

적층 이방성 회전체 쉘의 고유진동 해석

Natural Vibrations of Laminated Anisotropic Shells of Revolution

전 종 균*
Chun, Chong-Kyun

요 약

자유 모양을 한 적층판 형태의 복합 회전체 쉘 구조물은 원추형 쉘 요소의 조합으로 나타낼 수 있다. 이에 이 논문에서는 원추형 쉘 요소에 대한 유한요소해석 모델을 개발하고자 한다. 또한 이 모델의 타당성을 입증하기 위해 기존의 원통형 쉘의 고유진동 이론해와 비교한다. 여러 형태의 복합 원통형 쉘에 대해 여러 가지 인자변환 실험을 행한다. 실험을 통하여서 이 논문에서 제시한 모델을 이용한 고유진동 주파수 결과와 이론해에서 구한 결과가 매우 흡사하다는 것을 알았으며 그로 말미암아 이 모델의 적합성을 확인하였다. 이 원추형 쉘 요소의 개발로 말미암아 어떠한 형태의 적층 이방성 복합 회전체 쉘에 대해서도 해석이 용이하다.

Abstract

Any arbitrarily shaped laminated composite shells of revolution can be sum of the conical shell elements. Therefore, finite element model of conical shell element will be developed in this study. To verify consistency and validity of this model, natural vibrations of this model is compared with the analytical solution of cylindrical shell. Herein, an extensive parametric study is presented to assess the modeling capability of this model in class of laminated composite cylinders. It is seen that the proposed model provides highly accurate results with analytical solution. Once development of this conical shell element is done, any arbitrarily shaped composite shells of revolution can be easily analyzed.

1. 서 론

비행기 구조물이나 복잡한 회전체 쉘 형태의 구조물 등을 정확하게 3차원적으로 해석하려면 여러 가지 어려움이 발생한다. 3차원 해석은 결과를 구하기도 힘들고 더욱이 많은 계산시간을 요구하고 있다. 더욱이 이 쉘이 여러 개의 판을 쌓아 놓은 형태의 복합재료 일 때에 해는 더 복잡해진다. 강

도나 내구성 측면에서 복합재료가 성능이 월등한 관계로 요즈음의 산업 현장에서 복합재료가 많이 이용되고 있다. 판을 직각으로 쌓는 방법도 있겠지만 임의의 어떠한 각도로 쌓느냐에 따라 이방성(anisotropic)이라는 단어가 발생된다. 고전이론(Kirchhoff-Love Theory)이 수학적으로 해를 찾기 어려운 3차원 해석을 대신할 수 있다.

어떠한 형태의 자유 모양을 한 적층판 복합 회

* 선문대학교 기계공학과 조교수

이 논문에 대한 토론회를 1996년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1996년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

전체 쉘 구조물(arbitrarily shaped laminated shells of revolution)은 원추(cone) 모양을 한 쉘 조각의 조합으로 볼 수 있다. 원추 형태의 이방성 복합 쉘 요소에 대하여 해석 프로그램을 개발하면 어떠한 형태의 회전체 쉘 구조물에 대해서도 해석이 가능하며 더욱이 이 쉘 구조물이 회전체이므로 원주 방향으로 차원을 하나 줄여 1차원 해석만으로 용이하다. 이에 본 논문에서는 회전체 원추형 쉘 요소에 대한 고전이론식을 전개하고자 한다.

이 이론의 타당성을 입증하기 위해 기존의 원통형 쉘 구조물의 고유진동 이론 해와 이 쉘 요소를 이용한 결과와 비교 검토한다. 여러 가지 인자를 변화시켜 과연 이 유한요소 모델의 정당성을 얻고자 한다.

2. 원추형 쉘의 유한요소해석

원통좌표계 (x, θ, z) 를 취한다. 여기서 x 는 축방향 혹은 길이방향, θ 는 원주방향, z 는 두께(thickness)방향이다. 쉘의 변화(U_x, U_θ, W)가 중립면의 변위(u_x, u_θ, w)이므로

$$\begin{aligned} U_i(x, \theta, z, t) &= u_i(x, \theta, t) \quad (i=x, \theta) \\ W(x, \theta, z, t) &= w(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

Fig. 1과 같이 원추형 쉘 요소에서 r, x, θ 좌표를 취한다. r 은 반지름 방향, x 는 길이방향, θ 는 원주 방향을 나타낸다. 변위장(displacement field)을 구한다.

$$\{u\} = \{u_x, u_\theta, w\}^T = [N]\{U\} \quad (2)$$

여기서 w 에 대하여는 3차 Hermite Polynomial을 사용하고 나머지 변수에는 선형 Lagrangian interpolation function을 사용한다. \mathbf{u} 는 3×1 이고 \mathbf{U} 는 절점변위로서 2개씩의 U_x, U_θ, W, β 로 구성 되어 있다. 결국 8×1 행렬이므로 \mathbf{N} 은 3×8 행렬이다.

다른 종속변수로는 6개의 변형률과 그에 대응하는 힘과 모멘트 합력들이 다음과 같다.

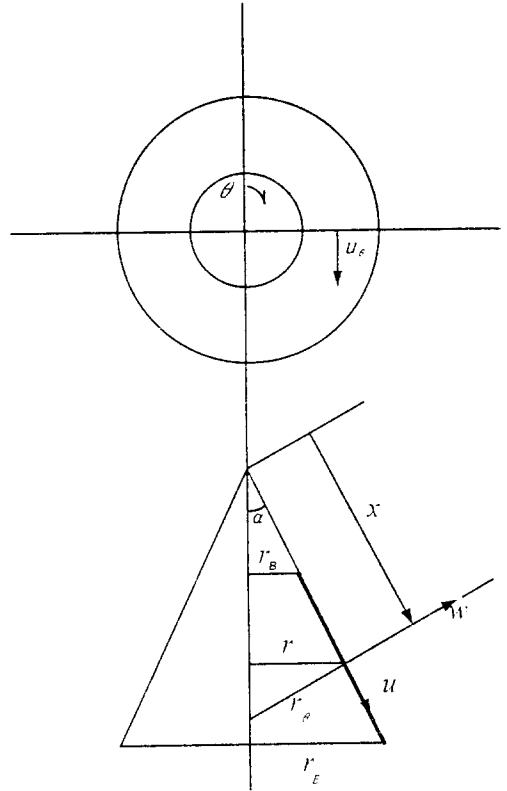


Fig. 1 Conical shell element

$$\{\epsilon\}^T = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{\theta\theta}, \gamma_{r\theta}], \{\chi\}^T = [\chi_{xx}, \chi_{\theta\theta}, \chi_{x\theta}] \quad (3)$$

$$\{N\}^T = [N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}], \{M\}^T = [M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}]$$

다음으로 변형률(ϵ, γ, κ)을 위의 기준이 되는 표면 변위로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u_{x,x}; \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_x \sin \alpha + w \cos \alpha); \\ \gamma_{x\theta} &= u_{\theta,x} - \frac{1}{r}(u_\theta \sin \alpha - u_{x,\theta}) \\ \chi_{xx} &= -w_{,xx}; \chi_{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}(w_{,\theta\theta} - \cos \alpha u_{\theta,\theta}) - \frac{1}{x}w_{,x} \\ \chi_{x\theta} &= -\frac{2}{r}[w_{,x\theta} - \frac{1}{x}w_{,\theta} - \cos \alpha(u_{\theta,x} - \frac{u_\theta}{x})] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $1/x = \sin \alpha / r$ 이다.

면내 힘과 모멘트 합력은 변형률과 다음의 관계식을 이룬다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} 는 3×3 부행렬(sub matrix)이고, 각각 신장(extensional), 조합(coupling), 휨(flexural) 강성도(stiffness)로서 다음과 같다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_h Q_{ij}^{(k)}(1, r, r^2) dr ; (i, j=1, 2, 3) \quad (6)$$

Eq. (4)의 변형률과 변위와의 관계식을 행렬 형식으로 표현하면

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [\mathbf{L}]\{u\} = [[\mathbf{L}_x] + [\mathbf{L}_\theta] + [\mathbf{L}_{\theta\theta}]] [\mathbf{N}]\{U(\theta, t)\} \\ &= [\mathbf{B}_x]\{U\} + [\mathbf{B}_\theta]\{U, \theta\} + [\mathbf{B}_{\theta\theta}]\{U, \theta\} \end{aligned} \quad (7)$$

$\{\varepsilon\}$ 이 6×1 행렬이고 $\{U(\theta, t)\}$ 가 8×1 행렬이므로 \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_θ , $\mathbf{B}_{\theta\theta}$ 는 6×8 행렬이 된다. \mathbf{L}_x , \mathbf{L}_θ , $\mathbf{L}_{\theta\theta}$, \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_θ , $\mathbf{B}_{\theta\theta}$ 는 부록에 수록되어 있다.

다음으로 최소 포텐셜 에너지 정리를 적용하기 위해 변형 에너지를 구해 보면

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \iiint_B \varepsilon^T \mathbf{C}^* \varepsilon \, r dx \, d\theta \, dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint_B (U^T \mathbf{B}_x^T \mathbf{C}_x U + U^T \mathbf{B}_x^T \mathbf{C}_B U, \theta \\ &\quad + U^T \mathbf{B}_x^T \mathbf{C}_{\theta\theta} U, \theta\theta \\ &\quad + U, \theta^T \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{C}_x U + U, \theta^T \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{C}_B U, \theta \\ &\quad + U, \theta^T \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{C}_{\theta\theta} U, \theta\theta \\ &\quad + U, \theta\theta^T \mathbf{B}_{\theta\theta}^T \mathbf{C}_x U + U, \theta\theta^T \mathbf{B}_{\theta\theta}^T \mathbf{C}_B U, \theta \\ &\quad + U, \theta\theta^T \mathbf{B}_{\theta\theta}^T \mathbf{C}_{\theta\theta} U, \theta\theta) \, r dx \, d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 \mathbf{C} 는 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} 로 이루어진 6×6 행렬이다. 다음으로 변분법(variational calculus)을 이용하여 Hamilton 정리를 전개하면 다음과 같은 운동 방정식을 얻는다.

$$\mathbf{K}_1 U + \mathbf{K}_2 U, \theta + (\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_4) U, \theta\theta + \mathbf{K}_5 U, \theta\theta\theta + \mathbf{K}_6 U, \theta\theta\theta\theta = \mathbf{M} \ddot{U} \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \int \mathbf{B}_x^T \mathbf{C}_x \mathbf{B}_x \, r dx ; \mathbf{K}_2 = \int [\mathbf{B}_x^T \mathbf{C}_B - \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{C}_x] \, r dx \\ \mathbf{K}_4 &= \int \mathbf{B}_x^T \mathbf{C}_B \mathbf{B}_\theta \, r dx ; \mathbf{K}_3 = \int [\mathbf{B}_x^T \mathbf{C}_{\theta\theta} - \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{C}_x] \, r dx \\ \mathbf{K}_6 &= \int \mathbf{B}_{\theta\theta}^T \mathbf{C}_{\theta\theta} \mathbf{B}_{\theta\theta} \, r dx ; \mathbf{K}_5 = \int [\mathbf{B}_{\theta\theta}^T \mathbf{C}_B - \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{C}_{\theta\theta}] \, r dx \\ \mathbf{M} &= \int \mathbf{N}^T [\rho \mathbf{h}] \mathbf{N} \, r dx \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 ρ 는 두께 방향 단위길이당 질량밀도, h 는 각 판의 두께이다.

위 식을 만족하는 변위 벡터를 $U(\theta, t) = U_0 e^{i(n\theta + \omega t)}$ 라고 가정하자. 여기서 n 은 원주방향 모드 수이고 U_0 는 절점 변위 벡터이다. 이 변위 벡터를 위의 운동 방정식에 대입하면 다음과 같은 고유치 방정식이 나온다.

$$(\mathbf{K}_R + i \mathbf{K}_I) U_0 = \omega^2 \mathbf{M} U_0 \quad (11)$$

여기서

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_1 - n^2(\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_4) + n^4 \mathbf{K}_6 ; \mathbf{K}_I = n \mathbf{K}_2 - n^3 \mathbf{K}_5 \quad (12)$$

여기에서 식이 복소수 형태이지만 다행히도 \mathbf{K}_R 은 대칭이고 \mathbf{K}_I 는 skew-symmetric이다. 그러므로 이 시스템은 실수 고유치만 존재한다. 위의 고유치 식을 크기를 2배하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_R - \mathbf{K}_I \\ \mathbf{K}_I & \mathbf{K}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ -iU_0 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ -iU_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

위 식의 $[\mathbf{K}]$ 와 $[\mathbf{M}]$ 은 16×16 행렬이다. 이 $[\mathbf{K}]$ 와 $[\mathbf{M}]$ 을 전체 시스템에 대하여 직접 강성도(direct stiffness)방법을 이용하여 시스템에 관한 $[\mathbf{K}]$ 와 $[\mathbf{M}]$ 행렬을 얻을 수 있다. 물리적으로 중요한 것은 제일 작은 몇 개의 고유치와 그에 상응하는 모드 형태들이므로 Dong and Wolf(1972)의 "subspace iteration" 방법을 이용한다.

3. 적층판 형태의 회전체 원통형 쉘의 고유진동 이론해

3개의 운동 방정식 $L_i(u_x, u_\theta, w)=0 (i=1,2,3)$ 을 갖고 있으며, $x=const$ 인 지점에서 4개의 경계 조건을 포함한다. 변위 벡터를 운동 방정식에 대입하면 3×3 행렬 방정식을 구할 수 있다. 이 운동 방정식과 3×3 행렬들의 요소는 Chun and Dong (1992)에 자세히 기술되어 있다.

4. PARAMETRIC STUDY

이 유한요소 모델의 타당성을 입증하기 위해 균질 등방성 재료, $\pm 45^\circ$ angle-ply, $\pm 30^\circ$ angle-ply 원통에 대하여서 고유진동수를 이론해와 비교하였다. 대칭을 이용하여 길이 방향으로 원통의 반만을 고려하였으며 각 실험에 대해 25개의 요소를 사용하였다. 모든 주파수는 $\sqrt{E/\rho H^2}$ 으로 무차원화 하였다. 여기서 (E, ρ, H)는 각각 Young's modulus, 밀도, 판의 전체 두께이다. 적층판 형태

가 Symmetric이나 Antisymmetric이냐가 중요한 조건의 하나이므로 그 중에서도 제일 심한 경우인 3 layer layup과 2 layer layup에 대하여서 실험을 하였다. 다른 중요 인자들로는 원통의 반지름 a , 전체 판 두께 H , axial wave length L , 원주 방향 모드 수 n 등이 있다. 위의 인자 중에서 3개의 인자를 2개로 나타낸 것이 $a/H, H/L$ 이다. 모든 실험에 대하여서 $a/H=10$ 을 취하였다.

4.1 Homogeneous isotropic cylinder

$\nu=0.25$ 인 경우에 대한 신장 모드와 굽힘 모드에 대해서 각각을 비교하였다. Fig. 2에서 보듯이 모든 구간에서 이론해와 일치하는 만족할 만한 결과를 얻었다. 균질 등방성 원통의 주파수 결과는 이 실험의 타당성의 근간(base line)이 된다.

4.2 $\pm 45^\circ$ Angle-ply cylinder

Fig. 3과 4에 결과를 나타내었다. Symmetric layup인 3 layer인 경우 원주 모드수가 10인 경우에 많은 오차를 유발하였다. 원주 모드 수가 10이

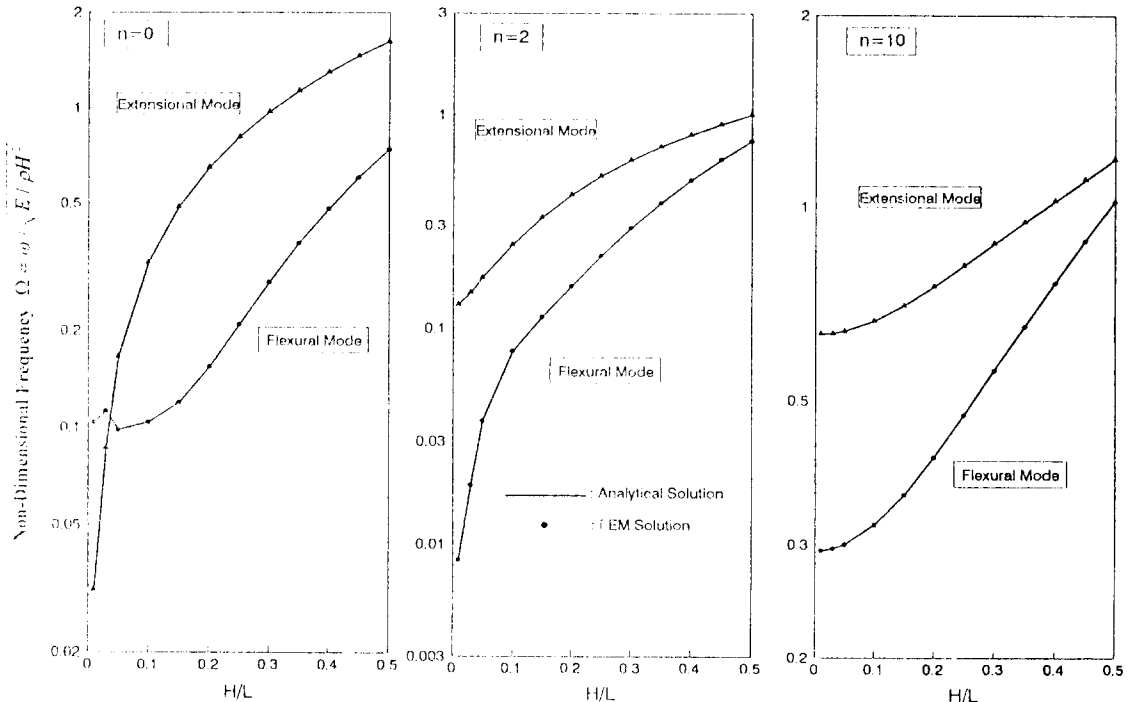


Fig. 2 Frequency spectra for isotropic cylinder- $\nu=0.25, a/H=10$

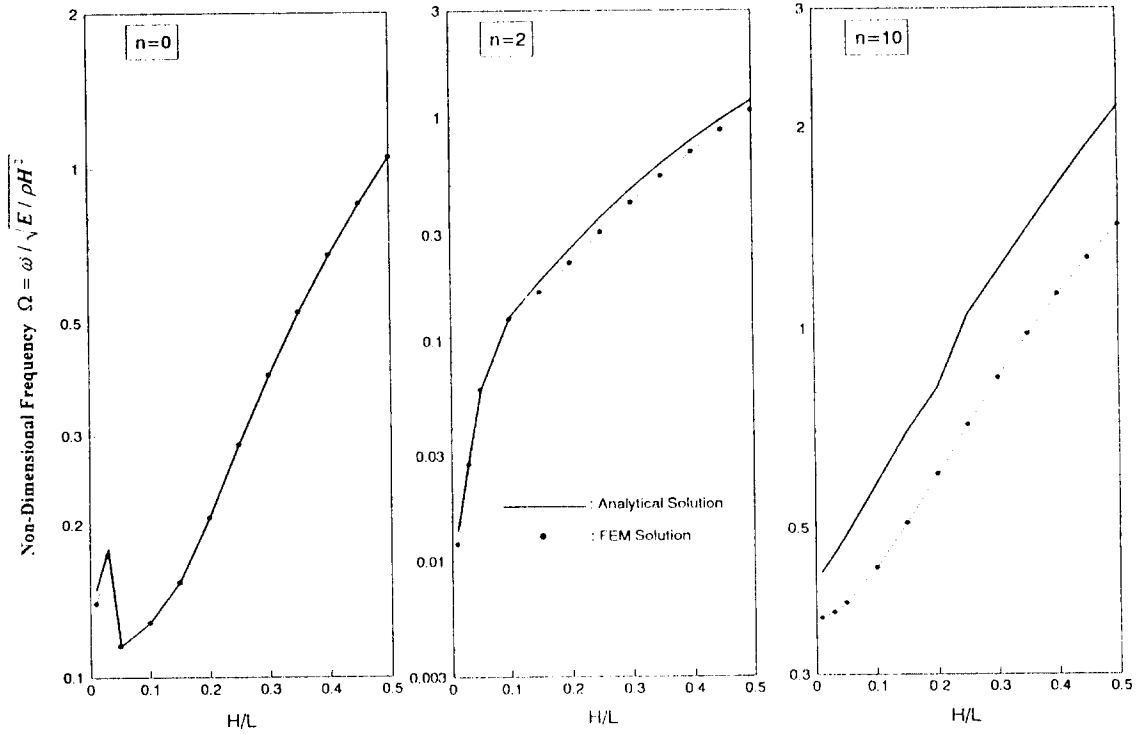


Fig. 3 Frequency spectra for 1st flexural mode in three-layer $\pm 45^\circ$ Angle-ply cylinder- $E_L / E_T=5$, $a / H=10$

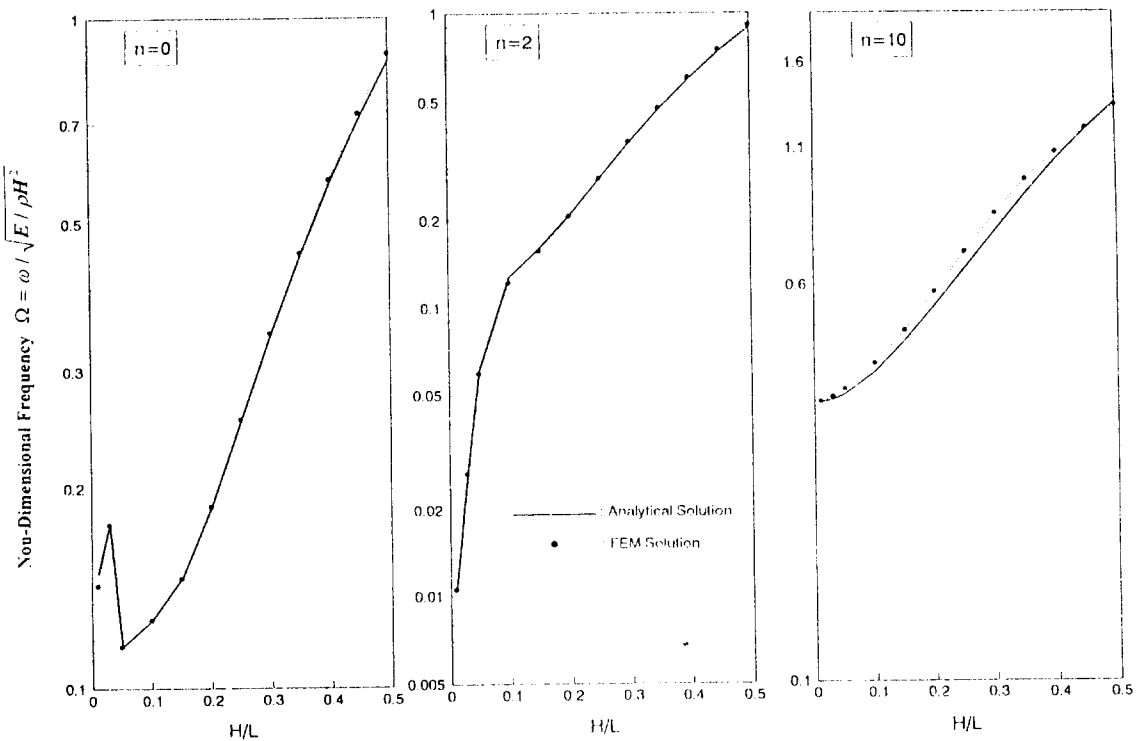


Fig. 4 Frequency spectra for 1st flexural mode in two-layer $\pm 45^\circ$ Angle-ply cylinder- $E_L / E_T=5$, $a / H=10$

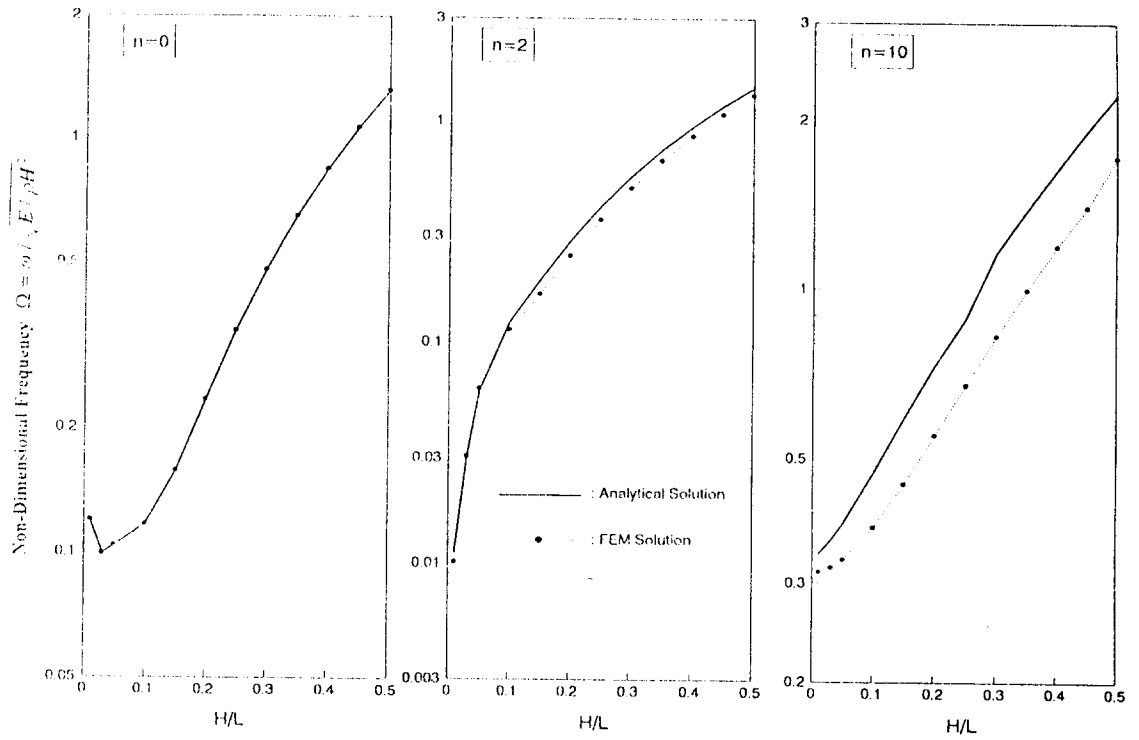


Fig. 5 Frequency spectra for 1st flexural mode in three-layer $\pm 30^\circ$ Angle-ply cylinder- $E_L/E_T=5$, $a/H=10$

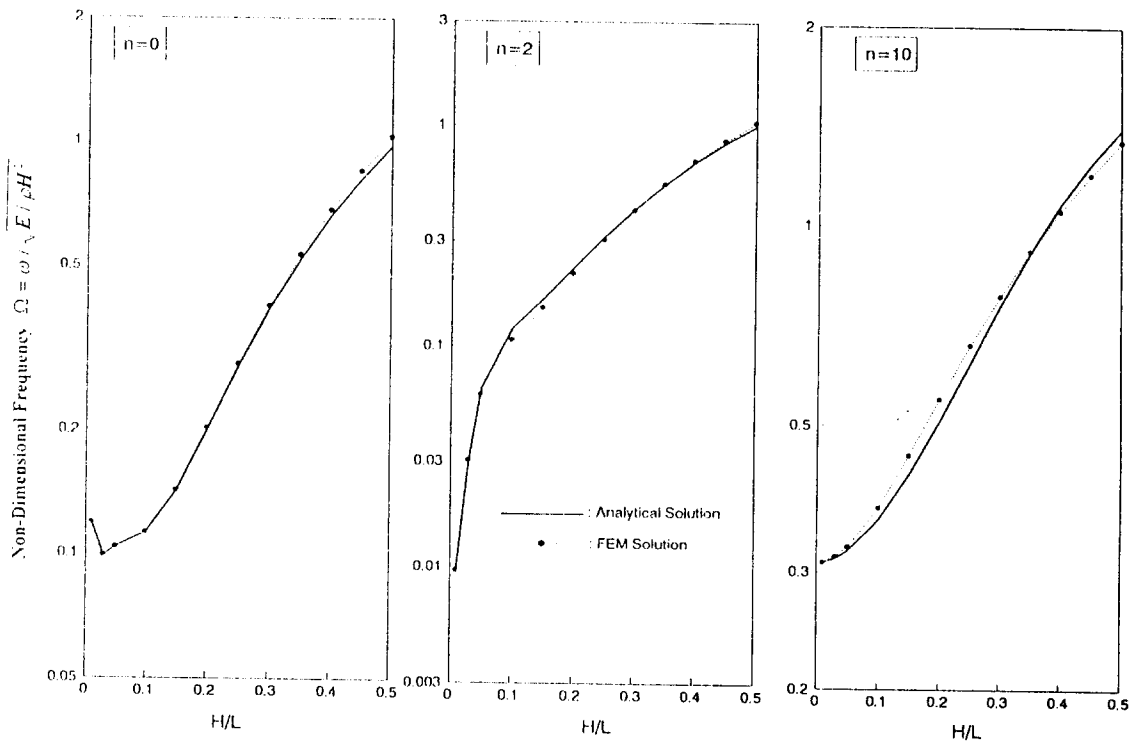


Fig. 6 Frequency spectra for 1st flexural mode in two-layer $\pm 30^\circ$ Angle-ply cylinder- $E_L/E_T=5$, $a/H=10$

라 합은 두께가 두꺼운 쉘에 해당되므로 이론 해와 유한요소해 둘 다 신빙성이 없다. 여기서는 소개하지 않았지만 정확한 3차원 Elasticity 해와는 FEM 해가 더 적은 오차를 유발한다. 또한 $n=0$, H/L 가 0.01이하인 경우에서 kink 현상이 발생한다. 이것은 정확한 굽힘 모드를 찾기가 힘들었고 10번째 이상인 모드에서 굽힘 모드가 발생하였다. Antisymmetric인 2 layer layup인 경우에는 모든 구간에서 대체로 만족할 만한 결과를 얻었다.

4.3 $\pm 30^\circ$ Angle-ply cylinder

Fig. 5와 6에서 보듯이 $\pm 45^\circ$ 인 경우와 마찬가지로 3 layer, $n=10$ 인 경우에 많은 오차를 유발하였다. 그 이외의 경우에는 만족할 만한 결과를 얻었다.

5. 결 론

여러가지 실험을 통하여서 고전적인 이론 해와 유사한 결과를 얻었다. 물론 원주방향 모드 수 n 이 증가하고(여기서는 $n=10$) 적층판 형태가 symmetric layup(3 layer인 경우)인 경우에 많은 오차를 유발하였다. 그러나 이 값조차도 정확한 Elasticity 해와는 고전적인 이론 해보다 더 근사한 값을 얻었다(여기에서는 소개하지 않았지만, Chun and Dong(1992)에 수록되어 있다). 원통형 이외의 쉘(예 : Toroidal 쉘)인 경우에는 해석 방법이 없어 이 새로운 유한요소 모델이 이익을 담당할 것으로 기대된다.

두께가 두꺼워지면 전단 변형을 고려한 새로운 모델이 등장하여야만 한다. 다음 단계로는 이 전단 변형을 고려한 유한요소 모델 연구를 하고자 한다.

참 고 문 헌

[1] Bert, C.W., "Research on Dynamic Behavior of Composite and Sandwich Plates," *Shock and Vibr. Dig.*, Vol.17(11), 1985, pp.3-15.
 [2] Chun, C.K., and Dong, S.B., "Shear Constitutive Relations for Laminated Anisotropic Shells and Plates, Part II - Vibrations for

Composite Cylinders," *J. Appl. Mech.*, Vol.59(2), 1992, pp.380-389.
 [3] Dong, S.B., and Chun, C.K., "Shear Constitutive Relations for Laminated Anisotropic Shells and Plates, Part I - Methodology," *J. Appl. Mech.*, Vol.59(2), pp.372-379.
 [4] Dong, S.B., and Tso, F.K.W., "On a Laminated Orthotropic Shell Theory Including Transverse Shear Deformation," *J. Appl. Mech.*, Vol.39(4), pp.1091-1097.
 [5] Dong, S.B., Wolf, J.A., and Peterson, F.E., "On a Direct-Iterative Eigensolution Technique," *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol.4, 1972, pp.155-162.
 [6] Etitum, P., *Stability Analysis of Laminated Composite Cylinders*, Ph.D Dissertation, Civil Engineering Dept, University of California, Los Angeles, California, 1993.
 [7] Kapania, R.K., and Raciti, S., "Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates," *AIAA J.* Vol.27(7), 1989, pp. 923-946.
 [8] Leissa, A.W., "Plate Vibration Research, 1976~1980 : Complicating Effects," *Shock and Vibr. Dig.*, Vol.139(10), 1981, pp.19-36.
 [9] Reddy, J.N., "A Review of the Literature on Finite-Element Modeling of Laminated Composite Plates," *Shock and Vibr. Dig.*, Vol.13(4), 1985, pp.3-8.
 [10] Yang, P.C., Norris, C.H., and Stavsky, Y., "Elastic Wave propagation in Heterogeneous Plates," *Int. J. Solids and Struct.*, Vol.2, 1966, pp.665-683. (접수일자 : 1995. 9. 29)

Appendix

기호

$$()' = \frac{\partial}{\partial x}() ; ()'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2}()$$

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2}$$

$$H_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \quad H_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\xi)^2$$

$$H_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \quad H_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\xi)^2$$

$$r = \frac{1-\xi}{2} r_B + \frac{1+\xi}{2} r_E$$

$$S = \sin \alpha / r, \quad C = \cos \alpha / r$$