

탄성-점탄성 복합구조체의 경계요소해석

Boundary Element Analysis of Elastic-Viscoelastic Compound Structure

이 상 순*
 Lee, Sang-Soon
 김 태 형**
 Kim, Tae-Hyung

.....

요 약

이 논문에서는 시간영역 경계요소법을 사용하여 탄성-점탄성 복합구조체의 변위와 응력을 구하는 과정을 다루고 있다. 종속영역법을 도입하여, 구조물을 탄성영역과 점탄성영역으로 나누었다. 구조물의 공유경계면에 변위연속조건과 표면력 평형조건을 적용하여, 경계요소공식을 유도하였다. 예제의 문제에 대한 수치해석 결과를 제시하였다.

Abstract

The time-domain boundary element analysis has been attempted for investigating the displacement and stress in an elastic-viscoelastic compound structure. The subdomain technique has been employed and the whole domain has been divided into two subdomains, which are respectively a homogeneous elastic zone and a homogeneous viscoelastic zone. The boundary element equation has been formulated using the equilibrium and continuity conditions at the common interface. The numerical results of example problem has been presented.

.....

1. 서 론

고분자재료는 공학구조물에서 플라스틱 파이프나 접속재등과 같이 단일재료로 사용되기도 하지만, 복합재료평판이나 필라멘트와인딩 압력용기처럼 탄성재료와 결합하여 사용되고 있다. 이러한 복합구조물의 수명이나 안전성을 예측하기 위해

서는 응력과 변위에 대한 정확한 해석이 필요하다.

시간영역 경계요소법은 균일한 점탄성체의 해석에 매우 유용하고 효과적인 수치해석법임이 증명되어 왔다. 점탄성체문제에 대한 경계요소법의 시간영역 접근법은 처음 Banerjee와 Butterfield¹⁾에 의해 공식화 된 이래, Shinokawa²⁾ 등, Tanaka³⁾

* 한국원자력연구소, 원자로기계분야 선임연구원
 ** 한국원자력연구소, 원자로기계분야 연구원

이 논문에 대한 토론을 1995년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

그리고 Sim과 Kwak⁴⁾ 등에 의해 응용되어왔다. 이러한 시간영역 경계요소법은 Lee와 Westmann⁵⁾에 의해 해석의 정확성과 안정성이 크게 개선되었으며, Lee⁶⁾ 등, Lee⁷⁾에 의해 복잡한 점탄성체의 해석도 가능하게 되었다.

이 논문에서는 탄성-점탄성 복합구조물의 해석에 효과적인 방법을 기술하려고 한다. 경계요소법에 의한 접근방법을 2장에서 자세히 설명한 뒤에, 탄성-점탄성 복합실린더 문제에 대한 수치해석 결과를 제시하였다.

2. 탄성-점탄성 복합구조물에 대한 경계요소법

어떠한 체력도 존재하지 않는다는 가정아래, 상온상태에 있는 등질, 등방성 선형점탄성체에 대한 경계적분방정식은 다음과 같이 주어진다.⁵⁾

$$\begin{aligned} & c_{ij}(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}, t) \\ & + \int_S \left[u_j(\mathbf{y}', t) T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) \right. \\ & \quad \left. + \int_{0+}^t u_j(\mathbf{y}', t-t') \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t')}{\partial t'} dt' \right] dS(\mathbf{y}') \\ & = \int_S \left[t_j(\mathbf{y}', t) U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) \right. \\ & \quad \left. + \int_{0+}^t t_j(\mathbf{y}', t-t') \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t')}{\partial t'} dt' \right] dS(\mathbf{y}') \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)에서 u_i 와 t_i 는 각각 경계면에서의 변위와 표면력(traction)을 나타내고, S 는 주어진 문제의 경계면을 가리킨다. $c_{ij}(\mathbf{y})$ 는 경계면의 기하학적 형상에만 의존하는 함수이다. 점탄성 기본해 $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t)$ 와 $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t)$ 들은 탄성학에서 얻어진 켈빈(Kelvin) 문제의 기본해에 탄성-점탄성 대응원리를 적용함으로써 얻어질 수 있다.^{6,7)}

식(1)에 대해서, 시간적분에 대해서는 수정심프슨공식(modified Simpson's rule)을, 경계적분에 대해서는 표준경계적분법을 이용하므로써, 정확한 해를 얻을 수가 있다. 자세한 설명은 참고문헌 [5]에 주어져 있다.

식(1)은 등질성 점탄성체에 대한 경계적분방정식이다. 그림 1에 보여준것 처럼, 탄성-점탄성 복

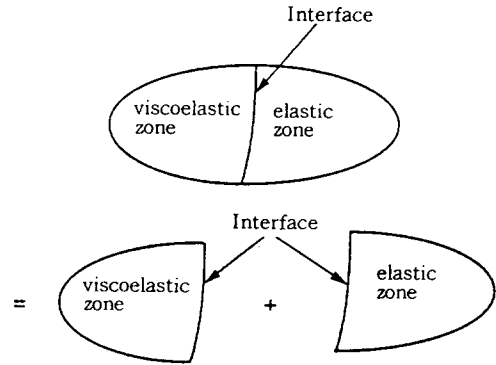


그림 1. 탄성-점탄성 복합구조체에 대한 종속영역 접근법.

합구조체(elastic-viscoelastic compound structure)문제를 경계요소법으로 풀기 위해서는, 먼저 전체 영역을 각각 탄성영역(elastic zone)과 점탄성영역(viscoelastic zone)으로 분리한다. 분리된 각각의 영역에 독립된 경계적분방정식을 적용하여야 하는데, 이 경우 점탄성 영역에 대해서는 점탄성 경계적분방정식을, 탄성영역에 대해서는 탄성 경계적분방정식을 사용한다. 이러한 각각의 방정식은 다음과 같은 행렬방정식으로 쓸 수 있다. 즉, 점탄성 영역에서는

$$[\mathbf{H}^1 \mathbf{H}^{12}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^{12} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}^1 \mathbf{G}^{12}] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^1 \\ \mathbf{t}^{12} \end{Bmatrix} + [\mathbf{R}] \quad (2)$$

이고, 탄성영역에서는

$$[\mathbf{H}^2 \mathbf{H}^{21}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^{21} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}^2 \mathbf{G}^{21}] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^2 \\ \mathbf{t}^{21} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이다. 식(2)와 (3)에서, 윗 첨자 '1'과 '2'는 각각 점탄성영역과 탄성영역을 가리키고, '12'와 '21'는 두영역의 공유면(common interface)을 나타낸다. \mathbf{H} 와 \mathbf{G} 는 각각의 영역에서의 영향행렬들을 나타내고, \mathbf{R} 는 점탄성체의 이력에 의한 영향을 가리킨다.

두 영역의 공유면에서는 변위의 연속조건과 표면력의 평형조건이 만족되어야 하는데, 그와 같은 조건들은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u^{21} &= u^{12} \\ t^{12} &= -t^{21} \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)를 식(2)와 (3)에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 행렬방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^2 & 0 & G^{12} \\ 0 & H^2 & H^2 & -G^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^{12} \\ u^2 \\ t^{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^1 \\ t^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

식(5)에 경계조건들을 적용하여 계산하면, 경계면에서의 변위와 표면력들을 얻을 수 있다.

3. 수치 해석 예제

2장에서 설명한 방법의 효율성과 정확성을 보여주기 위해서 탄성-점탄성 복합실린더 문제가 선택되었다. 이 예제에서는, 점탄성체의 모델로써 체적계수는 탄성거동을, 전단계수는 표준 선형고체 거동을 한다고 가정하였다. 즉,

$$\begin{aligned} K(t) &= K_0 \\ G(t) &= G_0 + G_1 \exp\left(-\frac{t}{t^*}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)에서, K_0 , G_0 그리고 G_1 들은 양수이고, t^* 는 재료의 이완시간을 나타낸다.

그림 2에 보인바와 같이 탄성-점탄성 복합 실린더의 바깥원주를 따라 균일한 외부압력 $P_0H(t)$ 가 작용하고 있다. 여기에서, 반지름 a 의 안쪽 실린더는 선형 탄성체이고, 반지름이 각각 a 와 b 인 바깥중공 실린더는 선형 점탄성체이다. $H(t)$ 는 Heaviside unit step 함수를 나타낸다. 문제의 대칭성으로 인해, 오직 복합실린더의 4분의 1만 모델화 하던데, 25개의 2차 변동 경계요소로 이루어진 해석 모델이 그림 2에 나타나 있다. 이 예제에서는 $P_0=100$ ksi, $a=6$ in 그리고 $b=10$ in가 사용되었다. 이예제에서 사용된 다른 수치값들은 아래에 나타나 있다.

$$G^e = 55000 \text{ ksi}$$

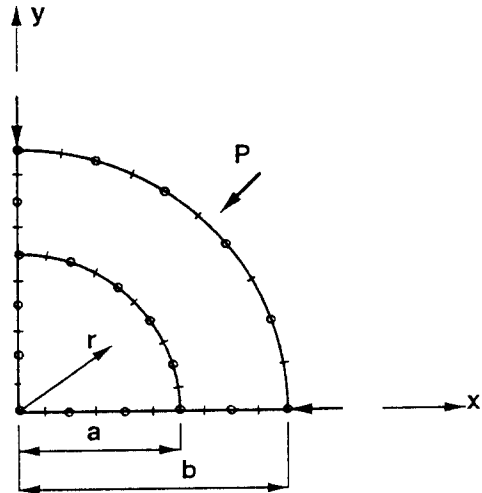


그림 2. 복합 실린더와 경계요소 모델

$$\begin{aligned} V^e &= 0.24 \\ G(0) &= 464 \text{ ksi} \\ G(\infty) &= 127 \text{ ksi} \\ K_0 &= 1000 \text{ ksi} \\ t^* &= 2 \text{ sec} \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)에서 G^e 와 V^e 는 각각 탄성체의 전단계수와 포아손의 비를 가리킨다.

경계요소 해석 결과로 얻어진 반경방향변위 u_r , 반경방향응력 σ_r 그리고 원주방향응력 σ_θ 가 그림 3-6들에 나타나 있고, 그러한 결과들은 이 문제에 대한 정밀해와 비교되었다. 이 문제에 대한 정밀해는 탄성-점탄성 대응원리를 관련 탄성해에 적용하여 구하였는데 계산된 결과는 다음과 같다.

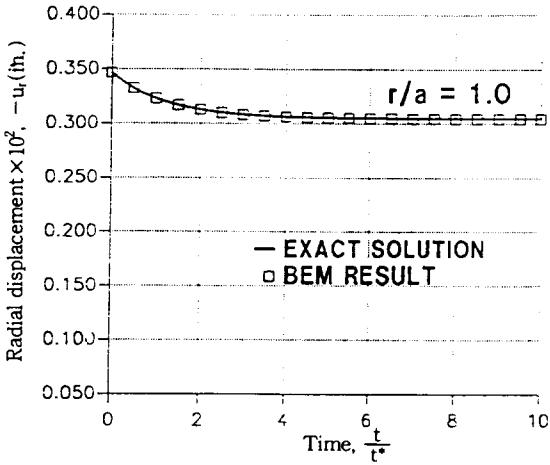


그림 3. 복합 실린더의 반경방향 변위

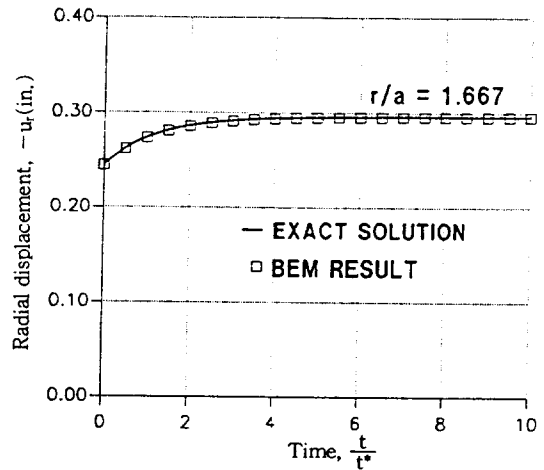


그림 4. 복합 실린더의 반경방향 변위

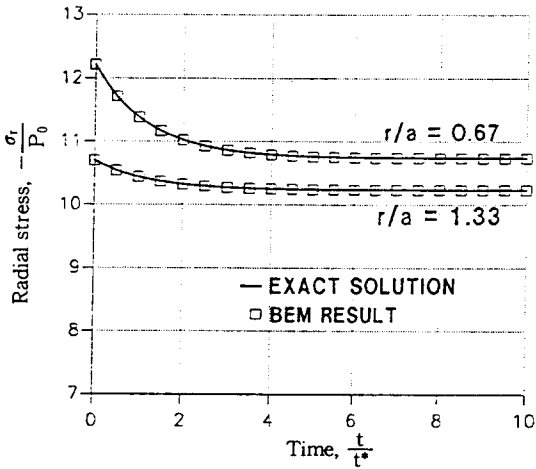


그림 5. 복합 실린더의 반경방향 변위

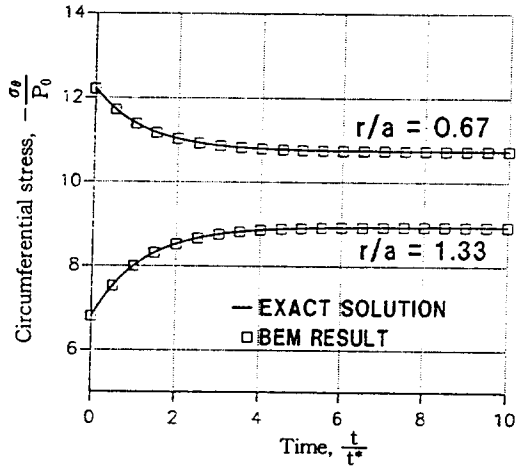


그림 6. 복합 실린더의 원주방향 응력

i) $r \leq a$

$$u_r(r,t) = -P_0 r \cdot 10^{-8} (507.66 + 70.74e^{-0.4113t} - 0.88e^{-0.4995t})H(t)$$

$$\sigma_r(r,t) = -P_0 (1.0739 + 0.1496e^{-0.4113t} - 0.00187e^{-0.4995t})H(t)$$

$$\sigma_\theta(r,t) = \sigma_r(r,t) \quad (8)$$

ii) $a \leq r \leq b$

$$\sigma_r(r,t) = P_0 (1.0739 + 0.1496e^{-0.4113t} - 0.00187e^{-0.4995t})$$

$$\times (0.5625 - \frac{56.25}{r^2})H(t)$$

$$- P_0 (1.5625 - \frac{56.25}{r^2})H(t) \quad (9)$$

$$u_r(r,t) = \frac{P_0 r}{10^8} [(28977. + 8071.6e^{-0.4113t} + 0.46e^{-0.4995t} - 7291.8e^{-0.4514t} + (237830. - 2931.2e^{-0.4113t} + 0.15e^{-0.4995t} - 160840.e^{-0.1369t}) \frac{b^2}{r^2}]H(t)$$

$$-\frac{P_0 r}{10^4} [(7.4952 - 0.7292e^{-0.4514t}) + (61.52 - 44.68e^{-0.1369t}) \frac{a^2}{r^2}] H(t)$$

그림에 나타난바와 같이 경계요소 해석법의 적용은 매우 정확하고 안정된 수치해석 결과를 산출한다.

4. 결 론

탄성-점탄성 복합구조체에 대한 경계요소해석이 시도되었다. 전체 영역은 각각의 등질 영역으로 나뉘어 졌고, 각각의 영역에 대해서 독립된 경계적분 방정식이 적용되었다. 이러한 문제는 각 영역간의 공유면에서 변위연속 조건과 표면력 평형조건을 적용하여 해결되었다. 이 논문의 예제에서 보여준바와 같이, 경계요소에 의한 수치해석은 매우 만족스러운 결과를 보여주고 있다. 따라서, 이 논문에서 기술한 방법은 실제 복합구조체의 해석에 응용할 수가 있다고 결론내려진다.

참 고 문 헌

1. Banerjee, P. K. and Butterfield, R. *Boundary Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1981.
2. Shinokawa, T., Kaneko, N., Yoshida, N., and

- Kawahara, M., "Application of Viscoelastic Combined Finite and Boundary Element Analysis to Geotechnical Engineering", in *Boundary Element VI*, Brebbia, C.A. (ed.), Computational Mechanics Publication, (10), 1985, pp.37-46.
3. Tanaka, M., "New Integral Equation Approach to Viscoelastic Problems", in *Topics in Boundary Element Research, Vol.3: Computational Aspects*, Brebbia, C.A. (ed.), Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987, pp.25-35.
4. Sim, W. J. and Kwak, B. M., "Linear Viscoelastic Analysis in Time Domain by Boundary Element Method", *Computers & Structures*, Vol.29, 1988, pp.531-539.
5. Lee, S. S. and Westmann, R. A., "Application of High Order Quadrature Rules to Time-Domain Boundary Element Analysis of Viscoelasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.38, 1995, pp.607-629.
6. Lee, S. S., Sohn, Y. S., and Park, S. H., "On Fundamental Solutions in Time-domain Boundary Element Analysis of Linear Viscoelasticity", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.13, 1994, pp.211-217.
7. Lee, S. S., "Time-Domain Boundary Element Analysis of Viscoelastic Solids Using Realistic Relaxation Functions", *Computers & Structures*, Vol.55, 1995, pp.1027-1036.

(접수일자 : 1995. 9. 23)