

# 유한요소법을 이용한 분할판 개념하의 평판 좌굴해석

## Buckling Analyses of Flat Plates through Two-Element Plate Concept by Using Finite Element Method.

|      |          |     |      |          |       |
|------|----------|-----|------|----------|-------|
| 민    | 철        | 기*  | 손    | 원        | 기***  |
| Min, | Chul-Gi  |     | Son, | Won-Gi   |       |
| 주    | 재        | 현** | 류    | 시        | 웅**** |
| Joo, | Jae-Hyun |     | Yoo, | Si-Yoong |       |

### 요 약

본 논문에서는 평판 두께 방향의 선형 및 비선형 응력 분포를 일정한 크기의 단순응력 상태로 가정하는 분할판(Two-element plate) 개념을 이용하여 비선형 특성을 나타내는 평판의 강도 해석을 할 수 있는 Reissner 범함수와, 재질 특성은 선형이면서 기하학적 비선형 특성만을 갖는 평판의 강도해석을 할 수 있는 변형 Reissner 범함수를 모델링하였다.

두종류의 Reissner 범함수들을 근거로 하여 축방향 하중을 받는 평판의 선형 좌굴과 좌굴후의 비선형 특성 및 최대강도(ultimate strength)들을 계산할 수 있는 유한요소 방정식과 프로그램 개발을 시도하였다.

개발한 프로그램을 이용한 수치해석 결과, 분할판 이론을 사용한 선형좌굴해석 결과가 기존의 평판 이론을 사용한 선형좌굴 해석 결과와 유사한 경향을 나타냄으로써 분할판 이론에 근거한 유한요소법을 하중과 경계 조건 및 구성재질이 다양한 일반적인 평판의 강도 해석에 확대 적용함은 물론 좌굴후 비선형재질 특성으로 인한 평판의 최대강도도 예측 가능하다고 생각한다.

### Abstract

Two-element plate concept is incorporated into the buckling problem in order to simplify the nonlinear distribution of stress through the thickness of plate. Finite element formulations and programs based upon the Reissner functional and the modified Reissner functional using two-element plate concept are developed for buckling analysis of plates under axial compression. The two programs have been applied to obtain the linear elastic buckling behavior of axially compressed flat plates. Excellent agreement of linear elastic-solution results with exact or approximate solutions of other authors for the same boundary conditions proves the validity of the finite element method using two-element plate theory.

\* 인천전문대학 기계과 부교수  
 \*\* 국방과학연구소 연구원  
 \*\*\* 대한항공 기술연구원 선임연구원  
 \*\*\*\* 대한항공 기술연구원 부서장

이 논문에 대한 토론을 1996년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

### 1. 서 론

19세기 이후 산업 문명의 발달과 함께 출현된 로켓, 항공기, 자동차, 선박 및 각종 현대 건축 구조물에서 평판의 사용은 필수적인 것이다. 평판은 좌굴후에도 추가되는 하중을 계속 유지할 수 있다는 특성 때문에 탄성안정성 해석과 실험에 관한 연구가 약 1세기전 부터 진행되어 오고있다. 요즘과 같이 구조물의 경량화 및 최적화가 요구되는 경우에는 좌굴 및 좌굴후 평판의 강성 및 파괴 강도 해석에 관한 새로운 연구가 더욱 중요하게 되었다. 따라서 현재도 좌굴후 대변형으로 인한 평판의 비선형 강도 해석을 일반적으로 체계화하기 위한 연구가 대학 및 연구소들에서 진행중이다.

본 논문에서는 평판이 굽힘을 받을 경우 중립면 부근의 응력값이 상하단부의 응력 크기에 비해 상당히 작은 값이 되는 것에 착안하여 Fig. 1과 같은 분할판 개념하에 Fig. 2와 같은 응력분포를 정의한 분할판 모델을 사용하여 비선형 재질 특성을 해석한다. 즉 중립면 근처에서는 응력이 존재하지 않고 중립면에서 일정 거리만큼 위치한 곳부터 상하단 까지 사이에 평판과 같은 등가의 전체 굽힘 모멘트와 힘을 발생하는 단순응력이 작용한다는 분할판 모델에 유한요소법을 사용하여 평판의 선형 좌굴과 비선형 좌굴 해석을 하여 최대강도를 예측할 수 있도록 다음과 같은 연구를 시도하였다.

Kirchhoff 가설을 적용한 분할판 개념에 von Kârman의 대변형 이론과 복합적인 응력상태에서 발생하는 유효응력-유효변형을 관계가 단순인장 상태의 응력-변형을 관계와 같다고 가정하여 시컨트 계수(secant-modulus)를 사용하는 비선형탄성 변형 이론을 나타내는 Ramberg-Osgood 식을 Reissner 변분법을 적용하여 Reissner 범함수를 구하여 좌굴후 비선형 재질 특성으로 인한 최대강도를 해석할 수 있도록 한다. 여기서 Reissner 범함수는 응력과 변형을 및 모멘트와 곡률 관계가 상호 독립적으로 돼있다.

한편 모멘트와 곡률의 선형 관계식을 앞의 Reissner 범함수에 적용하여 소변형과 선형 재질하의 좌굴해석 및 대변형으로 인한 기하학적 비선형을

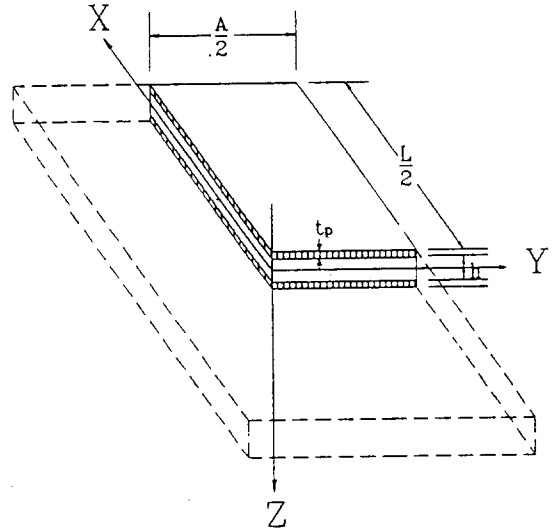


Fig. 1 Two-element plate configuration

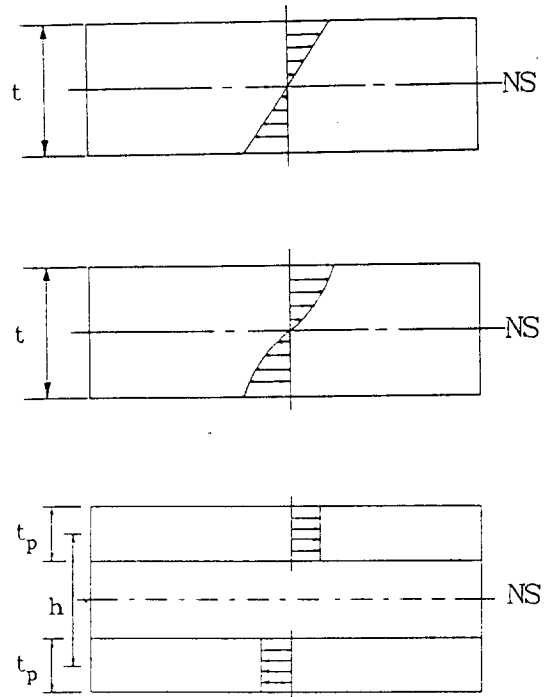


Fig. 2 Comparison of stress distribution through thickness between one-element plate and two-element plate

해석할 수 있는 새로운 변형 Reissner 범함수를 구하였다. 본 논문에선 Reissner 범함수와 변형 Reissner 범함수 두가지를 이용한 유한요소법으로 좌굴 해석을 시도하였다.

2. 이 론

Fig. 3의 분할판에 나타나는 응력분포 정의에 von Kârman의 대변형 이론을 적용하면 변형률과 변위 관계식들은 다음과 같이 비선형으로 나타난다.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{x_t} &= \epsilon_x' + \epsilon_x'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 &= \epsilon_x' - \frac{h}{2} k_x \\
 \epsilon_{y_t} &= \epsilon_y' + \epsilon_y'' = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 &= \epsilon_y' - \frac{h}{2} k_y \\
 \gamma_{xy_t} &= \gamma_{xy}' + \gamma_{xy}'' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\
 &\quad + h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}' + h k_{xy} \quad (1) \\
 \epsilon_{x_b} &= \epsilon_x' + \epsilon_x'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 &= \epsilon_x' + \frac{h}{2} k_x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{y_b} &= \epsilon_y' + \epsilon_y'' = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 &= \epsilon_y' + \frac{h}{2} k_y \\
 \gamma_{xy_b} &= \gamma_{xy}' + \gamma_{xy}'' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\
 &\quad - h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}' - h k_{xy}
 \end{aligned}$$

윗식에서 첨자 t와 b는 각각 분할판의 상단과 하단을 나타내며 h는 양단의 중심사이 거리이다. 분할판의 상하단에서 변형율을 일정하다고 가정하면 판의 인장응력으로 인한 변형율  $\epsilon'$ (membrane strain)와 굽힘으로 인한 변형율  $\epsilon''$ (bending strain)와 곡률 관계는 각기 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x' &= (\epsilon_{x_t} + \epsilon_{x_b}) / 2 \\
 \epsilon_y' &= (\epsilon_{y_t} + \epsilon_{y_b}) / 2 \\
 \gamma_{xy}' &= (\gamma_{xy_t} + \gamma_{xy_b}) / 2 \quad (2) \\
 \epsilon_x'' &= \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{h}{2} k_x \\
 \epsilon_y'' &= \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{h}{2} k_y \quad (3) \\
 \gamma_{xy}'' &= h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -h k_{xy}
 \end{aligned}$$

여기서 곡률  $k_x, k_y, k_{xy}$ 는 다음과 같다.

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

분할판의 상하단에 작용하는 응력 크기는 일정하며 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_t} &= \sigma_x' + \sigma_x'' \\
 \sigma_{y_t} &= \sigma_y' + \sigma_y'' \\
 \tau_{xy_t} &= \tau_{xy}' + \tau_{xy}'' \quad (5) \\
 \sigma_{x_b} &= \sigma_x' - \sigma_x'' \\
 \sigma_{y_b} &= \sigma_y' - \sigma_y'' \\
 \tau_{xy_b} &= \tau_{xy}' - \tau_{xy}''
 \end{aligned}$$

위 식들에서  $\sigma'$ 는 평판의 막응력(membrane stress),  $\sigma''$ 는 굽힘응력(bending stress)을 뜻하며 다음과 같이 정의한다.

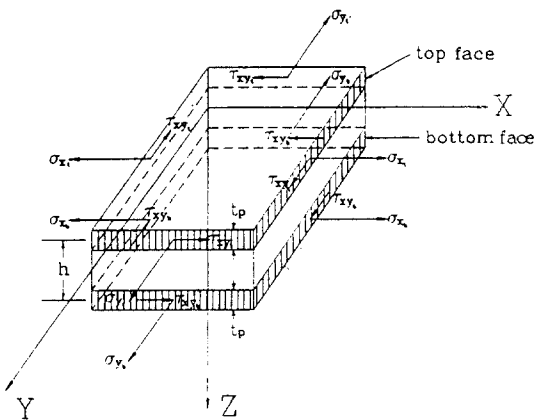


Fig. 3 Definition of stress distribution on two-element plate

$$\begin{aligned}\sigma_x' &= (\sigma_{x_i} + \sigma_{x_b}) / 2 \\ \sigma_y' &= (\sigma_{y_i} + \sigma_{y_b}) / 2 \\ \tau_{xy}' &= (\tau_{xy_i} + \tau_{xy_b}) / 2\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x'' &= (\sigma_{x_i} - \sigma_{x_b}) / 2 \\ \sigma_y'' &= (\sigma_{y_i} - \sigma_{y_b}) / 2 \\ \tau_{xy}'' &= (\tau_{xy_i} - \tau_{xy_b}) / 2\end{aligned}\quad (7)$$

평판의 막응력과 평면력 관계, 굽힘응력과 굽힘 모멘트 관계식들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}N_x &= 2 t_p \sigma_x' \\ N_y &= 2 t_p \sigma_y' \\ N_{xy} &= 2 t_p \tau_{xy}'\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}M_x &= -t_p h \sigma_x'' = -t_p \frac{h}{2} (\sigma_{x_i} - \sigma_{x_b}) \\ M_y &= -t_p h \sigma_y'' = -t_p \frac{h}{2} (\sigma_{y_i} - \sigma_{y_b})\end{aligned}\quad (9-A)$$

$$\begin{aligned}M_{xy} &= -t_p h \tau_{xy}'' = -t_p \frac{h}{2} (\tau_{xy_i} - \tau_{xy_b}) \\ \sigma_x'' &= -M_x / (t_p h) \\ \sigma_y'' &= -M_y / (t_p h) \\ \tau_{xy}'' &= -M_{xy} / (t_p h)\end{aligned}\quad (9-B)$$

여기서  $t_p$ 는 분할판 상하단의 두께이다.

평판의 내력으로 인한 범함수  $U^*$ 와 외력으로 인한 범함수  $V^*$ 를 합한 것을  $\pi^* = U^* + V^* = F(u, v, w, M, \sigma')$ 로 표시하며 특히 Ramberg-Osgood 관계식을 적용하면 응력과 변형률의 관계가 복잡한 비선형 탄성재질 문제들의 취급을 간단히 할 수 있다.

내력에 의한 Reissner 범함수  $U^*$ 는 다음식으로 표시한다.

$$U^* = \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} - F') dx dy dz \quad (10)$$

윗식에서  $F'$ 는 분할판의 단위 체적당 축적되는 공액에너지(complementary energy) 밀도로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}dF' &= \varepsilon_x d\sigma_x + \varepsilon_y d\sigma_y + \gamma_{xy} d\tau_{xy} = \varepsilon_e d\sigma_e \\ F' &= \int dF' = \int \varepsilon_e d\sigma_e\end{aligned}$$

재질상수  $E, K, n$ 으로 표시되는 Ramberg-Osgood 관계식<sup>[2]</sup>

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} + K \left[ \frac{\sigma_e}{E} \right]^n \quad (11)$$

을 이용하면  $F'$ 는

$$\begin{aligned}F' &= \int_0^{\sigma_e} \left\{ \frac{\sigma_e}{E} + K \left[ \frac{\sigma_e}{E} \right]^n \right\} d\sigma_e \\ &= \frac{\sigma_e^2}{2E} + \frac{KE}{n+1} \left[ \frac{\sigma_e}{E} \right]^{n+1}\end{aligned}\quad (12)$$

여기서  $K=0$ 이면 Hooke의 법칙이 성립되는 선형 재질을 의미한다. 유효응력  $\sigma_e$ 와 유효변형률  $\varepsilon_e$ 의 관계는 균질의 등방성 비압축성 재질인 경우 다음 식으로 된다.<sup>[3,4]</sup>

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \quad (13)$$

$$\varepsilon_e^2 = \frac{4}{3} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2) \quad (14)$$

(12)식을 (10)식에 대입한 후 평판두께 방향  $Z$ 에 관해 적분한 후 분할판의 응력, 변형률을 나타내는 (1), (5)식들을 대입하고 (3)식과 (9)식을 이용하여  $\sigma''$ 와  $\varepsilon''$ 를 모멘트와 곡률 반경으로 표시한 다음 변위 관계를 나타내는 (1)식과 모멘트와 응력 관계를 나타내는 (9)식을 사용하면 내력으로 인한 범함수는 다음식으로 정리된다.

$$\begin{aligned}U^* &= \iint \int_g \left\{ \sigma_x' \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad + \sigma_y' \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad + \tau_{xy}' \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2t_p} \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(t_p h)^2} \left( M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2 \right) \right] \\ &\quad \left. - \frac{KE}{2(n+1)} \left[ \left( \frac{\sigma_e}{E} \right)_t^{n+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{\sigma_e}{E} \right)_b^{n+1} \right] \right\} 2t_p dx dy\end{aligned}\quad (15)$$

윗식을 분할판의 Reissner 범함수라 칭한다.(여

기서 첨자  $g$ 는 분할판 전체의 적분 영역을 뜻하는 것으로서 유한요소법을 사용할때 요소의 적분영역을 나타내는  $e$ 와 구별하기 위한 것이다.

분할판에 작용하는 모멘트  $M_{ij}$ 와 평판에 작용하는 모멘트  $\bar{M}_{ij}$  값이  $M_x = \bar{M}_x, M_y = \bar{M}_y, M_{xy} = \bar{M}_{xy}$ 로 같을때 분할판과 평판의 해석 결과가 서로 일치하기 위해서는 분할판과 평판에 축적되는 범함수의 값이 서로 같아야 한다. 따라서 선형의 비압축성 재질 특성을 가진 분할판을 모델링한 범함수와 평판을 모델링한 범함수를 같게하면 다음과 같은 분할판과 평판의 형상에 관한 기하학적 상관 관계를 얻을 수 있다.<sup>[4]</sup>

$$t = 2t_p, \frac{Et^2}{18} = \frac{Eh^2}{6} \text{ 에서 } h^2 = \frac{1}{3}t^2,$$

$$h = \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2t_p}{\sqrt{3}} \text{ 임을 알 수 있다.}$$

윗식에서  $t$ 는 평판의 두께를  $t_p$ 는 분할판 상하단의 두께를  $h$ 는 분할판 상하단 중심 사이의 거리를 뜻한다. 분할판과 평판의 기하학적 상관 관계를 이용하여 분할판의 강성도(flexural rigidity)  $D_s$  및 굽힘모멘트와 곡률 사이의 선형 관계식들은 다음과 같이 구한다.<sup>[1,4]</sup>

$$D_s = \frac{E(2t_p)^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2Eh^2}{3} t_p \quad (16)$$

$$M_x = -D_s(k_x + \nu k_y)$$

$$M_y = -D_s(k_y + \nu k_x) \quad (17)$$

$$M_{xy} = -D_s(1 - \nu)k_{xy}$$

(9), (16), (17)식들과 곡률을 사용하여 굽힘모멘트로 인한 굽힘응력 성분들을 표시하면

$$\sigma_x^r = \frac{2Eh}{3}(k_x + \nu k_y),$$

$$\sigma_y^r = \frac{2Eh}{3}(k_y + \nu k_x),$$

$$\tau_{xy}^r = \frac{Eh}{3} k_{xy} \quad (18)$$

(15)식에서 (9)식으로 표시한  $M_x, M_y, M_{xy}$  성분들을 (18)식을 사용하여 곡률로 정리할 경우 다음

과 같은 분할판의 변형 Reissner 범함수를 얻게 된다.<sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned} U^* = & \iint_g \left( \sigma_x \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ & + \sigma_y \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & + \tau_{xy} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ & - \frac{1}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \right] \\ & + \frac{Eh^2}{6} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \Big\} 2t_p \, dx dy \quad (19) \end{aligned}$$

윗식은 von Kármán의 대변형 이론을 적용하여 막응력으로 인한 기하학적 비선형 상태의 변형률-변위 관계는 해석할 수 있으나 모멘트와 곡률 관계를 Hooke의 선형 법칙을 적용한 이유로 재질적 비선형 특성의 해석은 불가능하다.

평판 끝단에 작용하는 외력들로 인한 포텐셜 범함수는 다음식으로 표시된다.<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} V^* = & -\frac{1}{2} \iint_g \left\{ \bar{N}_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \bar{N}_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx dy \quad (20) \end{aligned}$$

### 3. 유한요소법에 의한 해석

#### (1) Reissner 범함수를 사용한 해법

분할판에 관한 Reissner 범함수를 유한요소식으로 표현하기 위해 본논문에서는 경계면에 8개의 절점을 갖는 등매개 변수로 나타낸 사변형 요소를 채택하여 절점당 평면응력( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ ), 평면변위( $u, v$ ), 모멘트( $M_x, M_y, M_{xy}$ ), 횡방향변위( $w$ )를 포함 9개의 자유도를 갖도록 하였다.

8개의 절점을 갖는 사변형 요소의 모멘트, 평면응력, 평면변위, 좌표값, 횡방향 변위들을 형상함수를 이용하여 표시하면 아래와 같다.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{x_i} \\ M_{y_i} \\ M_{xy_i} \end{Bmatrix} = [N_M] \{M\} \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x_i} \\ \sigma_{y_i} \\ \tau_{xy_i} \end{Bmatrix} = [N_\sigma] \{\sigma\} \quad (22)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$w = [N_i] \{W_i\} = [N] \{W\} \quad i = 1, 8 \quad (24)$$

여기서  $[N_\sigma]$ ,  $[N_M]$ ,  $[N]$ 은 유한요소의 응력 형상함수, 모멘트 형상함수, 횡방향의 처짐 형상함수들을 나타낸다.

변위-변형을 관계식들을 정리하면

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = [B_1] \{u\} \quad (25)$$

$\zeta$ 와  $\eta$ 는 요소의 국부좌표계를  $|J|$ 는 국부좌표계와 전체좌표계 사이의 변환 행렬식을 뜻한다.

횡방향 변위들의 상호관계를 나타내면

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{b} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \{W_i\} \quad \text{이므로}$$

$$\begin{Bmatrix} (\frac{\partial w}{\partial x})^T \\ (\frac{\partial w}{\partial y})^T \\ (\frac{\partial w}{\partial x})(\frac{\partial w}{\partial y}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \{W_i\}^T [\frac{\partial N}{\partial \zeta}] [\frac{\partial N}{\partial \zeta}] \{W_i\} \\ \frac{1}{b} \{W_i\}^T [\frac{\partial N}{\partial \eta}] [\frac{\partial N}{\partial \eta}] \{W_i\} \\ \frac{1}{ab} \{W_i\}^T [\frac{\partial N}{\partial \zeta}] [\frac{\partial N}{\partial \eta}] \{W_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \{W_i\}^T [X] \{W_i\} \\ \frac{1}{b} \{W_i\}^T [Y] \{W_i\} \\ \frac{1}{ab} \{W_i\}^T [Z] \{W_i\} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$a$ 와  $b$ 는 요소의 길이를 뜻하며  $[X]$ ,  $[Y]$ ,  $[Z]$ 는 미분한 형상함수들의 곱을 나타내는 행렬이다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \zeta^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} \\ \frac{1}{ab} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \zeta \partial \eta} \end{bmatrix} \{W_i\} = [B_2] \{W\} \quad (27)$$

선형재질의 특성만을 고려하는 Reissner 범함수의 유한요소 방정식을 얻기 위하여 (15)식에서 비선형재질 특성을 나타내는 Ramberg-Osgood 변수인  $K$ 를 영으로 한후 형상함수들을 사용하여 행렬 형태로 정리한 유한요소 분할판의 Reissner 범함수를  $\{\sigma\}$ ,  $\{u\}$ ,  $\{w\}$ ,  $\{M\}$ 에 관해 변분을 취한뒤 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta U_e^* = & 2t_p \iint \left[ \{\delta u\}^T [B_1]^T [N_\sigma] \{\sigma\} \right. \\ & + \{\delta \sigma\}^T [N_\sigma]^T [B_1] \{u\} \\ & + \frac{1}{2} \{\delta \sigma\}^T [N_\sigma]^T \left. \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} \{W\}^T [X] \{W\} \\ \frac{1}{b^2} \{W\}^T [Y] \{W\} \\ \frac{2}{ab} \{W\}^T [Z] \{W\} \end{array} \right\} \right. \\ & + \{\delta W\}^T \left. \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} [X] \{W\} \\ \frac{1}{b^2} [Y] \{W\} \\ \frac{2}{ab} [Z] \{W\} \end{array} \right\}^T [N_\sigma] \{\sigma\} \right. \\ & - \frac{1}{E} \{\delta \sigma\}^T [N_\sigma]^T [C_1] [N_\sigma] \{\sigma\} \\ & - \frac{1}{2t_p} \{\delta M\}^T [N_M]^T [B_2] \{W\} \\ & - \frac{1}{2t_p} \{\delta W\}^T [B_2]^T [N_M] \{M\} \\ & \left. - \frac{1}{E(t_p h)^2} \{\delta M\}^T [N_M]^T \right. \\ & \left. [C_2] [N_M] \{M\} \right] |J| d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (28)$$

같은 방법으로 유한요소 분할판의 끝단에 작용하는 외력들로 인한 포텐셜 범함수 (20)식을 변분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\delta V_e^* = -\{\delta W\}^T \iint_e \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right] \\ \frac{1}{b} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \end{array} \right\}^T [P] \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right] \\ \frac{1}{b} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \end{array} \right\} \{W\} |J| d\zeta d\eta \quad (29)$$

분할판 전체의 Reissner 범함수의 변분은 다음 식과 같이 정리할 수 있다.

$$\delta \Pi^* = \delta(U^* + V^*) = \sum_e (\delta U_e^* + \delta V_e^*) = \sum_e ((28) + (29)) = 0$$

윗식이 평형상태를 이루도록 가상적인  $\{\delta u\}^T, \{\delta \sigma\}^T, \{\delta w\}^T, \{\delta M\}^T$  대신에 적분항 안의 값들을 영으로 하여 구해지는 Reissner 범함수의 유한요소 방정식들의 각항을 아래 (30)식과 같이 정의하여 행렬 형태로 정리하면

$$[A] = 2t_p \iint_e [B_1]^T [N_\sigma] |J| d\zeta d\eta \quad (30-A)$$

$$[D_1] = 2t_p \iint_e \frac{1}{E} [N_\sigma]^T [C_1] [N_\sigma] |J| d\zeta d\eta \quad (30-B)$$

$$[B] = 2t_p \iint_e [N_\sigma]^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} \{W\}^T [X] \\ \frac{1}{a^2} \{W\}^T [Y] \\ \frac{1}{ab} \{W\}^T [Z] \end{array} \right\} |J| d\zeta d\eta \quad (30-C)$$

$$[M_1] = 2t_p \iint_e \left( -\frac{1}{2t_p} [N_M]^T [B_2] \right) |J| d\zeta d\eta \quad (30-D)$$

$$[M_2] = 2t_p \iint_e \left( -\frac{1}{E(t_p h)^2} [N_M]^T [C_2] [N_M] \right) |J| d\zeta d\eta \quad (30-E)$$

$$N_{cr}[F] = \iint_e \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right] \\ \frac{1}{b} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \end{array} \right\}^T [P] \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right] \\ \frac{1}{b} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \end{array} \right\} |J| d\zeta d\eta \quad (30-F)$$

다음과 같은 형태로 표시된다.

$$\sum_e \begin{bmatrix} [0] & [M_1]^T & [B]^T & [0] \\ [M_1] & [M_2] & [0] & [0] \\ [B] & [0] & [D_1] & [A]^T \\ [0] & [0] & [A] & [0] \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \{W\} \\ \{M\} \\ \{\sigma\} \\ \{u\} \end{Bmatrix}_e = \sum_e \begin{Bmatrix} N_{cr}[F]\{W\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_e \quad (31)$$

위 행렬식에 경계조건을 적용한 후 분할하여 static condensation을 행하여 일반적 고유치문제 (generalized eigenvalue problem)로 만든다.

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{W\} \\ \{M_{\sigma u}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{cr}[F]\{W\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

$\{M_{\sigma u}\}$ 는 행벡터  $\{M\}, \{\sigma\}, \{u\}$  들을 하나의 행벡터로 나타낸 것이다.

윗식에서

$[K] = -[K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{12}]^T$ 로 정의하면

$[K]\{W\} = N_{cr}[F]\{W\}$ 인 일반적 고유치 문제가 된다. (32)

(32)식이 해를 갖기 위해선 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\left| [K] - N_{cr}[F] \right| = 0 \quad (33)$$

좌굴하중(Buckling load) 값  $N_{cr}$  대신 무차원 하중계수  $K_0$ 를 이용하여 표시하면 다음과 같다.<sup>[5,6]</sup>

$$K_e = \frac{N_{cr} b^2}{\Pi^2 D_s} \quad (34)$$

(2) 변형 Reissner 범함수를 사용한 해법

분할판에 관한 변형 Reissner 범함수의 경우는 모멘트를 곡률로 표현하므로 절점당 자유도는 평면응력( $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_{xy}$ ), 평면변위( $u, v$ ) 및 횡방향변위( $w, w_x, w_y$ )를 포함 8개를 갖는다. 평면응력과 평면변위 모멘트는 4-절점사각형 요소의 등매개변수로 표시하며 횡방향 변위들은 무차원 변수화

하여 등매개 변수들과 수치적분을 함께 행할 수 있도록 한 Subparametric 변수들을 갖는 형상함수들을 사용한다(non-conforming MZC rectangle semi C<sup>1</sup> element). (19)식과 외력에 의한 포텐셜 (20)식을 형상함수들을 사용하여 표현한 다음 변분을 취하면

$$\begin{aligned}
 \delta U_e^* &= 2t_p \int_e \left\{ \{\sigma\}^T [N_\sigma]^T [B_1] \{\delta u\} \right. \\
 &\quad + \{\delta \sigma\}^T [N_\sigma]^T [B_1] \{u\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{\delta \sigma\}^T [N_\sigma]^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} \{W\}^T [X] \{W\} \\ \frac{1}{b^2} \{W\}^T [Y] \{W\} \\ \frac{2}{ab} \{W\}^T [Z] \{W\} \end{array} \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [N_\sigma]^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} \{\delta W\}^T [X] \{W\} \\ \frac{1}{b^2} \{\delta W\}^T [Y] \{W\} \\ \frac{2}{ab} \{\delta W\}^T [Z] \{W\} \end{array} \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [N_\sigma]^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} \{W\}^T [X] \{\delta W\} \\ \frac{1}{b^2} \{W\}^T [Y] \{\delta W\} \\ \frac{2}{ab} \{W\}^T [Z] \{\delta W\} \end{array} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2E} \{\delta \sigma\}^T [N_\sigma]^T [C_1] [N_\sigma] \{\sigma\} \\
 &\quad - \frac{1}{2E} \{\sigma\}^T [N_\sigma]^T [C_1] [N_\sigma] \{\delta \sigma\} \\
 &\quad + \frac{Eh^2}{6} \{\delta W\}^T [B_2]^T [C_2] [B_2] \{W\} \\
 &\quad + \frac{Eh^2}{6} \{W\}^T [B_2]^T [C_2] [B_2] \{\delta W\} \Big] J |d\zeta d\eta|
 \end{aligned} \tag{35}$$

이다. 같은 방법으로 전체 분할판에 작용하는 외력으로 인한 포텐셜인 (20)식은 앞서 유한요소식으로 정리하여 변분을 취한 (29)식의 횡방향 처짐을 MZC 형상함수로 표시하면 된다.<sup>[7]</sup>

따라서 분할판 전체의 변형 Reissner 범함수의 변분은

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi^* &= \delta(U^* + V^*) = \sum_e [\delta U_e^* + \delta V_e^*] \\
 &= \sum_e [(35) + (29)] = 0
 \end{aligned}$$

에서 얻어지는 변형 Reissner 유한요소 방정식들의 각항들을 (30-A), (30-B), (30-C), (30-F)식들과 아래와 같이 정의한 매트릭스 [D<sub>2</sub>]를 사용하여 정리하면 (36)식과 같은 변형 Reissner 범함수를 사용한 유한요소 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
 [D_2] &= 2t_p \int_e \frac{Eh^2}{3} [B_2]^T [C_2] [B_2] |J| d\zeta d\eta \\
 \sum_e \begin{bmatrix} 2[D_2] [B]^T [0] \\ [B] [D_1] [A]^T \\ [0] [A] [0] \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \{W\} \\ \{\sigma\} \\ \{u\} \end{Bmatrix}_e &= \sum_e \begin{Bmatrix} N_{cr} [F] \{W\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_e
 \end{aligned} \tag{36}$$

위 식에서

$[K] = \frac{1}{2} ([K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{12}]^T)$ 로 정의하면  $[K] \{W\} = N_{cr} [F] \{W\}$ 인 일반적 고유치 문제의 해를 구하여 무차원 좌굴하중 계수 K<sub>0</sub>를 구할 수 있다.

#### 4. 수치해석 결과 및 검토

본 논문에서 연구한 분할판 이론에 근거한 Reissner 범함수(R-F)와 변형 Reissner 범함수(M-R-F)를 사용한 두 종류의 유한요소법으로 개발한 프로그램을 사용하여 경계조건이 네변이 모두 단순지지된 경우(SSSS), 네변 모두가 고정지지된 경우(CCCC), 하중이 작용하는 두변이 단순지지되고 작용하지 않는 다른 두변은 고정지지된 경우(SSCC), 하중이 작용하는 두변이 고정지지되고 작용하지 않는 두변은 단순지지된 경우(CCSS)에 해당하는 직사각형 평판의 좌굴하중을 구하였다.

한방향 압축으로 인한 좌굴하중 계산 결과는 평판의 형상비가 0.8과 1.0 그리고 1.2일 때 각기 Table 1과 Table 2 및 Table 3에 수록하였다.



Table 1. Comparison of buckling coefficients of plates under uniaxial compression.

AR=0.8, t/A=0.01, E=30×10<sup>6</sup> psi, ν=0.5

| COEF.<br>MESH | K <sub>s</sub> |       | K <sub>c</sub> |        | K <sub>sc</sub> |       | K <sub>cs</sub> |       |
|---------------|----------------|-------|----------------|--------|-----------------|-------|-----------------|-------|
|               | M-R-F          | R-F   | M-R-F          | R-F    | M-R-F           | R-F   | M-R-F           | R-F   |
| 2×2           | 3.910          | 3.913 | 10.068         | 10.694 | 5.963           | 5.762 | 6.475           | 8.390 |
| 3×3           | 4.062          | 4.026 | 10.505         | 10.813 | 6.281           | 6.652 | 7.727           | 8.414 |
| 4×4           | 4.123          | 4.074 | 10.729         | 10.874 | 6.620           | 6.815 | 8.017           | 8.428 |
| 5×5           | 4.151          | 4.102 | 10.848         | 10.917 | 6.829           | 6.914 | 8.224           | 8.467 |
| 6×6           | 4.167          | 4.119 | 10.914         | 10.949 | 6.958           | 6.979 | 8.358           | 8.502 |
| REFER.        | 4.20           |       | 11.0           |        | 7.30            |       | 8.73            |       |
| B C           | SSSS           |       | CCCC           |        | SSCC            |       | CCSS            |       |

Table 2. Comparison of buckling coefficients of plates under uniaxial compression.

AR=1.0, t/A=0.01, E=30×10<sup>6</sup> psi, ν=0.5

| COEF.<br>MESH | K <sub>s</sub> |       | K <sub>c</sub> |       | K <sub>sc</sub> |       | K <sub>cs</sub> |       |
|---------------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|
|               | M-R-F          | R-F   | M-R-F          | R-F   | M-R-F           | R-F   | M-R-F           | R-F   |
| 2×2           | 3.726          | 3.710 | 9.091          | 9.720 | 6.079           | 6.715 | 5.298           | 6.247 |
| 3×3           | 3.871          | 3.824 | 9.505          | 9.830 | 6.272           | 7.158 | 5.973           | 6.518 |
| 4×4           | 3.925          | 3.871 | 9.722          | 9.883 | 6.643           | 7.399 | 6.185           | 6.525 |
| 5×5           | 3.952          | 3.899 | 9.838          | 9.922 | 6.925           | 7.419 | 6.344           | 6.553 |
| 6×6           | 3.966          | 3.916 | 9.905          | 9.947 | 7.188           | 7.466 | 6.447           | 6.584 |
| REFER.        | 4.0            |       | 10.04          |       | 7.69            |       | 6.60            |       |
| B C           | SSSS           |       | CCCC           |       | SSCC            |       | CCSS            |       |

Table 3. Comparison of buckling coefficients of plates under uniaxial compression.

AR=1.2, t/A=0.01, E=30×10<sup>6</sup> psi, ν=0.5

| COEF.<br>MESH | K <sub>s</sub> |       | K <sub>c</sub> |       | K <sub>sc</sub> |       | K <sub>cs</sub> |       |
|---------------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|
|               | M-R-F          | R-F   | M-R-F          | R-F   | M-R-F           | R-F   | M-R-F           | R-F   |
| 2×2           | 3.843          | 3.842 | 8.907          | 9.694 | 4.593           | 5.993 | 4.785           | 5.289 |
| 3×3           | 3.999          | 3.957 | 9.338          | 9.755 | 5.446           | 6.461 | 5.169           | 5.673 |
| 4×4           | 4.056          | 4.005 | 9.574          | 9.795 | 5.902           | 6.658 | 5.342           | 5.690 |
| 5×5           | 4.084          | 4.032 | 9.705          | 9.825 | 6.224           | 6.744 | 5.481           | 5.691 |
| 6×6           | 4.099          | 4.041 | 9.782          | 9.836 | 6.438           | 6.822 | 5.572           | 5.710 |
| REFER.        | 4.134          |       | 9.85           |       | 7.06            |       | 5.84            |       |
| B C           | SSSS           |       | CCCC           |       | SSCC            |       | CCSS            |       |

Fig. 4는 Reissner 범함수를 사용한 것으로 한 방향 압축 하중이 작용하는 형상비가 AR=1.0인 평판의 경계조건들에 따라 수렴도가 변하는 것을 Normalized된 좌굴하중 계수 크기로 나타내고 있으며 정확도는 CCCC, SSSS, CCSS, SSCC 순으로 됨을 알 수 있다.

Fig. 5는 변형 Reissner 범함수를 사용한 것으로 한방향 압축 하중이 작용하는 형상비가 AR=1.0인 평판의 경계조건들에 따라 수렴도가 변하는 것을 Normalized된 좌굴하중 계수 크기를

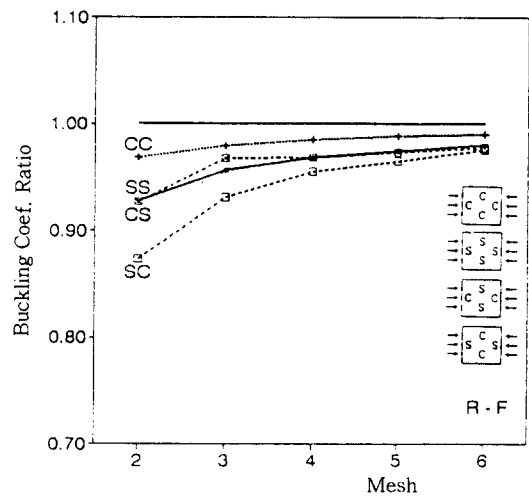


Fig. 4 Buckling coefficient ratio of plate using R-F with various boundary conditions versus mesh size under uniaxial compression (AR=1.0)

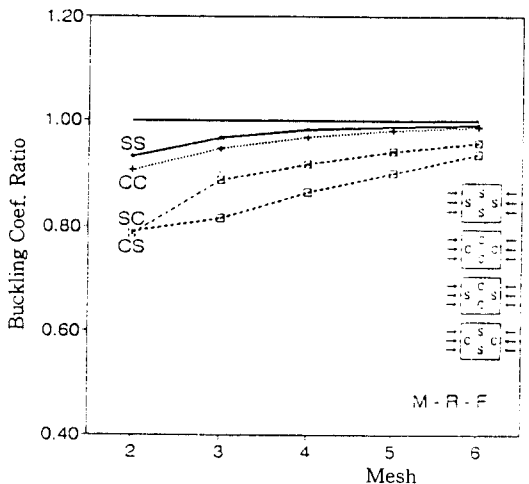


Fig. 5 Buckling coefficient ratio of plate using M-R-F with various boundary conditions versus mesh size under uniaxial compression (AR=1.0)

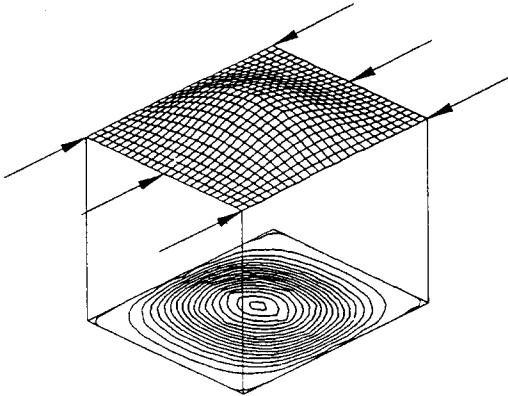


Fig. 6. Buckling mode shape of CCSS plate under uniaxial compression(AR=1.2)

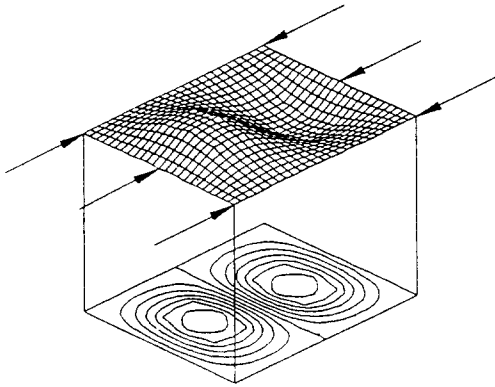


Fig. 7. Buckling mode shape of SSCC plate under uniaxial compression(AR=1.2)

이용하여 나타내고 있으며 정확도는 SSSS, CCCC, SSCC, CCSS 순으로 됨을 알 수 있다.

Fig. 6은 한방향 압축하중이 작용하는 형상비 AR=1.2이며 경계조건이 CCSS인 평판의 좌굴된 형상과 등고선을 나타내는 것으로 고정지지된 경계면은 기울기가 없는 반면 단순지지된 경계면은 기울기가 연속적으로 됨을 알 수 있다.

Fig. 7은 한방향 압축하중이 작용하는 형상비 AR=1.2이며 경계조건이 SSCC인 평판의 좌굴된 형상과 등고선을 나타내는 것으로 다른 경계조건들과는 달리 1차 좌굴모드에서 Half-sine wave 수가 두개가 존재함을 알 수 있다.

그외의 결과로는 두께비 값이 크거나 형상비가

작은 경우 모든 경계조건에서 좌굴하중 값은 증가함을 알 수 있고 참고문헌[5,6]에 의하면 형상비가 증가할 경우에 경계조건에 관계없이 좌굴하중 계수값이 4.0으로 수렴하여 본 논문 계산 결과들과 유사한 경향을 나타냄을 알 수 있다.

## 5. 결 론

평판 두께 방향의 선형 및 비선형 응력 분포를 일정한 크기의 단순응력 상태로 가정하는 분할판 개념을 이용하고 von Kârmân 대변형 이론과 시컨트계수(secant-modulus)와 유효응력-유효변형을 관계를 포함한 Ramberg-Osgood식을 Reissner 변분법에 도입하여 비선형 특성을 나타내는 평판의 강도 해석을 할 수 있는 Reissner 범함수를 모델링하였다. 또한 선형의 모멘트-곡률 관계식을 이용하여 재질 특성은 선형이면서 기하학적 비선형 특성만을 갖는 평판의 강도해석을 할 수 있는 변형 Reissner 범함수도 모델링하였다. Reissner 범함수와 변형 Reissner 범함수에 근거한 두 종류의 유한요소해법과 프로그램을 개발하였다.

개발한 프로그램의 계산결과 형상비, 두께, 재질종류, 하중조건, 경계조건들에 관계없이 Reissner 범함수와 변형 Reissner 범함수 두 가지 모두 분할판 개념을 이용한 선형 좌굴해석 결과와 기존의 평판 이론을 사용한 선형 좌굴해석 결과에 근접함을 알 수 있다.

따라서 기존의 평판 이론에 의한 유한요소법보다 분할판 이론에 의한 유한요소법들을 이용하면 선형은 물론 설계하중을 초과하여 잔류변형이 남는 0.2% 오프셋 항복응력 보다 높은 하중 상태를 나타내는 평판의 재질적 비선형 문제들에 관한 최대강도 해석을 간단히 할 수 있을 것으로 예측된다.

## 참 고 문 헌

- [1] Mayers, J., Nelson, E., "Elastic and Maximum Strength Analysis of Postbuckled Rectangular Plates Based upon Modified Versions of Reissner's Variational Principle,"

- Presented at AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA paper No. 68-171, 1968.
- [ 2 ] Kapur, K. K., and Hartz, B. J., "Stability of Plates Using the Finite Element Method," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.92, No.EM2, 1966.
- [ 3 ] Chung, T. J., *Continuum mechanics*, Prentice-Hall, 1988.
- [ 4 ] 민철기, "분할판 개념을 이용한 평판의 좌굴 해석," 박사학위논문 인하대학교, 1993.
- [ 5 ] Alexander Chajes, *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, 1974.
- [ 6 ] Column Research Committee of Japan, *Handbook of Structural Stability*, Corona Publishing Company, 1981.
- [ 7 ] Zdeněk Sobotka, *Theory of Plasticity and Limit Design of Plates*, Elsevier, 1989.
- [ 8 ] Yoo, S. Y., *On Maximum Strength of Plates under Axial Compression-Effects of Curvature and Edge-Stiffener Extensional and Torsional Rigidity*, Ph. D. thesis, Stanford University, 1979.
- [ 9 ] Szilard, R., *Theory and Analysis of Plates*, Prentice-Hall, 1982.
- [10] Owen, J., and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press, 1980.
- [11] Griffiths, D. V., and Smiths, I. M., *Numerical Methods for Engineers*, Blackwell Scientific Publications, 1991.
- [12] Reddy, J. N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, 1987.

(접수일자 : 1995. 1. 10)