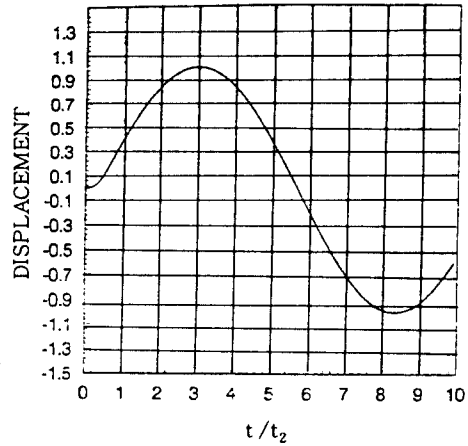


그림 9. 수정된 조화함수와 도함수

고무 재료의 횡손실계수와 체적손실계수를 모두 0.1로 하여 가진주파수 15Hz, 변위 진폭 0.5mm인 수직방향 조화변위에 대한 반력 관계를

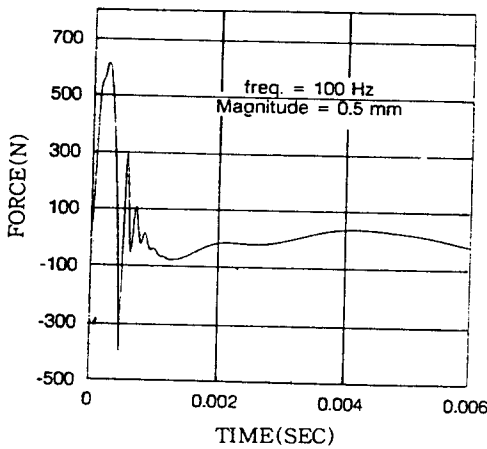
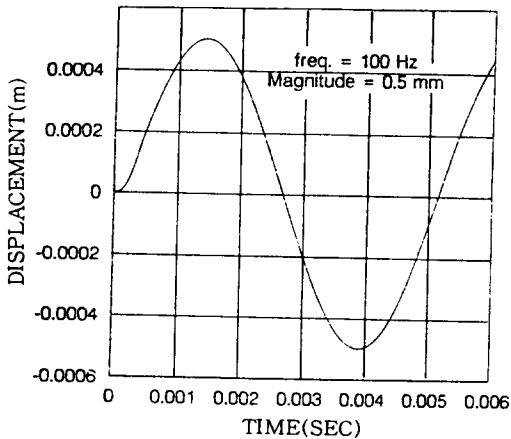


그림 10. 조화변위 입력에 대한 과도반력

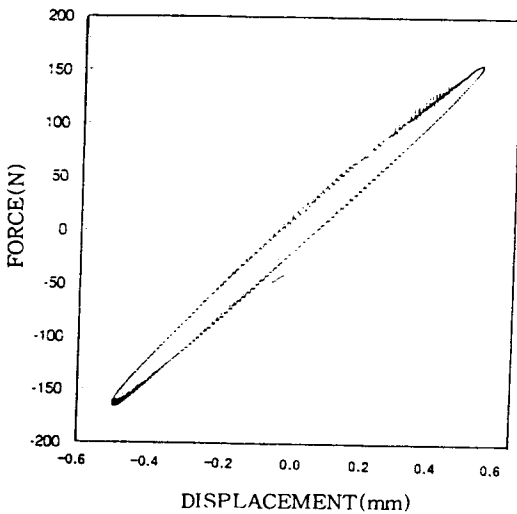


그림 11. z방향 조화변위(15Hz) 가진에 대한 반력의 수치해석 결과

산출한 결과 그림 11과 같이 되었다. 그림 11의 작은 진동은 수치적분 알고리즘의 구조적 특성 오차로 기인하는 것으로서 동강성계수 산출에는 큰 지장이 없는 것으로 사료된다.

표 3은 마운트의 작용점에 수직으로 예비 변위 -3mm, -1mm, 1mm 3mm의 변위를 준 상태에서 0.5mm 진폭, 15Hz의 조화변위를 주어 동강성 계수를 구한 결과들이다. 그림 5-8에 도시된 정특성 곡선의 정강성 계수들과 비교되었다. 동강성 계수는, 예비변위 -3mm일 때, 정강성계수보다 4% 높게 계산되었다.

표 3. 예비 변위가 있는 고무 연결요소의 동강성계수와 손실계수(15Hz)의 수치해석 결과

예비 변위 (mm)	동강성계수 (N/m)	손실계수	정강성계수 (N/m)	동계수
-3.0	430,700	0.0877	414,800	1.04
-1.0	355,800	0.0967	345,100	1.03
1.0	299,300	0.1085	298,400	1.00
3.0	252,900	0.1233	252,000	1.00

\* 동계수 = 동강성계수 / 정강성계수

#### 4. 결 론

고무 연결요소에 대한 정-동 특성곡선을 산출하는 프로그램을 개발하여 실무에 적용한 내용들을 요약하면 다음과 같다.

(1) 압축 및 전단 정특성곡선에 대한 실험치와 해석치의 오차를 rms 목적함수로 정의하고 그 곡선오차가 최소가 되는 횡탄성계수와 체적탄성계수를 산출한 후, 임의방향의 정특성 파라미터들을 산출하는 실무적 방법을 제안하여 실용 가능성을 보였다.

(2) 곡선 맞춤법으로 산출한 물성치로부터 인장 방향의 정특성 곡선을 산출한 결과 실험치와의 오차를 크게 개선시키지 못하였는 바, 이는 고무의 역학모델을 Hook모델로 가정한 것에 기인하는 것으로 판단된다. 보다 양호한 결과를 얻기 위해서는 초탄성 재질에 적합한 역학모델의 적용이 요구된다.

(3)  $t=0$ 에서 속도가 연속적이 되도록 입력 조화변위를 변형시키므로써 오버슈트로 인한 수치 해석상의 발산을 방지할 수 있었다.

감사의 글

연구를 위하여 고무의 물성치 및 경제적 지원을 제공한 현대자동차 울산공장 상용차부에 감사드린다.

참 고 문 헌

1. 박성태, 박노길, '자동차용 방진고무의 형상설계에 관한 연구(1)-고무 isolator의 정/동특성 해석용 전용 프로그램 개발-', 울산대학교 산업기술연구소, 1993. pp.20.
2. Fung, Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, INC. 1965, p.31.
3. Owen, D. R. J. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity: theory and Practice*, Pineridge Press, 1980, pp.60-61.
4. 이봉훈 역, 유한요소법 핸드북-기초편/응용편-, 도서출판 동화기술, 1991, pp.271-289.
5. Rao, S. S., *Mechanical Vibrations*, second edition, Addison Wesley, 1990, pp.102-105.
6. McClintock, F. A. and Argon, A. S., *Mechanical Behavior of Materials*, Addison Wesley, 1966, pp. 238-242.
7. Arora, J. S., *Introduction of Optimum Design*, McGraw-Hill, 1989.

(접수일자 : 1995. 1. 17)