한국통계학회논문집 제2권 2호
1995년 12월 pp. 387-394

부분적으로 균형된 불완비 블럭계획들 간의 퇴화에 관한 연구[1)]

배 종 성[2)]

요 약

반복수가 같은 이항 블럭계획(binary equireplicate block design)에서 조화행렬의 구조는 불완비 블럭계획의 분류 및 분석에 사용된다. 조화행렬의 구조에 의하여 몇가지 상반부류 수가 3인 부분적으로 균형된 불완비 블럭계획이 상반부류 수가 2인 부분적으로 균형된 불완비 블럭계획으로 퇴화되는 상반 조건을 보였다. 또한 처리 수가 6인 삼각형 계획의 상반관계를 이용하여 그룹분해 가능 계획의 배치계획을 구성할 수 있음을 보였다.

1. 서 론

불완비 블럭실험 중 완비된 불완비 블럭계획 (Balancd Incomplete Block Design:BIBD)은 분석이 간단하고, 임의의 두 처리 쌍의 분산을 같은 精度로 구 할 수 있어 효율이 균등한 이항계획(efficiency-balance binary design)으로 A-최적(A-optimal), D-최적(D-optimal), E-최적(E-optimal), M-최적(M-optimal)계획이 된다(John(1987),pp.28). BIBD는 주어진 모든 모수에 대해 배치계획을 구성할 수 있는 것은 아니지만 블럭 수를 늘이면 가능하다. 그러나 이 경우 실험의 횟수가 늘어 나므로 이러한 문제를 해결하는 방법으로 Bose 와 Nair(1939)는 블럭 수를 줄이는 대신, 모든 처리가 블럭에서 같은 횟수로 만난다는 균형성을 포기한 부분적으로 균형된 불완비 블럭계획(Partially Balanced Incomplete Block Design:PBIBD)을 생각해 내었다.

다음과 같은 상반관계(association scheme)를 만족하면 m 상반부류수(m-associate class)를 갖는 PBIBD(m)이라 한다.

(a) v개의 처리가 k개의 실험구를 갖는 b개의 블럭에 각 처리 별로 r회씩 배치되어 있다.

(b) 임의의 처리 t에 대해서 나머지 (v-1)개의 처리는 m개의 집합(class)으로 분류되고 i번째 집합에 속하는 n_i개의 처리들은 처리 t와 λ_i개의 블럭에서 만난다.

(c) 임의의 처리 t와 b개의 블럭에서 λ_i회 만나는 처리를 처리 t의 i번 상반(i^{th} associate)이라 한다. 임의의 처리 쌍 t와 t'가 k번 상반일 때 처리 t와는 i번 상반이고, 동시에 처리 t'와는 j번 상반인 처리 수를 p_{ij}^k이라 하면 p_{ij}^k는 어떤 처리 쌍을 택해도 같은 값을 갖는다.

PBIBD(m)에서 조화행렬 (NN′)은 다음과 같은 중요한 역할을 한다.

(a) 블럭내분석(intrablock analysis)에서 다음과 같이 정규방정식의 해를 구 하는데 사용된다(Shah(1959)).

---

1) 이 논문은 1994년도 한국학술진흥재단의 자유공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.
2) (500-757) 광주 광역시 북구 용봉동 300 전남 대학교 통계학과.

$$\hat{\tau} = (r\mathrm{I}_v - (1/k)\mathrm{NN}' + a\mathrm{J}_v)^{-1}(\mathrm{T} - (1/v)\mathrm{NB}).$$

여기서, $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_1\ \hat{\tau}_2\ ...\ \hat{\tau}_v)'$ 로 $\hat{\tau}_i$는 i번 처리의 추정치, I_v는 차수 v인 단위행렬, N 은 차수 $v*b$인 결합행렬(incidence matrix), N′는 N의 전치행렬, a는 0이 아닌 상수, J_v는 차수 v인 모든 원소가 1인 행렬, $T=(T_1, T_2, \cdots, T_v)'$로 T_i는 i번째 처리합, $B=(B_1, B_2, \cdots, B_b)'$로 B_j는 j번째 블럭의 합이다.

(b) NN′의 특수한 구조를 이용하여 역행렬을 구하지 아니하고 PBIBD(m)의 해를 구하는 방법이 연구 되어 왔다(Kurkjian 과 Zelen(1963), Paik(1985)).

(c) Pearce(1963)는 정보행렬(information matrix ; John(1987, pp.8))의 일반화된 역행렬의 구조에 따라 불완비 블럭계획을 분류 하였다.

(d) $\mathrm{NN}'=\{\lambda_{ij}\}$ 이라면 PBIBD(m)의 특성에 의해 $i=j$이면 $\lambda_{ii}=r$이고, $i\neq j$이면 λ_{ij}의 값은 i번 처리와 j번 처리가 만나는 블럭의 수로 서로 다른 λ_{ij}값들의 종류가 상반부류수가 된다. 예를 들면 모든 $\lambda_{ij(i\neq j)}=\lambda$이면 BIBD이고, $\lambda_{ij(i\neq j)}$가 m 종류의 값을 가지면 PBIBD(m)이 된다.

PBIBD(m)에서 m의 수가 줄어 드는 것을 축소(reduced) 혹은 퇴화(degenerate)라 하며 BIBD와 PBIBD(2)들의 직접 곱(Kronecker product)에 의해서 생성된 PBIBD(m)이 퇴화되는 것을 Vartak(1955)은 결합행렬과 이종의 모수 p_{ij}^k을 사용하여 증명 하였고, Kageyama(1972)는 BIBD들의 직접 곱에 의해 생성된 PBIBD(m) 들이 퇴화되는 것을 NN′의 특성근을 이용해 증명하였다.

PBIBD(m)들은 m=2인 경우는 배치계획이 비교적 많이 알려져 있지만 m이 3이상 일 때는 배치계획을 구성하기가 매우 어렵기 때문에 배치계획이 별로 알려져 있지 않고 개념을 이해하기가 매우 힘들다. 따라서 일종의 모수가 고정된 경우에는 m이 3이상인 PBIBD(m)인 경우 실험의 수를 줄일수 있다는 면에서 유용한 실험계획법 임에도 불구하고 실용성의 면에서는 많은 의문을 가지고 있다. PBIBD(m)들의 대부분은 계획에 따라서 NN′가 특수한 형태를 갖기 때문에, PBIBD(m)의 배치계획과 개념을 이해하기 위해서는 NN′의 구조를 중심으로 PBIBD(m)들의 치환관계 및 퇴화를 먼저 이해하는 것이 지름길이라 생각된다.

본 연구에서는 그룹분류 가능 계획을 중심으로 하여 PBIBD(m)들 간의 치환관계 및 퇴화가 되기 위한 λ_i들 간의 조건을 NN′의 구조에 의하여 연구하였다. 또한 삼각형 계획의 상반관계는 처리수가 10 이상인 경우만 성립하나 처리수가 6인 경우 삼각형 계획의 상반관계를 이용하여 그룹분류 가능 계획의 배치계획을 구성할 수 있음을 보였다.

2. 상반부류수가 2인 부분적으로 균형된 불완비 블럭계획

PBIBD(m)중 가장 간단한 계획들은 상반부류수 m=2인 경우이고(m=1인 경우는 BIBD) Bose 와 Nair(1939) 이래 가장 활발히 연구되어온 부분이다. 이러한 m=2인 계획들의 배치계획은 Clatworthy(1973)에 의해 875개의 배치계획이 6개의 계획으로 분류되어 수록되어있다. 즉

a) 그룹분류 가능 계획(group divisible deign :543개).

b) 삼각형 계획 (triangular design :100개).
c) 라틴방격형 계획 (latin square types design :146개).
d) 순환 계획 (cyclic design :29개).
e) 부분기하 계획 (partial geometry design:15개).
f) 기타 계획 (miscellaneous design : 42개).

이들 중 순환 계획은 배치계획을 구성하기 쉽고 순환 계획의 상반관계를 이용하여 다른 계획들의 배치계획을 구성할 수 있어 매우 유용한 계획이나 상반부류수가 고정되어 있지 않아서 본 연구에서는 제외 했다. 또한 부분기하 계획은 처리 수와 블럭 수에 대해 배치계획이 너무 제한되어 있어 제외 시켰다. 그룹분류 가능 계획, 삼각형 계획, 라틴방격형 계획중 그룹분류 가능 계획은 배치계획이 많이 알려 졌고(Clatworthy(1973)의 875개 배치계획 중 543개), 해도 쉽게 구할 수 있으며 요인 실험에도 유용하게 사용되기 때문에(John(1987),PP.60) 그룹분류 가능 계획을 중심으로 연구를 전개하려 한다.

2.1 그룹분류 가능 계획

처리 수 $v=m*n$이 n개의 처리씩 m그룹으로 나누어 지고, 임의의 처리 t와 같은 그룹에 속한 처리 간에는 첫번째 상반(first associate: λ_1), 다른 그룹에 속한 처리 끼리는 두번째 상반(second associate: λ_2)의 관계가 성립하도록 된 상반관계(association scheme)에 의해 작성된 PBIBD(*2*)을 그룹분류 가능 계획(Group Divisible Design :GD 계획)이라 하고 다음과 같은 상반관계가 성립한다.

$$r(k-1)=(n-1)\lambda_1+n(m-1)\lambda_2, \tag{2.1}$$
$$bk=rv.$$

$v=m*n$인 GD 계획의 NN′는 처리순서를 그룹 내의 순서로 배열하면 크기 $n*n$인 m^2개의 부분행렬로 분할되고 다음과 같이 표시 된다(John(1987), pp.59).

$$NN' = I_m \otimes [(r-\lambda_1)I_n+\lambda_1 J_n]+(J_m-I_m)\otimes\lambda_2 J_n. \tag{2.2}$$

여기서, ⊗는 직접 곱(Kronecker prodect)이다.

GD 계획의 NN′는 (2.2)식과 같이 표시되고 역으로 PBIBD(*2*)의 NN′가 (2.2)식과 같이 표시되면 PBIBD(2)는 GD 계획이다.

정리 1. PBIBD(*2*)의 NN′가 다음과 같이 표시되면 NN′는 그룹분류 가능 상반관계(group divisible association scheme)올 만족하고 $v= m*n$인 GD계획으로 된다.

$$NN' = I_m \otimes [(r-\lambda_1)I_n+\lambda_1 J_n]+(J_m-I_m)\otimes\lambda_2 J_n.$$

증명 NN′를 크기 $n*n$인 m^2개의 블럭행렬 C_{ij}로 표시하면 $NN' = (C_{ij})_{i,j=1,2,..m}$ 이고 또한 $C_{ij} = (\lambda_{pq})_{p,q=1,2,\cdots,n}$ 이라면 C_{ij}는 i번 그룹의 처리들과 j번 그룹의 처리들이 각 블럭에서 만나는 횟수를 나타내므로 C_{ij}에서 $i=j$인 경우, NN′의 특성에 의하여 $p=q$이면 $\lambda_{pq}=r$ 이고, $p\neq q$이면 같은 그룹내의 p번째 처리와 q번째 처리가 만나는 블럭의 수를 나타내므로 이는 그룹분류 가능 상반관계 에서는 λ_1을 의미한다. C_{ij}에서 $i\neq j$이면 λ_{pq}는 i번째 그룹 내의 p번 처리와 j번째 그룹 내의 q번 처리가 만나는 블럭의 수를 나타내므로 모든 $C_{ij(i\neq j)}$ 원소는 그룹분류 상반관계 에서는 λ_2에 해당한다. 즉 NN′가 n개의 처리를 갖는 m개의 그룹으로 분류되고 같은 그룹에 속하는 처리 끼리는 λ_1, 다른 그룹에 속하는 처리 끼리는 λ_2의 상반관계에 있음을 의미한다.이는 그룹분류 상반관계를 의미하고 이 상반관계에 따라 작성된 PBIBD(2)는 $v=m*n$인 GD 계획이다.

2.2 삼각형 계획

$n*n$ 행렬에 대각선 원소는 비워 놓고 오른쪽 위의 삼각형 행렬에 $v=n(n-1)/2$개의 처리를 자연수의 순서대로 배열한다. 왼쪽 아래의 삼각형 행렬 원소는 오른쪽 위의 삼각형 원소를 대칭 시켜 $n*n$ 행렬을 만들었다면 같은 행 같은 렬에 해당하는 처리끼리는 λ_1, 나머지 처리와는 λ_2의 상반관계에 따르도록 배치된 PBIBD(2)를 삼각형 계획(triangular design)이라 한다. 삼각형 계획의 NN′는 (2.2)식 같이 나타낼 수 없다(Hoffman(1960)). 삼각형 계획의 $P^2_{22} = (n-4)(n-5)/2$이므로 $n\geq 5$인 경우만 상반형이 존재한다. 따라서 $n=4$인 경우는 삼각형 계획의 상반관계를 만족하지 않지만 삼각형 계획의 상반관계에 따라 작성된 PBIBD(2)는 $v=3*2$인 배치계획이 (1 6) (2 5) (3 4)인 GD 계획으로 치환될 수 있고 NN′는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$NN' = I_3 \otimes [(r-\lambda_1)I_2 + \lambda_1 J_2] + (J_3 - I_3) \otimes \lambda_2 J_2 .$$

우리는 위의 사실과 (정리 1)을 이용하여 몇가지 GD 계획의 배치계획을 다음과 같이 구성할 수 있다.
(2.1)식에 의해 $r(k-1)=6$ 이므로 $r=3$이면 $k=3$ 이라는 사실을 이용하여 $v=6$, $r=3$, $b=6$, $k=3$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ 인 GD 계획의 배치계획을 구하면 다음과 같다.

(1 2 5) (2 3 4)(3 6 1) (6 5 2) (5 4 3) (4 1 6).

또한 (2.1)식에 의해 $r=2$이면 $k=4$이므로 $v=6$, $r=2$, $b=3$, $k=4$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$인 GD계획의 배치계획은 다음과 같다. 이 배치계획은 Clatworthy(1973)의 103쪽에 나와 있는 s1 배치계획과 같은 것이다.

(1 6 2 5) (2 5 3 4) (3 4 1 6).

이와 같은 방법으로 모수를 바꾸어가며 GD 계획의 배치계획을 구성할 수 있다.

2.3 라틴방격형 계획

$v=s^2$인 처리를 $s*s$ 방격에 자연수의 순서로 나열하고, 서로 다른 문자로 작성된 (i-2)개의 $s*s$ 라틴방격을 직교하게 겹쳤을 때 같은 행, 같은 렬, 같은 문자에 대응되는 처리 끼리는 λ_1, 나머지 처리들 과는 λ_2의 상반관계가 되도록한 상반형에 따라 구성된 PBIBD(*2*)를 라틴방격형 계획(latin square type design; L_i 계획)이라 한다. L_i 계획은 사용된 (i-2)개의 라틴방격 수에 따라 i가 4이면 L_2 계획,i가 5이면 L_3 계획 등으로 나타낸다. L_2 계획의 NN′는 다음과 같이 (2.2)식과 비슷한(2.3)식으로 나타낼 수 있지만 (2.2)식으로는 나타낼 수 없다.

$$NN' = I_s \otimes [((r-\lambda_1)I_s+\lambda_1 J_s)-((\lambda_1-\lambda_2)I_s+\lambda_2 J_s)]+J_s \otimes ((\lambda_1-\lambda_2)I_s+\lambda_2 J_s)). \qquad (2.3)$$

또한 $L_{i(i\geq 3)}$ 계획의 NN′는 퍼뮤테이션 행렬들의 직접 곱의 선형결합으로 나타낼 수 있지만 (배종성(1994)) (2.2)식과 같은 형태로는 나타낼 수 없다. 따라서 L_i 계획이 그룹분류 가능 계획으로 치환되는 경우는 없다.

3. 상반부류수가 3이상인 부분적으로 균형된 불완비 블럭계획

상반부류수가 3이상인 PBIBD(*m*)들도 여러 가지 계획들이 연구 되었으나 그 개념의 난해함과 더불어 배치계획을 구성하기가 매우 어렵기 때문에 [예를 들면 계보적으로 그룹 분류가 가능한 계획은 단지 7가지의 배치계획이 알려졌다(Raghavarao(1960))] PBIBD(2)보다 연구가 활발히 이루어 지지 못하였다(John(1987),pp .42). 상반부류수가 3이상인 PBIBD(*m*)은 여러가지가 알려 졌지만 본 연구에서는 John(1980)에 소개된 PBIBD(*m*) 중에서 NN′가 (2.2)식으로 표현되는 계획만을 생각 하였다.

3.1 직사각형 계획

$v=m*n$인 처리를 크기 $m*n$인 배열에 나열 했을 때 같은 행에 속한 처리 끼리는 λ_1, 같은 렬에 속한 처리 끼리는 λ_2, 나머지 처리와는 λ_3인 상반관계에 따르는 PBIBD(*3*)를 직사각형 계획(rectangular design)이라한다. Vartak(1955)에 의하면 직사각형 계획에서 NN′의 구조는 다음과 같다.

$$NN' = I_m \otimes [((r-\lambda_1)I_n+\lambda_1 J_n)-((\lambda_2-\lambda_3)I_n+\lambda_3 J_n)]+J_m \otimes ((\lambda_2-\lambda_3)I_n+\lambda_3 J_n). \qquad (3.1)$$

(3.1)식에서 $\lambda_2=\lambda_3$ 이면 (2.2)식과 같아진다. 따라서 (정리2)에 의하여 $\lambda_2=\lambda_3$ 이면 직사각형 계

획은 그룹분류 가능 계획으로 퇴화된다. 또한 $\lambda_1=\lambda_2$이면 (3.1)식은 (2.3)식과 같아진다. 따라서 직사각형 계획에서 $\lambda_1=\lambda_2$이고 $m=n$이면 직사각형 계획은 L_2 계획으로 퇴화한다.

3.2 계보적으로 그룹 분류가 가능한 계획

계보적으로 그룹 분류가 가능한 계획(Hierarchical Group Divisible Design:HGD계획)은 $v=N_1*N_2*\cdots*N_m$ ($N_1=1,2,\cdots,v_1$, $N_2=1,2,\cdots,v_2$, $N_m=1,2,\cdots,v_m$)으로 구성된 PBIBD(m)으로 첫 계보로 v는 $N_2*N_3*\cdots*N_m$ 개의 처리를 갖는 N_1개의 부분그룹으로 나누어지고 ,두 번째 계보로 N_1개의 각 부분그룹들은 $N_3*N_4*\cdots*N_m$개의 처리를 갖는 N_2개의 부분그룹으로 각각 나누어진다. 이러한 방법을 계속하면 m번째 계보는 N_m개의 처리를 포함하는 $N_1*N_2*\cdots*N_{m-1}$개의 부분그룹으로 나누어진다. $N_1*N_2*\cdots*N_{m-1}$개의 부분그룹에서 임의의 처리 t와 같은 부분그룹에 속하는 처리 끼리는 λ_1, (m-1)번째 계보에 속하는 처리와는 λ_2, 같은 방법을 계속해서 첫번째 계보에 속하는 처리와는 λ_m의 상반관계에 있도록하는 PBIBD(m)을 HGD계획이라 한다. Raghavarao(1960)에 의하면 HGD 계획의 조화행렬은 다음과 같이 표시된다.

$$NN'=\begin{pmatrix} B_m & A_m & \cdots & A_m \\ A_m & B_m & \cdots & A_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m & A_m & \cdots & B_m \end{pmatrix}$$

여기서,

$$A_i=J_{n_{m-i+2}\,n_{m-i+3}\cdots n_m}, \qquad i=2,3,\cdots m;$$

$$B_i=\begin{pmatrix} B_{i-1} & A_{i-1} & \cdots & A_{i-1} \\ A_{i-1} & B_{i-1} & \cdots & A_{i-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i-1} & A_{i-1} & \cdots & B_{i-1} \end{pmatrix}, \qquad i=2,3,\cdots,m$$

이고, $B_1=r$, $A_1=\lambda_1$ 이다.

John(1980)은 m=3인 경우 HGD 계획이 GD 계획으로 퇴화되는 경우를 보였으나, 본 연구에서는 이를 m=3,4,5...n인 일반적인 경우로 확장하여 HGD 계획이 GD 계획으로 퇴화됨을 보이고자 한다.

정리 2. HGD 계획에서 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{m-1}$ 이면 $v=(N_1*N_2*\cdots*N_{m-1})*(N_m)$ 인 GD 계획으로 퇴화하고, $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_m$ 이면 $v=(N_1)*(N_2*N_3*\cdots*N_m)$ 인 GD 계획으로 퇴화한다.

증명 HGD 계획에서 NN′가 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{m-1}$이고 $\lambda_2=\lambda_m$ 이라면 $p=N_1$, $q=N_2*N_3*\cdots*N_m$ 이고 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_m$ 이라면 $p=N_1*N_2*\cdots N_{m-1}$, $q=N_m$ 인 다음과 같이 (2.2)식으로 나타낼 수 있기 때문에 (정리 2)에 의하여 $v=p*q$인 GD 계획으로 퇴화한다.

$$NN'=I_P\otimes((r-\lambda_1)I_q+\lambda_1J_q)+(J_p-I_p)\otimes\lambda_2J_q.$$

4. 논 의

실제로 상반부류수 m이 3이상인 경우 본 연구에서 논의된 계획 중에서 λ_i들 간의 제약조건을 만족하는 PBIBD(m)들의 배치계획들을 찾아 내는 것은 매우 어려운 작업이고 또한 그러한 배치계획은 대부분 알려져 있지 않다(예를 들면 HGD 계획에서 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{m-1}$). 따라서 본 연구는 그러한 배치계획들이 알려지지 않았다는 면에서 실용성이 부족한 것은 사실이다. 그러나 PBIBD(m)들의 치환관계나 퇴화를 조화행렬의 구조에 의하여 규명 함으로써 반복수가 같은 이항 블럭계획법을 처음 접하는 사람이 PBIBD(m)의 개념 파악을 보다 쉽게 파악할 수 있고 또한 배치계획을 이론적으로 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 배종성 (1994). L_i계획에서 조화행렬의 구조에 관한 연구,「응용통계연구」,제7권 2호, 289-297.

[2] Clatworthy, W.H., with contribution by Cameron, J.M. and Speckman, J.A. (1973). *Tables of -two-Associate-class partially balanced designs,* National Bureau of Standards Applied Mathematics, Series 63.

[3] Hoffman, A.J. (1960). On the uniqueness of triangular association scheme, *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 31, 492-497.

[4] Kurkjian, B. and Zelen, M. (1963). Applications of the calculus of factorial arrangements I. Block and direct product sesigns, *Biometrika,* Vol. 50, 63-67.

[5] Kageyama, S. (1972). On the reduction of association classes for certain PBIB designs, *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 43, 1528-1540.

[6] John, J.A. (1987). *Cyclic designs,* Chapman and Hall, New York.

[7] John, P.W.M. (1980). *Incomplete block design,* Marcel Dekker, New York.

[8] Paik, U.B. (1985). Cyclic factorial association scheme partially balanced incomplete 3 block designs, *Journal of the Korean Statistical Society,* Vol. 14, No. 14, 29-34.

[9] Pearce, S.C. (1963). The use and classification of non-orthogonal designs(with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series A,* Vol. 126, 353-377.

[10] Shah, B.V. (1959). A generalization of partially Balanced incomplete block designs, *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 30, 1041-1050.

[11] Raghavarad, D. (1960). A generalization of group divisible designs, *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 31, 756-765.

[12] Shah, B.V (1959). A generalization of partially balanced incomplete block designs, *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 30, 1041-1050.

[13] Vartak, M.N. (1955). On an application of Kronecker product of matrices to statistical designs, *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 27, 420-438.