삼각 퍼지 멤버쉽함수의 특성

Properties of Triangle-Shaped Fuzzy Membership Function

이 규 택*, 이 장 규*
Gyu Taek Lee*, Jang Gyu Lee*

요 약

삼각 멤버쉽함수는 적용의 간편성으로 인하여 가장 널리 쓰이는 멤버쉽함수이다. 그러므로, 각 삼각형의 밑변의 길이가 퍼지 추론의 결과에 영향을 주는 이유에 대한 해석이 필요하다. 본 논문에서는 일정 비의 규칙성을 갖는 삼각 멤버쉽함수가 결과에 어떠한 영향을 미치는 지에 대하여 기하하적인 접근 방법으로 해석해 보았다.

ABSTRACT

Fuzzy membership functions are some kinds of mapping function for the fuzzification and the defuzzification. Triangle-shaped fuzzy membership functions are widely used in fuzzy controller, for it is easy to implement. In these membership functions, it is known that narrower fuzzy sets permit finer control near the operating point than that far from the operating point. Suppose we have a membership function with narrower triangle near zero and wider triangle far from zero. The membership function will make fine control when small input is given and rough control at large input. Therefore the performance of the controller with that membership function will be enhanced. This paper presents how the width of triangle base in the fuzzy membership function has influence on the output using geometrical approaches.

I. 서 론

본 논문에서는 퍼지논리제어기의 삼각형 모양을 하는 멤버쉽함수의 성질을 삼각형의 밑변 길이에 따라서 해석해 보았다. 삼각 멤버쉽함수는 적용이 간편하기 때문에 퍼지논리제어기에서 널리 사용된다. 일반적으로 삼각 멤버쉽함수에서 중심부근으로 갈수록 삼각형의 밑변의 크기가 작아지는 형태의 멤버쉽함수는 입력의 크기가 작을 때 정밀도가 높다고 알려져 있다. 그러므로, 이러한 멤버쉽함수를 갖는 퍼지논리제어기는 우수한 성능을 낼 수 있다고 판단되어 널리 사용된다. 그러나, 현재까지는 이러한 특성에 대한 연구가 없었기 때문에 해석이 필요했으므로, 본 논문에서는 밑변 길이에 대한 삼각 멤버쉽함수의 입출력 관계를 알아 보았다.

* 서울대학교 제어계측공학과
*Dept. of Control & Inst. Eng., Seoul Nat'l Univ.

Ⅱ. 삼각 퍼지 멤버쉽함수의 특성

삼각 멤버쉽함수의 대표적인 예를 두 개의 대표값에 대해서 그림.1에 나타내었다. 여기에서 두 대표값의 삼각형만 있는 것을 제시한 이유는 두 함수간의 상호관계를 통하여 여러개를 갖고 있는 전체의 경우까지 쉽게 확대적용이 가능하기 때문이다. 그림에서 x_k는 꼭지점이 있는 곳의 값이고, d_k는 꼭지점 x_{k+1}과 꼭지점 x_k의 사이 길이이다.

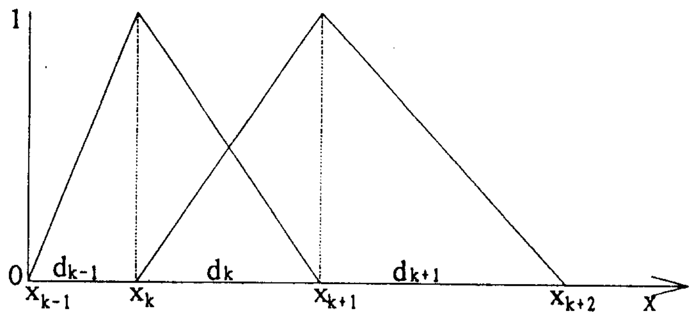

그림.1 삼각 멤버쉽함수의 예

(가정) 그림.1에서 문제의 전개를 위한 가정을 다음과 같이 한다.

1) 임의의 삼각형의 꼭지점과 다른 삼각형 밑변의 끝점은 일치한다고 가정한다. 즉, 꼭지점은 직선 $x=x_k$, $x=x_{k+1}$, ... 라는 선상에 존재한다. 이와같이 가정한 이유는 입력 A, B에 대하여 멤버쉽 함수값 $\mu(A)$, $\mu(B)$이 생성되는데, 두 입력에 대한 멤버쉽 함수값의 합 $\mu(A)+\mu(B)=1$이 항상 성립하도록 해서 매 순간 입력에 대한 영향을 동일하게 받도록 하기 위해서이다.

2) d_k는 $d_{k+1}=k\cdot d_k$와 같이 k라는 공비를 갖는 등비수열이다. 여기에서, $k\geq 1$이다. 이와같이 d_k를 규칙적으로 정하는 이유는 삼각 멤버쉽함수의 밑변의 길이에 대한 영향이 적절한 관계를 이룬 채 잘 나타나도록 하기 위해서이다.

3) 룰베이스는 표.1과 같이 입력에 대하여 동일한 출력을 내는 경우를 가정함으로서 멤버쉽함수의 영향만을 순수하게 고려할 수 있도록 했다.

표.1 가정된 룰베이스

Input	Negative Large	···	Zero	···	Positive Large
Output	Negative Large	···	Zero	···	Positive Large

입력에 따른 출력의 관계는 가장 널리 사용되는 무게중심법을 사용한다. 그리고, 계산의 편이를 위하여 $d_{k-1}=1$이라고 가정하면, $d_k=k$와 $d_{k+1}=k^2$이 되고, 이 들의 관계를 이용하여 입력 x에 대한 출력 x_c를 α와 β로서 나타내면 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha=\frac{x-x_k}{k}$$
$$\beta=\frac{x_c-x_k}{k} \tag{1}$$

이 때 $d_k(=k) \le x \le d_{k+1}(=k^2)$이라고 하면, $0 \le \alpha \le 1$이고 $\beta \ge 0$을 만족하게 된다.

여기에서 무게중심법에 의한 x_c가 0.5가 되는 지점을 $\bar{x}$라고 하면, $\bar{x} \equiv x_k + \bar{\alpha} \cdot k$라고 쓸 수 있는데, $\bar{x}$는 k가 주어지면 (2)와 같이 얻을 수 있다. 이제 입출력의 관계를 몇 가지 경우에 대하여 구해보자.

$$\bar{\alpha} = \frac{2k^2 - \sqrt{4k^4 - 2(k^2-2k-1)(k+2)}}{2(k^2-2k-1)} \tag{2}$$

첫째, $x < \bar{x}$, 즉, $\alpha \le \bar{\alpha}$인 경우에는 k가 주어진 상태에서 α에 대한 β의 관계를 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다. 이의 유도는 기하학적인 계산을 통해서 얻을 수 있다. 먼저 그림. 2의 빗금친 부분의 면적 S을 구하면 (3)을 얻을 수 있다.

$$S = \frac{1}{2}\left(1-\alpha^2\right)(1+k) + \frac{1}{2}\alpha\left\{(2-\alpha)k^2 + \alpha k\right\} \tag{3}$$

이 때 입력 α에 대한 출력 β의 값을 안다고 하면, 면적 S는 (4)와 같이 나타낼 수도 있으므로, (3), (4)를 같다고 하고 정리하면 (5)를 얻을 수 있다.

$$S = 2\times\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha^2)(1+k) - \frac{1}{2}(1-\beta)^2 k\right\} \tag{4}$$

$$\beta = 1 - \sqrt{\frac{(k^2-2k-1)\alpha^2 - 2k^2\alpha + k + 1}{2k}} \tag{5}$$

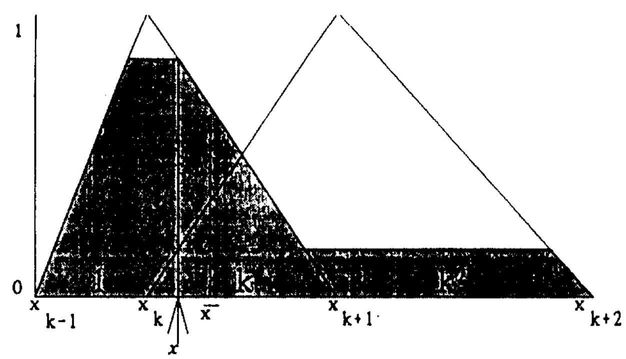

그림.2 $\alpha \le \bar{\alpha}$인 경우

둘째, 그림.3과 같이 입력이 $\bar{x} \le x < x_k + \frac{k}{2}$ 또는 $\bar{\alpha} \le \alpha < 0.5$이고, 계산된 결과인 β가 $1-\alpha$보다 작을 때는 첫번째의 경우와 마찬가지 방법으로 계산하면 (5)를 얻을 수 있다.

세째, 그림.4의 입력이 $\bar{x} \le x < x_k + \frac{k}{2}$ 또는 $\bar{\alpha} \le \alpha < 0.5$이고 계산된 결과인 β가 $1-\alpha$ 보다 크거나 같을 때인 경우와 그 외의 입력 즉, $x_k + \frac{k}{2} \le x$ 또는 $\alpha \ge 0.5$인 경우엔 면적 S가 (4)가 아닌 (6)과 같이 나타나게 된다. 그러므로, (3), (6)을 같다고 놓으면 (7)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

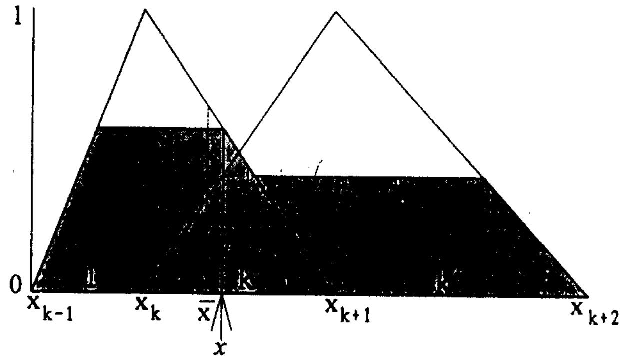

그림.3 $\bar{\alpha} \leq \alpha < 0.5$이고 결과 $\beta < 1-\alpha$인 경우

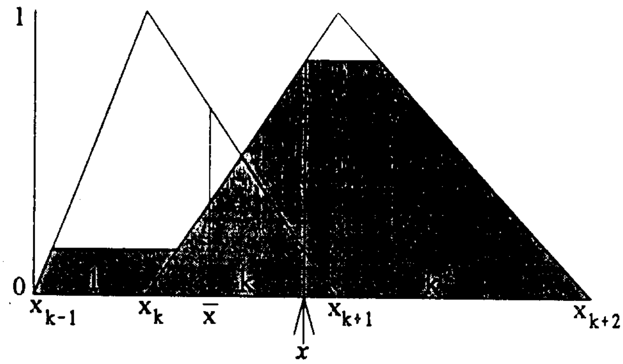

그림.4 $\bar{\alpha} \leq \alpha < 0.5$과 출력 $\beta \geq 1-\alpha$ 또는 $\alpha \geq 0.5$인 경우

$$S = 2 \times \left\{ \alpha(1-\beta) k + \frac{1}{2} \alpha(2-\alpha) k^2 \right\} \tag{6}$$

$$\beta = \frac{-1}{4k\alpha} \cdot \left\{ (k^2-1)\alpha^2 - 2(k^2+2k)\alpha + (k+1) \right\} \tag{7}$$

그리고, $\beta < 1-\alpha$는 k가 결정되면 (8)과 같이 쓸 수 있으므로, 이상의 둘째와 세째를 k만을 이용해서 구분할 수 있다.

$$\beta < 1 - \frac{k^2 - \sqrt{k^4 - (k^2-4k-1)(k+1)}}{k^2-4k-1} \tag{8}$$

이상의 (1)부터 (8)까지를 종합하면, k에 의한 α-β의 관계는 그림.5와 같이 얻을 수 있다. 그림.5는 $k=1$인 경우부터 $k=6$인 경우까지를 나타내었는데, 강한 비선형성을 보여주고 있다. 특히, k가 증가하면서 $\alpha=0$일 때에도 출력 β에 일종의 가중치가 주어지는 것을 볼 수 있으며, α가 1까지 가는 동안 최대값을 가진 후 작아지는 β의 경향도 볼 수 있다.

그림.5에서 α나 k에 대한 β값은 (9)와 같이 주어지게 되므로, $\alpha=0$일 때는 k가 증가하면서 β의 초기값이 일정한 값으로 수렴함을 알 수 있고, $\alpha=1$일 때는 β가 k의 함수로서 표현됨을 알 수 있다.

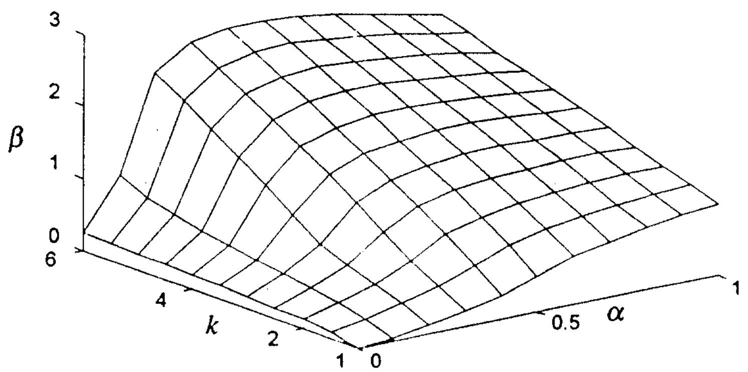

그림.5 k에 의한 α-β의 관계

$$\beta|_{\alpha=0,\,k\to\infty} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\beta|_{\alpha=1,\,k} = 1 + \frac{k-1}{4} \tag{9}$$

그리고, β의 최대값은 (10)과 같이 나타낼 수 있는데, k＝1인 경우를 제외하고는 α의 범위가 $0 \le \alpha \le$ 인 구간 안에서 β의 최대값이 존재한다. 그러므로, (10)으로부터 관심있는 값의 주위에서 커다란 출력을 만들어내는 멤버쉽함수의 역할을 확인할 수 있다.

$$\beta_{\max} = \begin{cases} \dfrac{-1}{4k\sqrt{k-1}} \cdot \left\{ (k+1)(k^2-2k+2) - 2(k^2+2k)\sqrt{k-1} \right\}, & k \neq 1 \\ \textit{no peak value}, & k = 1 \end{cases} \tag{10}$$
$$\text{at } \alpha = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

그림.5에서 k＝1일 때의 α-β의 관계를 분리하여 자세히 살펴 보자. 이 경우는 멤버쉽함수의 모양이 모두 같은 형태를 지니고 있는 것으로서 실제 제어기에 많이 사용된다. 이상을 그림으로 나타내면 그림.6과 같다. 그림.6은 k＝1이므로 모두 대칭인 삼각형의 멤버쉽함수를 갖는 경우에도 α-β의 비선형성을 잘 보여주고 있다. 여기에서 특기할 점은 α의 값이 0.5인 경우일 때가 각 함수의 대표값을 나타낸다고 할 수 있는데, 0.5를 전후하여 입력에 비해 커다란 출력을 내므로, 삼각형의 멤버쉽함수는 입력이 대표값을 벗어나려할 때 자연스럽게 출력의 이득을 높혀, 성능을 증대시키는 효과를 냄을 알 수 있다. 특히 임의의 제어기가 오차를 최소화 또는 0으로 만드는 목적을 위해서 설계되었다면(실제로 사용되는 대부분의 제어기가 이런 형태를 지니고 있다.), 멤버쉽함수의 ZERO를 전후하여 입력 대 출력의 비가 1을 넘게 되므로, 입력 α에 비하여 출력 β가 큰 값을 나타낸다. 그러므로, 입력이 ZERO를 벗어나려 할 경우 출력의 이득에 가중치가 더해지는 제어 신호를 주기 때문에 이를 저지하는 효과를 보이게 된다.

(예제) k＝5일 때 위의 (1)부터 (8)까지로부터 그림.7을 얻을 수 있고, β의 최대값은 α＝0.5일 때 2.3000으로 주어진다. 그리고, α＝1일 때의 β값은 2로서 α가 증가했음에도 β가 감소함을 확인할 수 있다. 이러한 현상은 k가 커질수록 현저하게 나타난다.

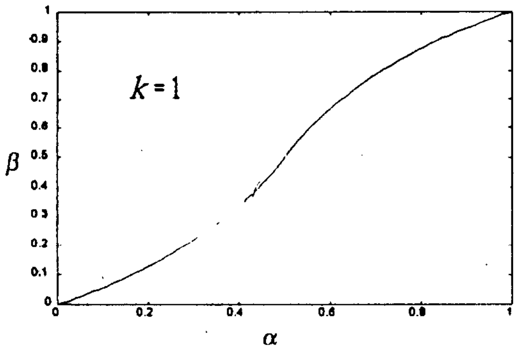

그림.6 $k=1$일 때 α-β의 비선형성

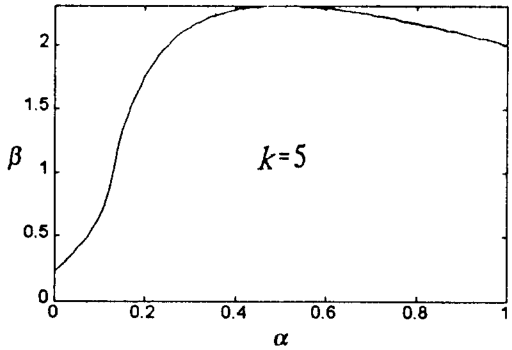

그림.7 $k=5$인 경우 α-β의 관계

Ⅲ. 결 론

일반적으로 멤버쉽함수가 삼각형일 때, 밑변의 폭은 결과에 상당한 영향을 미친다고 알려져 있었고, 특히 중심방향의 폭이 바깥방향의 폭보다 상대적으로 작을 때 중심부근에서의 정밀도가 높아진다는 판단하에 이러한 형태를 많이 사용해왔다. 본 논문은 삼각 퍼지 멤버쉽함수에 대하여 기하학적인 접근 방식을 통하여 이와 같은 일반적인 통념을 보여줄 수 있는 새로운 해석 방법을 제시하였다. 그리고, 이와같은 멤버쉽함수의 입출력 성질은 k에 의해서 결정됨을 보였다. 그러므로, 본 논문의 결과는 k값의 적절한 선택이 시스템의 성능에 커다란 영향을 줄 수 있다는 것을 보였고, 또한 퍼지논리제어기의 설계 시에 중요한 설계 요소로서 사용될 수 있는 가능성을 제시하였다.

참 고 문 헌

Kosko, B., *Neural Networks and Fuzzy Systems : A Dynamical Approach to Machine Intelligence,* Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1991

Lee, Chuen Chien, "Fuzzy Logic in Control Systems : Fuzzy Logic Controller-Part I," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* Vol.SMC-20, No.2, 1990, pp.404-418

Lee, Chuen Chien, "Fuzzy Logic in Control Systems : Fuzzy Logic Controller-Part II," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* Vol.SMC-20, No.2, 1990, pp.419-435

Wang, Li-Xin, *Adaptive Fuzzy Systems and Control : Design and Stability Analysis,* Prentice-Hall, Inc., 1994

Zadeh, L. A., "Fuzzy Sets," *Information and Control,* Vol.8, 1965, pp.338-352

후 기

이 논문은 (주)대우전자의 지원하에 수행되었음을 밝히며, 이에 감사를 드립니다.