

무한 적층 구조체의 자유경계면에 나타나는 특이응력의 경계요소해석

Boundary Element Analysis of Singular Stresses at Interface Edge of Infinitely Layered Structure

이 상 순*
Lee, Sang-Soon

요 약

이 논문에서는 경계요소법을 사용하여 서로 다른 탄성체들이 무한하게 적층된 복합구조체의 자유경계면에서 발생하는 특이 응력을 조사하였다. 종속영역법을 도입하여, 해석모델을 독립된 탄성영역들로 나누었고, 해석모델의 공유경계면에 변위연속조건과 표면력 평형조건을 적용하여 경계요소공식을 유도하였다. 예제의 문제에 대한 수치해석 결과를 제시하였다.

Abstract

The boundary element analysis has been attempted for investigating the singular stress at the interface edge of infinitely layered structure. The subdomain technique has been employed and the analysis model has been divided into two subdomains, which are respectively homogeneous elastic zones. The boundary element equation has been formulated using the equilibrium and continuity conditions at the common interface. The numerical results of example problem has been presented.

1. 서 론

서로 다른 탄성체들로 구성된 복합구조체의 자유경계면에서 발생하는 특이응력(singular stresses)문제는 오랫동안 많은 관심을 받아왔다.^[1,3] 이러한 문제는 섬유보강 복합재료나 접착재를 이용하여 결합된 고체구조 등에 공통적으로 나타나고 있으며, 현재도 그러한 문제에 대한 관심이 지속되고 있다. 복합구조체의 공유경계면(common

interface)에 따라 발생하는 응력들은 자유경계면(free edge)를 야기시킨다. 따라서 복합구조체의 특이응력에 대한 조사는 구조물의 수명이나 안전을 예측하는데 매우 중요하다고 볼 수 있다.

본 논문에서는 경계요소법을 사용하여, 서로 다른 탄성체들이 무한하게 적층된 복합구조체에 횡방향 균일응력이 작용하고 있을 때 자유경계면 근처에 나타나는 특이응력을 조사하였다. 해석을 수행하는데 있어서, 먼저 이차원 해석모델과 관련

* 한국원자력연구소 원자로 기계분야 선임연구원

이 논문에 대한 토론을 1996년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

경계조건들을 제시하였고, 다음에 종속영역법(subdomain technique)을 도입하여, 해석모델을 독립된 탄성영역들로 나눈다음, 공유경계면에 변위연속조건과 표면력 평형조건을 적용하여, 경계요소공식을 유도하였다. 제시한 수치해석 결과는 무한적층 복합구조체에 나타나는 특이응력의 특성을 나타내어 준다.

2. 탄성복합구조물에 대한 경계요소법

그림 1(a)는 무한하게 적층된 복합구조체에 횡방향 균일응력이 작용하는 것을 나타내고 있으며, 그림 1(b)는 해석모델을 보여주고 있다. 여기에서 복합구조체의 공유경계면에는 아무런 균열이 존재함이 없이 완전한 결합을 이루고 있다고 가정한다. 어떠한 체력도 존재하지 않는다는 가정아래, 상온상태에 있는 등질, 등방성 선형탄성체에 대한 경계적분방정식은 다음과 같이 주어진다.^[4]

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \int_S u_j(y')T_{ij}(y,y')dS(y') = \int_S t_j(y')U_{ij}(y,y')dS(y') \quad (1)$$

식(1)에서 u_i 와 t_i 는 각각 경계면에서의 변위와 표면력(traction)을 나타내고, S 는 주어진 문제의 경계면을 가리킨다. $c_{ij}(y)$ 는 경계면의 기하학적 형상에만 의존하는 함수이다. $U_{ij}(x,x')$ 와 $T_{ij}(x,x')$ 들은 탄성학에서 얻어진 켈빈(Kelvin) 문제의 기본해들이다.

식(1)은 등질성 탄성체에 대한 경계적분방정식이다. 그림 1(b)의 해석모델을 경계요소법으로 풀기 위해서는, 먼저 전체 영역을 각각 독립된 탄성영역들로 분리하고, 분리된 각각의 영역에 독립된 경계적분방정식을 적용한다. 이러한 각각의 방정식은 다음과 같은 행렬방정식으로 쓸 수 있다. 즉, 탄성 영역 1에서는

$$[H^1 \ H^{12}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^{12} \end{Bmatrix} = [G^1 \ G^{12}] \begin{Bmatrix} t^1 \\ t^{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

이고,

탄성영역 2에서는

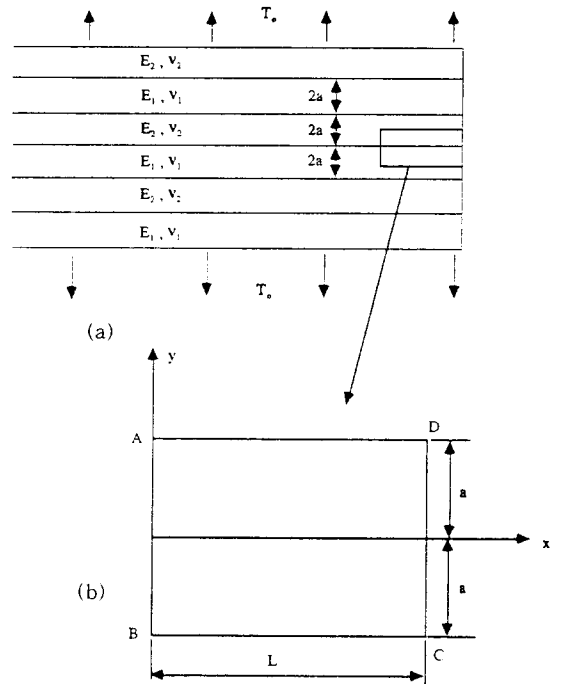


그림 1. 무한적층 구조체와 해석모델

$$[H^2 \ H^{12}] \begin{Bmatrix} u^2 \\ u^{21} \end{Bmatrix} = [G^2 \ G^{21}] \begin{Bmatrix} t^2 \\ t^{21} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이다. 식(2)와 (3)에서, 윗첨자 '1'과 '2'는 각각 탄성영역 1과 탄성영역 2를 가리키고, '12'와 '21'는 두영역의 공유경계면을 나타내며, H와 G는 각각의 영역에서의 영향행렬들을 나타낸다.

두 영역의 공유경계면에서는 변위의 연속조건과 표면력의 평형조건이 만족되어야 하는데, 그와 같은 조건들은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u^{21} &= u^{12} \\ t^{12} &= -t^{21} \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)를 식(2)와 (3)에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 행렬방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^2 & 0 & G^{12} \\ 0 & H^{21} & H^2 \cdot G^{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^{12} \\ u^2 \\ t^{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^1 \\ t^2 \end{Bmatrix}$$

식(5)에 경계조건들을 적용하여 계산하면, 경계면에서의 변위와 표면력들을 얻을 수 있다. 해석모델의 A-B면에서의 응력이 자유경계면의 영향을 받지않기 위해서는 해석모델의 길이 L이 충분히 커야한다. 여기에서는 $L=2.5a$ 로 하였다. 이러한 조건하에서, 수직변위 u_x 는 A-B면에서 균일하다고 볼 수 있다. 따라서 해석모델에 대한 경계조건들은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \text{A-B 면에서} \quad & \tau_{xy}=0, \quad u_x=0 \\ \text{B-C 면에서} \quad & \tau_{xy}=0, \quad u_y=0 \\ \text{C-D 면에서} \quad & \sigma_x=0, \quad \tau_{xy}=0 \\ \text{D-A 면에서} \quad & \int_L \sigma_y dL = T_0 L, \quad \tau_{xy}=0, \quad u_y=c \end{aligned} \quad (6)$$

윗식 (6)에서 D-A면에서의 적분식은 그 면위에
 서의 표면력 평형조건을 나타내고, L은 D-A면의
 길이, 그리고 c는 균일한 미지의 변위값을 나타낸
 다. 면 A-B와 면B-C에서의 수직변위들은 해석모
 델의 강제변위를 방지하기 위해서 0으로 주어졌
 다. 또한 해석모델의 대칭성으로 인해 모든면에서
 의 전단응력은 0으로 주어졌다.

윗 식(6)을 적용하기 위해서는, 경계요소 프로
 그램이 변경되어야 한다. 예를들어, 면 D-A위에서
 의 절점(nodal point)수가 모두 N개라고 가정하
 면, 면 D-A에 대한 적분식은 다음과 같이 쓸 수 있
 다.

$$\int_L \sigma_y dL = \sum_{i=1}^N b_i (\sigma_y)_i = T_0 L \quad (7)$$

식 (7)에서 $(\sigma_y)_i$ 는 면 D-A위의 각 절점에서의
 수직응력을 가리키고, b_i 는 계수를 나타낸다. 식
 (7)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$(\sigma_y)_1 = \frac{\left[\sum_{i=2}^N b_i (\sigma_y)_i \right] + T_0 L}{b_1}, \quad (b_1 \neq 0) \quad (8)$$

따라서 면 D-A위의 절점 1에서의 수직응력은
 그 면위의 다른 절점에서의 수직응력들로 부터 얻
 어진다.

변위 구속 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (u_y)_1 &= c \\ \text{그리고,} \\ (u_y)_2 &= (u_y)_1 \\ (u_y)_3 &= (u_y)_1 \\ &\vdots \\ (u_y)_N &= (u_y)_1 \end{aligned} \quad (9)$$

윗 식(9)에서 $(u_y)_i$ ($i=1,2,\dots,N$)는 면 D-A위
 의 각절점의 수직변위들을 가리킨다. 윗식 (8)과
 (9)를 사용하여 경계요소 프로그램을 변형하였다.

3. 수치 해석 예제

수치해석결과의 수렴성을 검토하여 해석모델을
 60개의 선 요소(line element)의 경계요소로 나누
 었다. 세밀한 크기의 요소들이 자유경계면가까이
 에서 사용되었다. 이 논문에서는 기하학적요소와
 함수의 변화를 나타내기 위해서 2차요소(quad-
 ratic element)를 사용하였다.

이 논문에서는, 서로 다른 탄성체들의 물성에
 따른 응력변화를 조사하기 위해서 다음과 같은 세
 종류의 값들을 택하였다.

$$\begin{aligned} \text{Type A :} \quad & E_2/E_1=1, \quad v_2/v_1=1 \\ \text{Type B :} \quad & E_2/E_1=10, \quad v_2/v_1=0.83 \\ \text{Type C :} \quad & E_2/E_1=100, \quad v_2/v_1=0.83 \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)에서 E_i 와 v_i ($i=1,2$)는 각각 인장탄성계
 수와 포아손의비를 나타낸다.

그림 2는 공유경계면에서의 수직응력 σ_y 의 변화
 를 나타내고 있다. Type A에 대해서 σ_y 는 응력의
 특이성없이 균일한 값을 보여주고 있다. Type B
 와 Type C에서 σ_y 는 자유경계면 근처에서 갑자기
 커지는데, 이러한 변화는 Type B보다 Type C에
 서 더욱 현저히 나타난다. 따라서 두 탄성체의 물
 성의 차이가 클수록 이러한 특이성이 더욱 급격히

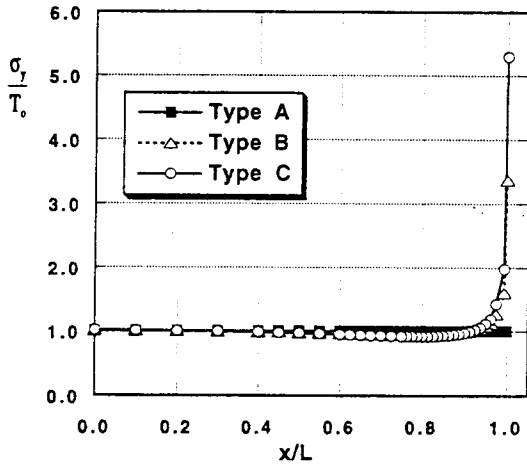


그림 2. 공유경계면에 따라 수직응력 σ_y 의 변화

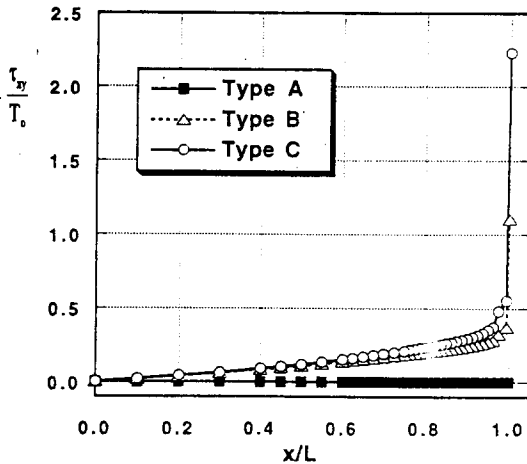


그림 3. 공유경계면에 따라 수직응력 τ_{xy} 의 변화

발달한다고 볼 수 있다. 그림 3은 공유경계면에 따른 전단응력 τ_{xy} 의 변화를 보여주고 있다. 그림 2에서와 같이 Type A에 대해서는 아무런 특이성이 나타나지 않고 있다. 그러나 Type B와 Type C에 대해서는 자유경계면 근처에서 특이응력이 나타나고 있다. 그림 2와 그림 3에 나타난 특이응력들은 비교적 작은 영역에 걸쳐 일어나고 있는데, 이러한 특이응력들은 자유경계면에서 항복을 일으키거나 결합분리를 야기시킬 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 경계요소법을 이용하여, 서로 다른 탄성체들이 무한하게 적층되어 있는 구조체에 나타나는 특이응력을 조사하였다. 수치해석결과에서 보인바와 같이 탄성체들의 물성이 서로 다를 때는 자유경계면 근처에서 특이응력이 발생하며, 이러한 특이응력들은 비교적 작은 영역에 걸쳐 일어나고 있다. 그러나 이러한 특이응력들은 자유경계면에서 항복을 일으키거나 결합분리를 야기시킴으로써 구조체 파괴의 출발점이 될 수 있다는 점에서 주목을 해야한다.

본 논문의 해석과정에서는 각 탄성체에 대해서 선형거동이 가정되었다. 그러나 실제 재료들이 자유경계면에 나타나는 특이응력을 선형적으로 견뎌낼 수 없으므로, 보다 정확한 해석을 위해서는 자유경계면 근처에 대해서 적합한 비선형 모델이 고려되어야 할 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- [1] Bogy, D. B., "Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles Under Surface Traction," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.38, 1971, pp.377-386.
- [2] Reedy, Jr. E. D., "Intensity of the Stress Singularity at the Interface Corner Between a Bonded Elastic and Rigid Layer," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.36, 1990, pp.575-583.
- [3] Tsai, M. Y., and Morton, J., "The Stresses in a Thermally Loaded Bimaterial Interface," *Int. J. Solids & Structures*, Vol.28, 1991, pp. 1053-1075.
- [4] Brebbia, C. A., and Dominguez, J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, Computational Mechanics Publications/McGraw-Hill Book Company, 1989.

(접수일자 : 1995. 1. 7)