

경계요소법에 의한 점탄성재료의 과도열응력 해석

Analysis of Transient Thermal Stresses in Viscoelastic Solids Using Boundary Element Method

이 상 순*
Lee, Sang-Soon
김 태 형**
Kim, Tae-Hyung

요 약

이 논문은, 선형점탄성체가 과도온도상태에 있을때의 거동을 시간영역 경계요소법에 의해 해석하고 있다. 점탄성체에 대해서 '열유동단순' 거동을 가정하였다. 경계요소 공식화과정을 설명한 후, 예제문제에 대한 수치 해석 결과를 보여주었다.

Abstract

This paper deals with a time-domain boundary element technique suitable for the analysis of linear viscoelastic materials in the presence of transient temperature field. Thermorheologically simple behavior has been assumed. Following an exposition of the boundary element formulation, the numerical results of example problem have been presented.

1. 서 론

일반 구조체에 고분자 재료가 많이 사용됨에 따라, 점탄성 재료가 과도온도상태에 있을때에 나타날 수 있는 열응력에 대한 정확한 해석이 강조되고 있다.

점탄성재료에 대한 열응력해석은 오래전부터 많은 관심을 받아왔다. 1960년대에는, 로켓에 점탄성 고체연료가 널리 사용된 이유로, 점탄성체에 발생하는 열응력 해석이 주요 관심사 중의 하나였

다. Morland and Lee¹⁾는 Leaderman에 의해 제안되었던 점탄성체의 '열유동 단순거동'(thermorheologically simple behavior) 가정을 열응력 연구에 적용하였는데, 그들의 연구는 정상상태 온도 조건에 있는 비압축성 재료에 제한되어 있었다. 여기에서 '열유동 단순거동'이란 온도변화가 점탄성체에 발생하는 경우에 그러한 온도변화는 시간 변화량으로 환산이 가능하다는 가정, 즉 온도-시간 동가가정 (temperature-time equivalence hypothesis)을 말한다. 예를들어, 점탄성체의 물성

* 한국원자력연구소, 원자로기계분야 선임연구원
** 한국원자력연구소, 원자로기계분야 연구원

이 논문에 대한 토론을 1995년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

인 이완계수가 대수시간눈금(logarithmic time scale)을 축으로한 좌표계에 표시될 경우, 점탄성체에 발생하는 온도변화는 이완계수가 원래의 형태를 유지한 상태에서 수평방향으로 이동한 결과로 나타난다. 이와같은 가정은 일정한 온도범위내에서 실험결과와 근사적으로 잘 일치하므로, 그후의 열응력 해석과정에서도 널리 사용되었다. Muki and Sternberg²⁾는 과도온도 상태에 있는 일차원 평판 문제와 단일구(solid sphere)문제에 대한 정밀해를 계산하였다. 그들은 환산시간영역(reduced time domain)에서 단일선회적분(convolution integral)을 유도한 후에, 라플라스변환을 사용하여 해를 구하였다. 그후에, Valanis and Lianis³⁾는 일차원 무한평판, 단일구, 그리고 무한길이의 실린더 문제들에 대한 해를 무한급수형태로 나타내었다.

위의 접근법들은 수학적 해석방법을 기본으로 하고 있어서, 문제의 경계면의 기하학적 형상이 복잡한 경우에는 해석이 매우 어렵거나 불가능하다. 1970년에, Taylor et al.⁴⁾들은 유한요소법을 기본으로한 수치해석방법을 제시하고, 중공 실린더문제를 해석하였다. 그러나 이러한 유한요소법을 이용한 점탄성체 해석에 관한 연구들은 그후에는 별로 활발하게 진행되지 않았다.

최근에, Lee and Westmann⁵⁾은 온도변화를 받는 점탄성체의 거동을 해석하는 시간영역 경계요소법을 기술하고, 일정한 값의 온도상태를 균일하게 유지하고 있는 탄성-점탄성 복합 중공구에 대한 해석 결과를 제시하였다. 점탄성체에 대해 ‘열유동 단순거동’가정을 적용하여, 경계적분방정식을 실제시간영역(real time domain)이 아닌 환산시간영역에서 유도하였고, 최종해는 실제시간으로 전환하여 얻어졌다.

이번 논문에서는, Lee and Westmann이 발표한 경계요소법을 과도온도 상태에 있는 점탄성체 문제의 해석에 확장하였다. 해석에 필요한 경계요소공식화 과정을 설명한 후에, 제안된 방법의 정확성과 효율성을 보여주기 위하여 점탄성 각기동문제에 대한 해석결과를 제시하였다.

2. 경계요소법에 의한 해석법

이 논문에서는, 다음과 같은 가정들이 사용되었다.

- a) 점탄성체의 체적계수는 탄성거동을 나타낸다.
- b) 전단계수는 열유동 단순거동을 갖는다.
- c) 어떠한 체력(body force)도 존재하지 않는다.
- d) 과도온도변화는 점탄성체에 균일하게 발생한다.

이러한 가정아래서, 요구되는 경계적분방정식은 환산시간영역에서 다음과 같이 주어진다⁵⁾

$$\begin{aligned}
 & c_{ij}(\mathbf{y})\hat{u}_j(\mathbf{y}, \xi) \\
 & + \int_S [\hat{u}_j(\mathbf{y}', \xi) T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) + \int_{0+}^{\xi} \hat{u}_j(\mathbf{y}', \xi - \xi') \\
 & \quad \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \xi')}{\partial \xi'} d\xi'] dS(\mathbf{y}') \\
 & = \int_S [\hat{t}_j(\mathbf{y}', \xi) U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) + \int_{0+}^{\xi} \hat{t}_j(\mathbf{y}', \xi - \xi') \\
 & \quad \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \xi')}{\partial \xi'} d\xi'] dS(\mathbf{y}') \quad (1) \\
 & + \int_S [\hat{\gamma}(\xi) n_j U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) + \int_{0+}^{\xi} \hat{\gamma}(\xi - \xi') n_j \\
 & \quad \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \xi')}{\partial \xi'} d\xi'] dS(\mathbf{y}')
 \end{aligned}$$

식(1)에서, u_i 와 t_i 는 경계면에서의 변위와 표면력(traction)을 나타내고, S는 주어진 문제 영역을 둘러싸고 있는 경계면을 가리킨다. $c_{ij}(\mathbf{y})$ 는 경계면의 기하학적 형상에만 의존하는 함수이다. 점탄성 기본해 $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \xi)$ 와 $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \xi)$ 들은 탄성-점탄성 대응원리를 이용하여, 선형탄성학의 켈빈(Kelvin) 기본해들로부터 유도될 수 있다. 자세한 계산과정은 참고문헌 6과 7에 나타나 있다.

$\hat{\gamma}(\xi)n_k$ 는 균일한 온도변화 $\Delta \hat{T}(\xi)$ 로 인한 영향을 나타낸다. 여기에서 n_k 는 경계면위에서 단위바깥방향 법선의 성분들을 가리키고, $\hat{\gamma}(\xi)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{\gamma}(\xi) = 3K \alpha_0 \hat{\Theta}(\xi) \tag{2}$$

식(2)에서 K는 점탄성체의 체적계수를 가리키고, α_0 는 기본온도에서의 열팽창계수를 나타내며, '위 온도(pseudo-temperature)' $\hat{\Theta}(\xi)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\Theta}(\xi) = \frac{1}{\alpha} \int_{T_0}^{T(\xi)} \alpha(T) dT \tag{3}$$

식(3)에서 $\alpha(T)$ 는 온도에 의존하는 점탄성체의 열팽창계수를 표시한다. 또한 식(1)에서 나타나는 '환산시간(reduced time)' ξ 는 다음식으로 표시된다. 즉

$$\xi = f(t) = \int_0^t \phi(\lambda) d\lambda, \xi' = f(t') \tag{4}$$

식(4)에서 t는 실제시간(real time)을 가리키고, '이동함수(shift function)' $\phi(\lambda)$ 는 재료의 물성으로, 실험에 의하여 결정된다.

내부영역에서의 응력 $\hat{\sigma}_{ij}$ 는 다음식으로 주어진다⁵⁾.

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \\ &= \int_S [\hat{t}_k(\mathbf{y}', \xi) D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; 0+) + \int_{0+}^{\xi} \hat{t}_k(\mathbf{y}', \xi - \xi') \\ & \quad \frac{\partial D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; \xi')}{\partial \xi'} d\xi'] dS(\mathbf{y}') \\ & - \int_S [\hat{u}_k(\mathbf{y}', \xi) S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; 0+) + \int_{0+}^{\xi} \hat{u}_k(\mathbf{y}', \xi - \xi') \\ & \quad \frac{\partial S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; \xi')}{\partial \xi'} d\xi'] dS(\mathbf{y}') \tag{5} \\ & + \int_S [\hat{\gamma}(\xi) n_k D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; 0+) + \int_{0+}^{\xi} \hat{\gamma}(\xi - \xi') n_k \\ & \quad \frac{\partial D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; \xi')}{\partial \xi'} d\xi'] dS(\mathbf{y}') \end{aligned}$$

식(5)에서 점탄성 응력커널 S_{kij} 와 D_{kij} 들은 탄성-점탄성 대응원리를 관련 탄성표현식에 적용하여 얻을 수 있다⁷⁾.

식(1)은 두종류의 적분들을 포함하고 있다. 첫 번째의 적분은 경계적분이고, 두번째의 것은 시간

적분이다. 일반적으로, 식(1)을 수학적인 방법으로 직접 적분한다는 것은 불가능하며, 따라서 수치적인 방법에 의존해야 한다. 시간적분에 대해서는 수정 심프슨의 공식을, 경계적분에 대해서는 표준 경계적분방법을 이용하여 식(1)을 효과적으로 처리할 수 있는데, 자세한 계산과정은 참고문헌 5에서 설명되어진다. 이 논문에서는, 기하적인 변동과 함수적인 변동을 표현하기 위해서 2차 형성함수(quadratic shape function)를 사용하였다. 결과적으로, 식(1)은 다음과 같은 행렬형태의 방정식으로 쓸 수 있다.

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{t}\} + \{\mathbf{B}_T\} + \{\mathbf{R}\} \tag{6}$$

식(6)에서 \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 는 영향행렬을 나타내고, \mathbf{B}_T 는 온도변화로 인한 영향을, 그리고 \mathbf{R} 은 점탄성으로 인한 입력값이다. 식(6)에 경계조건을 적용하여 풀면, 경계면에서의 변위와 표면력을 얻을 수 있다. 내부영역에서의 응력을 나타내는 식(5)는 식(6)으로부터 얻어진 경계면에서의 변위와 표면력을 사용하여 직접계산된다. 시간적분에 대해서는 수정심프슨공식을 사용하고, 경계적분에 대해서는 표준경계요소법을 적용하여 해결한다. 얻어진 결과들은 환산시간의 함수로 표현되며, 최종해는 실제시간으로 전환하여 얻어진다.

3. 수치 예제

2장에서 설명한 방법의 효율성과 정확성을 보여 주기 위해서 사각형 단면을 갖는 점탄성 각기둥 문제가 선택되었다. 이 예제에서는, 점탄성체의 모델로서 체적계수는 탄성거동을, 전단계수는 표준 선형고체 거동을 한다고 가정하였다. 즉,

$$K(t) = K_0$$

$$G(t) = G_0 + G_1 \exp\left(-\frac{t}{t^*}\right) \tag{7}$$

식(7)에서, K_0 , G_0 , 그리고 G_1 들은 양수이고, t^* 는 재료의 이완시간을 나타낸다.

예제로써, 그림 1에 나타난 바와 같이 각기둥의

양쪽 단면에 균일한 인장력 $P_0H(t)$ 와 짐차로 증가하는 과도온도변화를 동시에 받고있는 점탄성 각기동 문제를 풀어본다. 여기에서 $H(t)$ 는 Heaviside unit step 함수를 가리킨다. 이 예제에서는 $P_0=100N/cm^2$ 가 사용되었다. 각기동의 두께에 따른 온도분포는 열 전도방정식을 풀면 구할 수가 있는데, 이 예제에서는 계산의 단순화를 위해서 온도분포가 두께내에서 균일하다고 가정하였고, 시간에 따른 온도변화는 다음과 같이 선택되었다. 즉

$$\Delta T(t) = 15[1 - \exp(-1.5t)] \text{ } ^\circ\text{C} \quad (8)$$

이동함수로는 PMMA(poly methyl methacrylate)에 대한 실험결과가 사용되었다²⁾. 즉,

$$\phi(t) = 10^{3.6} \exp\{-6.908 \times 10^{-3}[30 - \Delta T(t)] \times [\Delta T(t) + 40 + 0.0365 \Delta T^2(t)]\} \quad (9)$$

수치계산에는 PMMA에 대한 물성값들이 사용되었다.^{2,8)}:

$$\begin{aligned} K_0 &= 2.37 \times 10^5, & G(0) &= 0.79 \times 10^5, \\ G(\infty) &= 0.37 \times 10^5 & \text{N/cm}^2 & \\ \alpha &= 8 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, & t^* &= 1.2 \text{ hr.} \end{aligned} \quad (10)$$

문제의 대칭성으로 인해, 오직 각기동의 절반만 모델화하면 된다. 이 문제를 모델화하는데, 그림 1에 보여준 바와 같이 6개의 2차변동 4각형 경계요소가 사용되었다. 변위 u_y 와 응력 σ_{yy} 에 대한 경계요소 해석결과를 정밀해와 비교하였다. 이 문제에 대한 정밀해는 탄성-점탄성 대응원리를 관련 탄성해에 적용하므로써 얻어졌다. 수치해석결과와 오차를 표 1에 열거하였고, 변위의 시간에 따른 변화를 그림 2에 나타내었다. 이 예제에서 나타난 바와 같이 제안된 해석방법의 적용은 매우 정확하고 안정된 수치해석결과를 산출하고 있다.

표 1. 경계요소법에 의한 수치해석오차(시간 $t=9.0$)

σ_{yy} ($y=0$)	u_y ($y=L$)
1 %	0.5 %

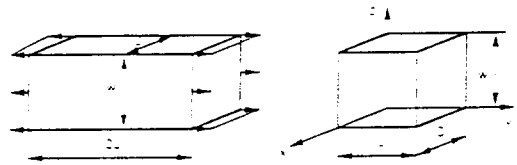


그림 1. 점탄성 각기동의 경계요소 해석 모델

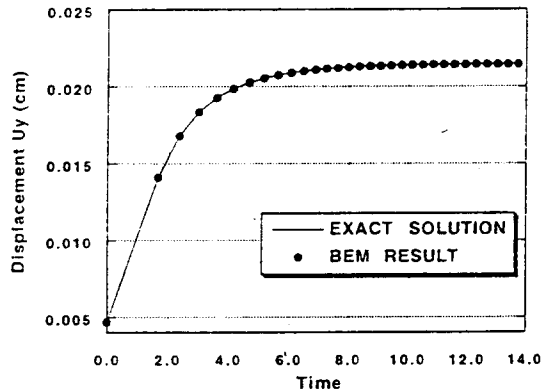


그림 2. 점탄성 각기동의 시간 변화에 따른 변위 $u_y(y=L)$

4. 결 론

이 논문에서는 시간영역 경계요소법을 이용하여 과도온도변화 상태에 있는 점탄성체의 변위와 응력을 계산하였다. 점탄성체에 대해서 열 유동 단순거동을 가정하였고, 환산시간을 시간변수로 한 경계적분방정식이 사용되었다. 최종해는 환산 시간영역의 해를 실제 시간영역에서의 해로 전환하여 얻어졌다.

예제의 결과에서 보여준 것처럼, 본 논문에서 제시한 방법은 다른 점탄성 구조체문제에 대해서도 유용하게 적용될 수 있다.

참 고 문 헌

1. Morland, L. W. and Lee, E. H., "Stress Analy-

- sis for Linear Viscoelastic Materials with Temperature Variation," *Trans. Society of Rheology*, 4, 1960, pp. 233-263.
2. Muki, R. and Strenberg, E., "On Transient Thermal Stresses in Viscoelastic Materials with Temperature Dependent Properties," *J. Applied Mechanics, Trans. ASME*, 28, 1961, pp. 193-207.
 3. Valanis, K. C. and Lianis, G., "A Method of Analysis of Transient Thermal Stresses in Thermorheologically Simple Viscoelastic Solids," *Trans. ASME, J. Applied Mechanics*, 31, 1964, pp. 47-52.
 4. Taylor, R. L., Pister, K. S. and Goudreau, G. L., "Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids," *Int. J. Numer. Meth. Engr.*, 2, 1970, pp. 45-59.
 5. Lee, S. S. and Westmann, R. A., "Application of High Order Quadrature Rules to Time-Domain Boundary Element Analysis of Viscoelasticity", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 38, 1995, pp.607-629.
 6. Lee, S. S., Sohn, Y. S., and Park, S. H., "On Fundamental Solutions in Time-Domain Boundary Element Analysis of Linear Viscoelasticity," *Engineering Analysis with Boundary Element*, 13, 1994, pp.211-217.
 7. Lee, S. S., "Time-Domain Boundary Element Analysis of Viscoelastic Solids Using Realistic Relaxation Functions," *Computers & Structures*, 55, 1995, pp. 1027-1036.
 8. Gurtine, M. E. and Murphy, L. F., "On Optimal Temperature Paths for Thermorheologically Simply Viscoelastic Materials," *Q. Appl. Math.*, 38, 1980, pp. 179-189.

(접수일자 : 1995. 9. 23)