

유전자 알고리즘을 이용한 퍼지 추론에서의
퍼지 함축에 관한 연구
Investigations on the Fuzzy Implication in the Context of
the Genetic-Based Fuzzy Reasoning

임 영 희*, 이 혜 성*, 박 대 희*
Younghee Im*, Haesung Lee*, Daihee Park*

이 논문은 1994년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음

요 약

국내외 문헌을 조사해 볼 때, 최적의 퍼지 함축을 선택하는 것이 퍼지 추론 및 퍼지 추론의 모든 응용 분야에서 근본적인 문제임을 알 수 있다. 그러나 많은 연구가들의 지속적인 연구에도 불구하고 개인적인 평가 기준과 사용되는 응용 모델에 따라 각기 다른 성능 평가가 이루어졌으므로 퍼지 함축의 선택 문제는 아직까지도 논란의 대상이 되고 있다. 최근 학습 이론의 도입으로 퍼지 추론은 상당한 효과를 보았으나 퍼지 함축의 선택 문제와 관련된 연구는 전무하다. 따라서 본 논문에서는 유전자 알고리즘을 퍼지 추론에 적용했을 때의 퍼지 함축의 선택 문제를 고찰, 분석한다. 즉 유전자 알고리즘을 이용하여 퍼지 소속 함수를 조정함으로써 퍼지 추론 기관의 성능 향상뿐 아니라 폭 넓은 퍼지 함축의 선택이 가능하다.

ABSTRACT

Reviewing the literature, it is clear that the selection of the best fuzzy implication operator is a fundamental problem in the fuzzy inference system and its application areas. Even though this subject has been discussed by many researchers, it is still controversial since the choice of a fuzzy implication operator reflected not only personal intuitive criteria but also the dependency of the task in question. As far as the intelligent fuzzy systems are concerned, there is a rapidly growing body of research employing some learning mechanisms. However, this direction is yet to be applied to the choice problem of fuzzy implication operator. In this paper, we perform the empirical investigation on fuzzy implication operator in the context of the fuzzy system based on the genetic algorithm. It is shown that the performance of the fuzzy systems can be significantly improved, independently on the selection of a fuzzy implication operator, by adjusting the fuzzy membership functions with genetic algorithm.

* 고려대학교 전산학과 DB 및 퍼지 연구실

** LG 전자 정보 시스템 연구소

I. 서 론

지금까지 Zadeh[1]에 의해 제안된 퍼지 추론과 이를 기반으로 한 퍼지 제어에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔으며, 여러 응용 분야에서 성공을 거두어 왔다[2]. 그러나 퍼지 추론은 1) 학습 기능(learning mechanism)의 결여, 2) 퍼지 소속 함수(fuzzy membership function)의 주관적인 결정, 3) 퍼지 함축 연산자(fuzzy implication operator)의 선택 등에 의해 시스템의 성능이 좌우된다는 문제점을 가지고 있다[3].

최근 위에서 지적한 퍼지 추론의 문제점중 1)과 2)의 해결을 위하여 신경망(neural network)이나 유전자 알고리즘(genetic algorithm)과 같은 학습 알고리즘이 퍼지 추론에 도입되어 많은 성과를 올리고 있다[3][4]. 반면 퍼지 함축 연산자의 선택 문제는 수많은 연구자들의 계속적인 연구에도 불구하고 아직까지도 논란의 대상이 되고 있다[5][6][7][8][9]. 이는 많은 연구자들이 각기 다른 평가 기준과 응용 모델에 따라 퍼지 함축의 성능을 평가 했기 때문이다.

Mizumoto와 Zimmerman[5]은 일반화된 연역 추론(generalized modus ponens)과 일반화된 대우 추론(generalized modus tollens)에서의 퍼지 함축에 의한 퍼지 추론을 분석한 결과, \otimes_2 (본 논문에서 다루는 모든 퍼지 함축의 정의는 참고 문헌 [7][8]을 참조하시오)와 같은 퍼지 함축이 그들의 평가 조건하에서 가장 좋은 결과를 보인다고 주장하였으며, 뒤이어 Mizumoto[6]는 1차 지연 플랜트 모델(plant model with first order delay)에서 \otimes_8 이 가장 좋은 퍼지 논리 제어기(fuzzy logic controller)를 얻을 수 있다고 주장하였다. 그러나 그들의 연구는 하나의 특정한 모델과 제어 규칙의 사용으로 인해 일반성을 잃고 있다.

Kiszka와 그의 동료들[7]은 직류 모터(direct current series motor)를 위한 퍼지 논리 제어기에서 36개의 퍼지 함축을 비교하였다. 연구 결과 \otimes_2 와 \otimes_{27} 이 가장 좋은 퍼지 함축이라고 주장하였으나, 평균 제곱 오차(mean square error)와 계산 횟수만을 평가 기준으로 사용하였으며 일반성을 잃고 있다. 그럼에도 불구하고 그들의 연구는 기존의 36개 함축들을 정리하는 업적을 이루었다.

Cao와 Kandel[8]은 36개의 퍼지 함축을 비교한 결과 \otimes_5 , \otimes_8 , \otimes_{22} , \otimes_{25} 와 \otimes_{31} 등이 좋은 추론 결과를 보인다고 보고하였다. 그들의 연구는 다음의 세가지 기준을 사용하여, 다양한 소속 함수와 다양한 모델에 대해 수행되었으므로 기존의 연구들에 비해 일반성을 갖는다. 1) 퍼지 함축에 의해 발생한 최대 오차(maximal error)는 언어적 표현(verbal description)에 의해 발생하는 최대 오차의 한계값 범위 안에 있어야 한다. 2) 좋은 퍼지 함축은 다양한 모델에서도 좋은 추론 결과를 보여야 한다. 3) 좋은 퍼지 함축에 의한 퍼지추론은 소속 함수의 변화에도 좋은 추론 결과를 보여야 한다.

Park과 그의 동료들[9]은 퍼지 모델의 일반성을 잃지 않기 위하여 가장 간단한 $Y=X$ 라는 모델에서 퍼지 함축에 관한 연구를 수행하였다. 그들은 Cao와 Kandel이 제안한 세가지 평가 기준외에도 다음의 두가지 평가 기준을 사용하였다. 4) 퍼지 소속 함수의 형태(shape) 변화에도 좋은 추론 결과를 보여야 한다. 5) 좋은 퍼지 함축에 의한 퍼지 추론은 퍼지 소속 함수뿐만 아니라 언어적 표현의 변화에도 좋은 추론 결과를 보여야 한다. 위의 5가지 평가 기준에 의해 그들은 \otimes_5 가 가장 강건한(robust) 퍼지 함축이라 보고하였다. 또한 \otimes_5 와 비슷한 추론 결과를 보이는 새로운 퍼지 함축도 제안하였다.

원성현과 그의 동료들[10]은 퍼지 집합의 확률을 고려한 퍼지 확률 집합(fuzzy probabilistic set)과 이를 통한 퍼지 확률적 함축(fuzzy probabilistic implication)을 제안하였으나, 퍼지 집합의 원소들의 정확한 선택 확률을 구하는 방법을 제시하지 못했기 때문에 정확한 결과를 얻지 못하였다.

Walle와 그의 동료들[11]은 해밍 거리(hamming distance)에 기초한 평가 기준을 이용하여 널리 사용되는 8가지 퍼지 함축을 비교하였다. 그러나 거리에 근거한(distance-based) 평가 기준만을 사용하였으므로 그들의 연구 결과 역시 일반성을 잃고 있다.

최근 신경망이나 유전자 알고리즘과 같은 학습 이론의 도입으로 퍼지 추론은 상당한 효과를 보았으나 퍼지 함축과 관련된 연구는 전무하다. 이는 퍼지 추론에 학습 이론을 응용한 대부분의 연구들이 퍼지 함축의 선택 문제를 고려하지 않는 Sugeno의 추론 방법[12][13]이나 Cao의 새로운 퍼지 추론 방법[3][4]을 사용함으로써 퍼지 함축의 선택 문제를 기피했기 때문이다.

따라서 본 논문에서는 유전자 알고리즘은 퍼지 추론에 적용했을 때의 퍼지 함축의 선택 문제를 일반적인 평가

기준들에 의해 고찰, 분석하고 그 해를 제시하고자 한다. 즉 기존의 퍼지 추론에서의 퍼지 함축 선택 문제가 아닌 한 단계 발전된 유전자 알고리즘이 응용된 퍼지 추론에서의 퍼지 함축 선택 문제에 대한 일반적인 해결책을 얻고자 한다. 또한 타당성 검증을 위해 퍼지 논리 제어기의 설계와 관련된 다양한 예제에 적용해 보고, 위에서 언급된 여러가지 평가 기준, 즉 Cao와 Kandel[8]의 평가 기준과 Park과 그의 동료들[9]이 사용한 5개의 기준에 의해 그 결과를 분석한다. 이는 퍼지 이론에서의 이론적 성과뿐 아니라 퍼지 추론이 응용되는 모든 연구 분야에서 그 성과를 기대할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 퍼지 추론에 대해 간략하게 살펴보고, III장에서는 기본적인 유전자 알고리즘과 퍼지 추론의 최적화에 사용된 유전자 알고리즘에 대해 설명한다. 이어 IV장에서는 유전자 알고리즘이 응용된 퍼지 추론에서의 퍼지 함축의 선택 문제를 위한 실험 대상 및 방법 그리고 실험 결과를 기술한다. 마지막으로 V장에서는 결론과 향후 연구 과제에 대해 논한다.

II. 퍼지 추론

본 논문에서 사용되는 퍼지 추론은 다음과 같은 형태의 규칙 베이스를 갖는다.

$$\begin{aligned}
 R_1: & \text{IF } X \text{ is } A(1) \text{ THEN } Y \text{ is } B(1) \quad \text{ALSO} \\
 R_2: & \text{IF } X \text{ is } A(2) \text{ THEN } Y \text{ is } B(2) \quad \text{ALSO} \\
 & \vdots \\
 R_n: & \text{IF } X \text{ is } A(n) \text{ THEN } Y \text{ is } B(n)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서 $A(1), A(2), \dots, A(n)$ 과 $B(1), B(2), \dots, B(n)$ 은 각각 입력 변수 X 와 출력 변수 Y 에 대한 언어항들의 퍼지 집합이고, 위의 식 (2.1)은 다음과 같이 하나의 퍼지 관계(fuzzy relation)로 변환된다. 즉,

$$R = \text{ALSO}(R_1, R_2, \dots, R_n) \tag{2.2}$$

이때 각각의 퍼지 규칙 R_i 는 다음의 식으로 표현된다.

$$R_i = \int \mu_{A_i}(x) \otimes \mu_{B_i}(y) / (x, y), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.3}$$

위의 식 (2.3)에서 \otimes 은 퍼지 함축(fuzzy implication operator)을 나타내며, 여기에서 퍼지 함축의 선택문제가 제기된다.

입력 변수 X 의 주어진 퍼지 집합 A 에 대하여, 출력 변수 Y 의 퍼지 집합 B 를 유추하기 위해서 합성 추론 규칙(compositional rule of inference)이 사용된다.

$$B = A \circ R \tag{2.4}$$

이때 \circ 는 합성 연산자이다.

출력 변수 Y 의 실수값 출력 y 로의 변환 과정인 비퍼지화(defuzzification)는 다음의 최대 평균법(mean of maximum method)에 의해 수행된다.

$$y = \sum_{k=1}^m y_k / m \tag{2.5}$$

이는 결론부 퍼지 집합에서 소속 함수가 최대값을 가지는 Y 의 값들의 평균을 내는 방법으로, y_k 는 소속값이 최대가 되는 지지값(support value)이고, m 은 최대값이 되는 지지값의 갯수이다.

또한 식 (2.2)의 ALSO 는 \min 연산(\wedge) 또는 \max 연산(\vee)으로 해석되는데, 본 논문에서는 kiszka와 그의 동

료들[7]의 실험 결과에 따라 좋은 추론 결과를 나타내는 연산을 취한다. 표 1은 본 논문에서 취한 36개 퍼지 함축에 관한 ALSO의 해석을 보여준다.

표 1. 퍼지 추론에서의 ALSO 연산

퍼지 함축	ALSO 연산	퍼지 함축	ALSO 연산	퍼지 함축	ALSO 연산
⊗ ₁	min	⊗ ₁₃	max	⊗ ₂₅	max
⊗ ₂	min	⊗ ₁₄	min	⊗ ₂₆	min
⊗ ₃	min	⊗ ₁₅	max	⊗ ₂₇	min
⊗ ₄	min	⊗ ₁₆	min	⊗ ₂₈	min
⊗ ₅	min	⊗ ₁₇	min	⊗ ₂₉	min
⊗ ₆	min	⊗ ₁₈	min	⊗ ₃₀	max
⊗ ₇	min	⊗ ₁₉	min	⊗ ₃₁	max
⊗ ₈	max	⊗ ₂₀	min	⊗ ₃₂	max
⊗ ₉	min	⊗ ₂₁	max	⊗ ₃₃	max
⊗ ₁₀	max	⊗ ₂₂	min	⊗ ₃₄	max
⊗ ₁₁	max	⊗ ₂₃	max	⊗ ₃₅	max
⊗ ₁₂	max	⊗ ₂₄	max	⊗ ₃₆	max

Ⅲ. 유전자 알고리즘을 이용한 퍼지 추론

퍼지 추론에서 전문가에 의해 주어지는 퍼지 소속 함수는 퍼지 논리 제어기의 성능을 좌우하는 중요한 요소이다. 그러나 퍼지 추론에서 언어적 표현에 대한 일반적인 인간의 이해를 정확하게 수치로 표현한다는 것은 어려운 일이며, 시행착오로 얻어지는 수치적 표현 또한 부정확하며 많은 시간과 노력을 필요로 한다. 따라서 자율적인 학습에 의해 최적의 소속 함수를 찾는 방법이 요구된다. 본 논문에서는 유전자 알고리즘을 이용하여 퍼지 규칙 베이스에서의 조건부와 결론부의 소속 함수를 최적화하고자 한다.

3.1 유전자 알고리즘

유전자 알고리즘은 자연 생태계의 적자 생존의 원리를 모방한 이론으로써 전역적인 탐색을 통해 최적화 문제를 해결하기 위한 탐색 알고리즘이다. 유전자 알고리즘은 평가 함수(evaluation function), 유전 연산자(genetic operator), 그리고 문제의 해를 표현하는 염색체(chromosome)로 구성되며, 이 염색체들을 점진적으로 개선시켜 나감으로써 최적의 해를 얻게 된다[15]. 유전자 알고리즘의 유전 연산에는 재생산(reproduction), 교배(crossover), 돌연변이(mutation) 등이 있다. 교배는 두 염색체간의 임의의 교차점(cross site)에서 교차가 발생하는 것을 말하며, 교차점은 난수 발생에 의해 구한다. 돌연변이는 부모의 염색체중 임의의 비트가 현재 비트값이 대립되는 값으로 바뀌는 것이다. 즉, 선택된 비트값이 0이면 1로, 1이면 0으로 변환된다. 그림 1은 염색체의 표현 방법을 보여주며, 그림 2는 8비트 크기의 염색체 X와 Y의 교배를 보여준다. 그리고 그림 3은 임의의 점에서의 돌연변이 연산을 나타낸다.

다음은 일반적인 유전자 알고리즘이다:

- [1] 염색체의 구조를 결정한 후 난수 발생에 의해 2진수로 염색체를 초기화한다.
- [2] [1]의 초기 염색체를 사용하여 초기 집단을 구성한다.

[3] 집단내에 있는 각각의 염색체를 10진수 코드로 변환시킨 다음, 평가 함수에 의해 적합도값(fitness value)을 구한다.

[4] 집단내의 각 염색체들을 다시 2진수로 변환한 다음 적합도값에 비례하여 교배와 돌연변이의 진화과정을 거쳐 새로운 집단을 얻는다.

[5]종결 조건(terminating condition)을 만족할 때까지 단계 [3]~[4]를 반복한다.

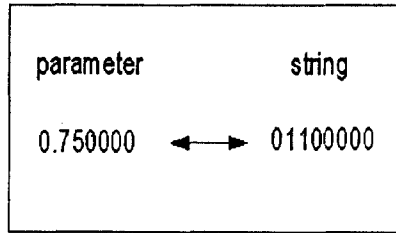


그림 1. 염색체의 표현

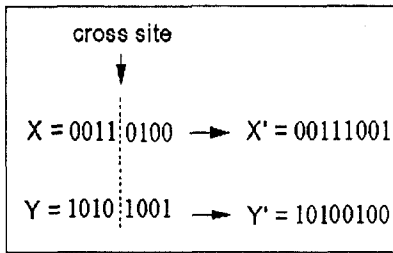


그림 2. 염색체 X와 Y의 교배

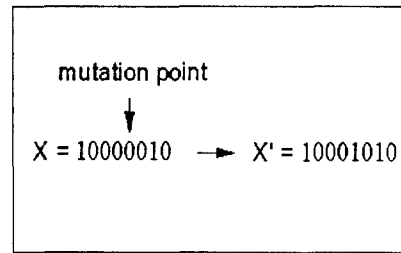


그림 3. 돌연변이

3.2 유전자 알고리즘을 이용한 퍼지 추론의 최적화

퍼지 소속 함수는 시스템에 따라서 여러 가지 형태로 적용될 수 있으며, 본 논문에서는 가장 일반적으로 사용되는 삼각 함수를 퍼지 소속 함수로 사용한다. 다음은 소속 함수로 사용되는 삼각 함수를 수식화한 것이다.

$$\begin{aligned}
 & f_i : x \rightarrow [0, 1] \\
 & f_i(x : \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = 0, \quad \text{if } x \leq \alpha_i \\
 & f_i(x : \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = (x - \alpha_i) / (\beta_i - \alpha_i), \quad \text{if } \alpha_i < x \leq \beta_i \\
 & f_i(x : \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = (\gamma_i - x) / (\gamma_i - \beta_i), \quad \text{if } \beta_i < x \leq \gamma_i \\
 & f_i(x : \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = 0, \quad \text{if } x \leq \gamma_i
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기서 β_i 는 삼각 퍼지 함수 f_i 의 중점값, α_i 와 γ_i 는 양 끝점을 나타낸다.

본 논문에서는 다음의 식에 의하여 위의 소속 함수를 조정한다[3].

$$\begin{aligned}
 \alpha_i & := (\alpha_i + \delta_i) - \eta_i \\
 \beta_i & := (\beta_i + \delta_i) \\
 \gamma_i & := (\gamma_i + \delta_i) + \eta_i
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

즉, 퍼지 소속 함수는 매개 변수 δ_i 와 η_i 에 의해 조정되며, δ_i 는 소속 함수를 모양의 변화없이 좌우로 이동시키고, η_i 는 소속 함수의 폭(width)을 조정한다.

본 논문에서는 퍼지 소속 함수를 최적화해주는 매개 변수 δ_i 와 η_i 를 찾기 위해 유전자 알고리즘을 사용한다. 따라서 퍼지 추론을 최적화하기 위한 유전자 알고리즘의 염색체는 실수형이며, 다음과 같이 두개의 부염색체(subchromosome)로 구성된다.

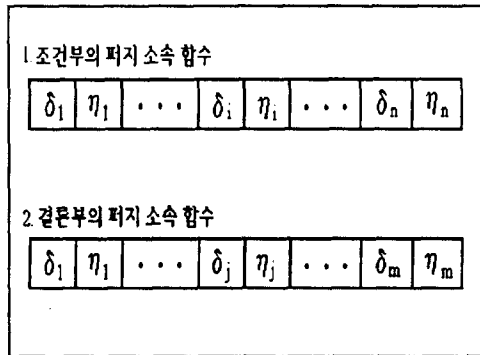


그림 4. 염색체의 구성

염색체의 적합도를 계산하기 위한 평가 함수는 다음과 같다.

$$J = 1 / (1 + \Delta e^2) \tag{3.3}$$

위의 식 (3.3)의 Δe^2 은 평균 제곱 오차를 나타낸다.

$$\Delta e^2 = \frac{\sum_{i=1}^v (n_{ri} - n_{mi})^2}{\sum_{i=1}^v n_{ri}^2} \tag{3.4}$$

이때 n_{ri} 는 퍼지 논리 제어기의 실제 출력값이고, n_{mi} 는 기대 출력값(desired output)이다. v 는 이산화된 데이터의 수이다. 따라서 유전자 알고리즘의 각 세대(generation)는 평균 제곱 오차가 감소하는 방향으로 진화하게 된다.

IV. 퍼지 함축의 실험적 고찰

4.1 실험 대상 및 방법

본 연구의 실험 대상이 되는 모델은 직류 모터를 위한 퍼지 논리 제어기로써 모터에 흐르는 전류의 양(I)에 따라 모터의 회전 속도(N)를 조정하게 된다. 다음의 그림 5는 실제 측정에 의해 얻어진 안정된 상태(steady-state)에서의 비선형적인 모터의 특성을 보여주고 있다. 또한 식 (4.1)은 그림 5에 대한 퍼지 규칙 베이스이다[8].

IF I = Null	THEN N = Very Large	ALSO	
IF I = Zero	THEN N = Large	ALSO	
IF I = Small	THEN N = Medium	ALSO	
IF I = Medium	THEN N = Small	ALSO	
IF I = Large	THEN N = Zero	ALSO	
IF I = Very Large	THEN N = Zero		(4.1)

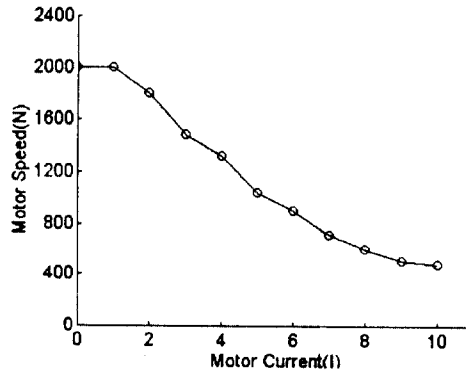


그림 5. EX 1의 실제 곡선

여기서 첫번째 규칙은 모터축으로부터 부하(load)가 끊어지면 흐르고 있던 소량의 전기자 전류(armature current)에 의해 모터의 속도가 빨라진다는 사실을 반영한 것이다[16].

좋은 퍼지 함축은 다양한 모델에서도 좋은 추론 결과를 보여야 한다는 Cao와 Kandel의 두번째 평가기준에 의해 다음의 6가지 형태의 모델(그림 6~그림 11)에 대해서도 실험을 한다(각 모델의 퍼지 규칙 베이스는 참고 문헌 [8]을 참조하십시오). 이때 사용되는 각 언어항에 대한 초기 퍼지 소속 함수는 모든 퍼지 모델에 대하여 동일하며, 다음의 그림12와 그림 13과 같은 형태를 갖는다.

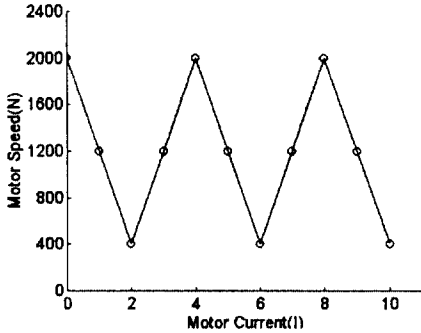


그림 6. EX 2의 실제 곡선

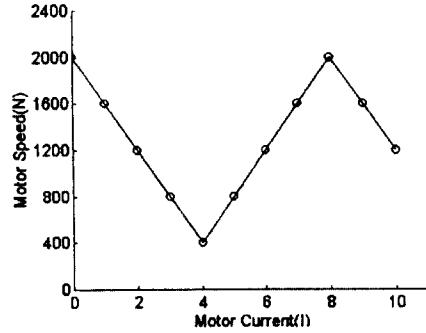


그림 7. EX 3의 실제 곡선

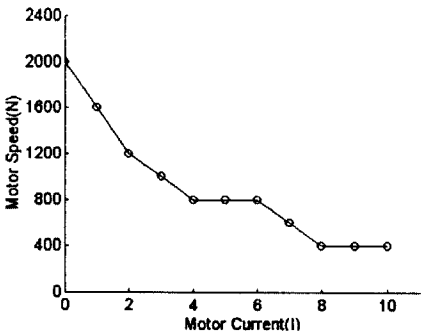


그림 8. EX 4의 실제 곡선

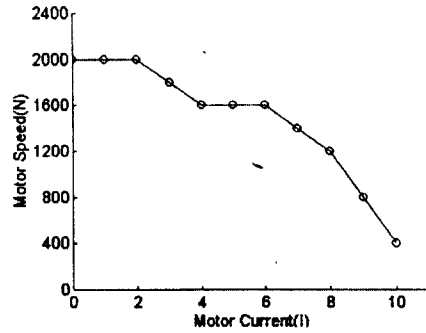


그림 9. EX 5의 실제 곡선

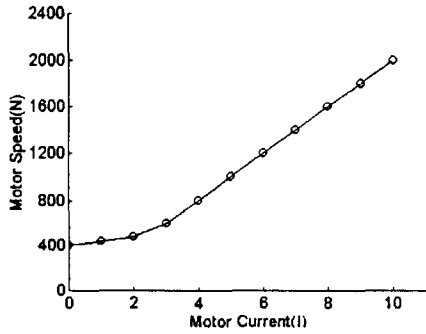


그림 10. EX 6의 실제 곡선

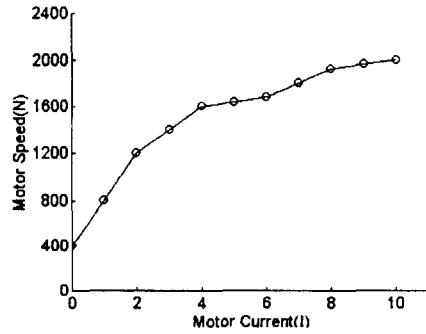


그림 11. EX 7의 실제 곡선

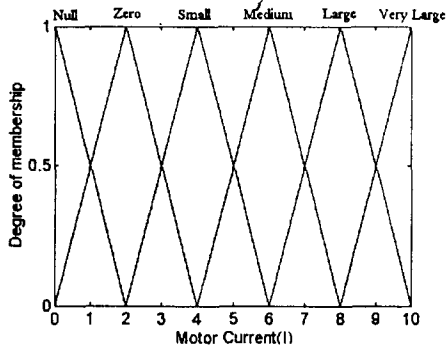


그림 12. 초기 조건부 소속 함수(I)

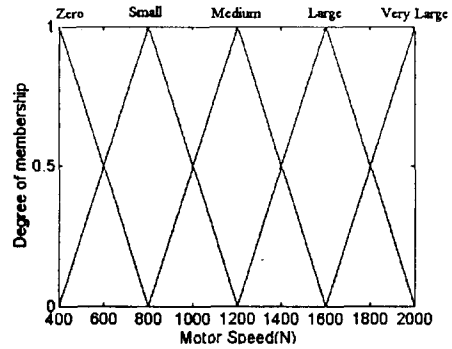


그림 13. 초기 결론부 소속 함수(N)

직류 모터는 입력 변수에 6개의 언어항(Null, Zero, Small, Medium, Large, Very Large), 출력 변수에 5개의 언어항(Zero, Small, Medium, Large, Very Large)을 가진다. 따라서 직류 모터의 동작을 근사하기 위한 퍼지 논리 제어기에 이용될 유전자 알고리즘의 염색체는 다음과 같이 구성된다. 입력 변수에 6개의 언어항 즉 소속 함수에 대해 각각 매개 변수 δ_i 와 η_i ($i=1, \dots, 6$)를 유전인자로 가지므로 12개의 유전인자(gene), 그리고 결론부의 소속 함수에 대한 매개 변수 δ_j 와 η_j ($j=1, \dots, 5$), 즉 10개의 유전인자로 이루어진다. 따라서 퍼지 추론의 최적화에 사용되는 염색체는 총 22개의 실수형 유전인자로 구성된다. 이때 δ_i 와 η_i 는 $[-1.5, 1.5]$ 의 구간에서 초기화되고, δ_j 와 η_j 는 모터의 회전 속도 N 을 $[1, 10]$ 의 구간으로 정규화시킨 후 마찬가지로 $[-1.5, 1.5]$ 의 구간에서 초기화한다. 돌연변이 연산은 선택된 유전인자를 초기 설정 구간에서 난수 발생에 의해 선택된 값으로 변환한다. 유전자 알고리즘에 사용된 매개 변수의 값은 다음과 같다.

표 2. 시립에 사용된 매개 변수의 값

집단의 크기	50
교배 확률	0.9
돌연변이 확률	0.1

4.2 실험 결과 분석

다음의 7개 퍼지 함축 $\otimes_2, \otimes_5, \otimes_8, \otimes_{22}, \otimes_{27}, \otimes_{31}$ 은 각 연구가들에 의해 서로 상충된 결과 보고도 있었지만, 일

반적으로 좋은 퍼지 추론 결과를 보인다고 보고되었던 퍼지 함축들이다. 그러나 각 연구가들의 평가 기준과 적용되는 응용 모델이 서로 다르기 때문에 좋은 퍼지 함축의 선택 문제는 지금까지도 많은 논란의 대상이 되어 왔고, 일반성을 갖는 결론에 도달하지 못하고 있다.

표 3과 표 4는 그간 논란의 대상이 되어 왔던 7개 퍼지 함축들을 본 논문에서 제안한 방법에 의해 7개의 다른 모델들을 대상으로 실험한 결과이다. 표 3은 유전자 알고리즘을 100번 학습시킨 후의 최종평균 제곱 오차(Δe^2)이고, 표 4는 마찬가지로 유전자 알고리즘을 100번 학습시킨 후에 퍼지 함축에 의해 발생한 최대 오차(max e_i)를 보여준다.

표 3. 7개의 퍼지 함축의 평균 제곱 오차(Δe^2) 비교

	EX 1	EX 2	EX 3	EX 4	EX 5	EX 6	EX 7
\otimes_2	1.526×10^{-4}	0	1.720×10^{-3}	3.222×10^{-4}	8.651×10^{-4}	2.240×10^{-4}	9.673×10^{-4}
\otimes_5	1.835×10^{-4}	0	8.028×10^{-3}	2.577×10^{-3}	0	3.200×10^{-5}	7.999×10^{-4}
\otimes_8	1.078×10^{-3}	0	1.792×10^{-4}	4.027×10^{-4}	1.081×10^{-4}	1.152×10^{-4}	6.322×10^{-4}
\otimes_{22}	3.993×10^{-4}	0	1.577×10^{-3}	0	0	3.200×10^{-5}	9.859×10^{-4}
\otimes_{25}	4.501×10^{-3}	0	0	0	0	1.351×10^{-4}	2.702×10^{-3}
\otimes_{27}	1.835×10^{-4}	0	2.867×10^{-3}	0	1.081×10^{-4}	3.200×10^{-5}	1.191×10^{-3}
\otimes_{31}	3.637×10^{-3}	0	0	0	0	1.351×10^{-4}	1.981×10^{-4}

표 4. 7개 퍼지 함축의 최대 오차(max e_i) 비교

	EX 1	EX 2	EX 3	EX 4	EX 5	EX 6	EX 7
\otimes_2	40	0	100	50	100	50	50
\otimes_5	40	0	250	100	0	20	100
\otimes_8	120	0	25	50	50	30	63.64
\otimes_{22}	45	0	100	0	0	20	150
\otimes_{25}	155	0	0	0	0	33.33	200
\otimes_{27}	45	0	200	0	50	20	150
\otimes_{31}	155	0	0	0	0	33.33	200

실험 결과의 일반성 확보를 위해 본 연구에서 사용한 평가 기준에 추론 결과를 적용시켜 보면, 1) 퍼지 함축에 의해 발생한 최대 오차(표 4)는 언어적 표현에 의해 발생하는 최대 오차의 한계값 400의 범위안에 있고, 2) 다양한 모델(EX 1~EX 7)에 대해서도 좋은 추론 결과를 보인다. 또한 유전자 알고리즘을 이용한 자율적인 학습에 의해 소속 함수를 최적의 상태로 조정하므로 3) 소속 함수의 변화와 4) 소속 함수의 형태 변화에도 좋은 추론 결과를 보여야 한다[8][9]는 평가 기준도 만족한다. 또한 언어적 표현의 변화는 결국 소속 함수의 변화로 해석되므로 5) 언어적 표현의 변화에도 좋은 추론 결과를 보여야 한다는 평가 기준 역시 만족한다. 실험 결과 위의 7개 퍼지 함축은 모두 좋은 추론 결과를 보임을 알 수 있다.

결국 퍼지 추론에 유전자 알고리즘을 적용하여 퍼지 시스템의 성능을 좌우하는 소속 함수를 조정해줌으로써 퍼지 추론 기관의 성능을 크게 향상시킬 뿐 아니라 폭 넓은 퍼지 함축의 선택이 가능하다. 따라서 그동안 각 연구가들에 의해 좋은 퍼지 함축이라고 보고되었던 퍼지 함축들은 유전자 알고리즘의 적용으로 인해 일반적인 평가 기

준을 모두 만족하는 퍼지 추론 결과를 보이므로 그간의 논란에 대한 일반성있는 새로운 결론을 이끌어 낼 수 있다. 즉, 유전자 알고리즘을 이용하여 소속 함수를 최적화함으로써 7개 퍼지 함축중 어느 퍼지 함축을 사용해도 좋은 퍼지 추론 결과를 얻을 수 있다는 것이다.

다음의 표 5와 표 6은 36개의 퍼지 함축중 위에서 언급한 7개의 퍼지 함축외에 좋은 퍼지 추론 결과를 보이는 12개의 퍼지 함축에 대한 평균 제곱 오차와 최대 오차값이다. $\otimes_3, \otimes_4, \otimes_6, \otimes_7, \otimes_{10}, \otimes_{15}, \otimes_{17}, \otimes_{23}, \otimes_{26}, \otimes_{28}, \otimes_{29}, \otimes_{33}$ 의 12개 퍼지 함축은 표 3과 표 4의 7개 퍼지 함축과 마찬가지로 퍼지 함축에 의해 발생한 최대 오차가 언어적 표현에 의해 발생하는 최대 오차의 한계값 400의 범위안에 있고, 다양한 모델에 대해서도 좋은 추론 결과를 보인

표 5. 12개 퍼지 함축의 평균 제곱 오차(Δe^2) 비교

	EX 1	EX 2	EX 3	EX 4	EX 5	EX 6	EX 7
\otimes_3	1.725×10^{-3}	0	6.307×10^{-3}	3.866×10^{-3}	0	5.120×10^{-4}	2.511×10^{-3}
\otimes_4	2.760×10^{-4}	0	3.440×10^{-3}	1.933×10^{-3}	0	3.200×10^{-5}	5.580×10^{-4}
\otimes_6	1.835×10^{-4}	0	8.458×10^{-3}	0	2.163×10^{-4}	1.696×10^{-3}	1.153×10^{-3}
\otimes_7	3.377×10^{-4}	0	6.64×10^{-3}	0	1.946×10^{-3}	3.520×10^{-4}	2.214×10^{-3}
\otimes_{10}	6.166×10^{-3}	0	0	0	0	1.351×10^{-4}	5.306×10^{-3}
\otimes_{15}	4.302×10^{-4}	1.148×10^{-2}	1.720×10^{-3}	1.289×10^{-3}	4.324×10^{-4}	8.961×10^{-4}	1.116×10^{-3}
\otimes_{17}	8.002×10^{-4}	0	1.147×10^{-2}	5.155×10^{-3}	0	2.560×10^{-4}	9.673×10^{-4}
\otimes_{23}	7.337×10^{-3}	7.972×10^{-4}	2.982×10^{-2}	9.021×10^{-3}	6.920×10^{-3}	6.912×10^{-3}	8.185×10^{-3}
\otimes_{26}	7.097×10^{-4}	0	3.013×10^{-3}	3.222×10^{-3}	2.163×10^{-4}	6.865×10^{-4}	5.436×10^{-4}
\otimes_{28}	2.760×10^{-4}	0	7.167×10^{-4}	3.222×10^{-4}	1.081×10^{-4}	3.200×10^{-5}	3.720×10^{-4}
\otimes_{29}	4.302×10^{-4}	0	8.028×10^{-3}	1.289×10^{-3}	2.163×10^{-4}	2.560×10^{-4}	1.079×10^{-3}
\otimes_{33}	1.294×10^{-4}	7.972×10^{-4}	5.971×10^{-3}	1.369×10^{-3}	9.126×10^{-4}	2.176×10^{-3}	1.289×10^{-3}

표 6. 12개 퍼지 함축의 최대 오차($\max e_i$) 비교

	EX 1	EX 2	EX 3	EX 4	EX 5	EX 6	EX 7
\otimes_3	100	0	300	150	0	80	200
\otimes_4	45	0	200	0	0	20	100
\otimes_6	100	0	150	0	50	100	100
\otimes_7	55	0	150	100	150	20	150
\otimes_{10}	240	0	0	0	0	33.33	300
\otimes_{15}	45	300	100	100	100	100	100
\otimes_{17}	80	0	300	200	0	60	100
\otimes_{23}	170	50	400	100	200	200	300
\otimes_{26}	71.70	0	100	100	50	75	70
\otimes_{28}	60	0	100	50	50	20	50
\otimes_{29}	45	0	250	100	50	60	150
\otimes_{33}	95	50	250	100	100	100	70

다. 또한 퍼지 소속 함수의 형태를 자율적인 학습에 의해 조정하므로 퍼지 추론의 성능 향상을 도모할 수 있다.

이밖에도 36개의 퍼지 함축 중 좋은 퍼지 추론 결과를 보이는 19개 퍼지 함축을 제외한 나머지 17개 퍼지 함축은 최대 오차값이 400보다 크거나, 몇가지 모델에 대해서만 좋은 추론 결과를 보이는 등 일반적인 평가 기준에 만족할 만한 추론 결과를 보이지는 않지만, 유전자 알고리즘에 의해 소속 함수를 조정함으로써 학습 기능이 없는 기존의 퍼지 추론 모델보다는 향상된 성능을 보인다(각 모델에 대한 36개 퍼지 함축의 실험 결과는 부록을 참조하시오).

V. 결 론

퍼지 추론에 있어서 퍼지 소속 함수는 퍼지 추론의 성능을 좌우하는 중요한 요소이다. 본 논문에서는 유전자 알고리즘을 이용하여 퍼지 추론에 학습 기능을 부여함으로써 자율적인 학습에 의해 퍼지 소속 함수를 최적화하였다. 이러한 유전자 알고리즘의 적용은 퍼지 추론 기관의 성능을 크게 향상시킬 뿐 아니라, 그동안 여러 연구가들의 계속적인 연구에도 불구하고 논란의 대상이 되어 왔던 퍼지 함축의 선택 문제에 대한 일반성있는 해결책을 제시해 준다.

그간 각 연구가들에 의해 좋은 퍼지 함축이라고 보고되었으나, 그들의 평가 기준과 적용 모델이 서로 다르므로 인해 많은 논란이 있어 왔던 7개 퍼지 함축, \otimes_2 , \otimes_5 , \otimes_8 , \otimes_{22} , \otimes_{25} , \otimes_{27} , \otimes_{31} 은 퍼지 추론에 유전자 알고리즘을 적용함으로써 일반적인 평가 기준들을 만족하는 좋은 추론 결과를 나타내었다. 그밖에 12개의 퍼지 함축 \otimes_3 , \otimes_4 , \otimes_6 , \otimes_7 , \otimes_{10} , \otimes_{15} , \otimes_{17} , \otimes_{23} , \otimes_{26} , \otimes_{28} , \otimes_{29} , \otimes_{33} 도 일반적인 평가 기준들을 만족하는 좋은 퍼지 추론 결과를 나타내었다. 또한 36개의 퍼지 함축중 위의 19개 퍼지 함축을 제외한 나머지 퍼지 함축들도 일반적인 평가 기준을 모두 만족하지는 않지만 유전자 알고리즘의 사용으로 인해 기존의 퍼지 추론보다는 향상된 추론 결과를 보인다. 따라서 유전자 알고리즘에 의해 퍼지 소속 함수를 최적화함으로써 퍼지 함축에 선택 문제에 있어서 폭넓은 선택이 가능하게 되었다. 즉 퍼지 추론의 응용 분야에 따라 19개의 퍼지 함축(\otimes_2 , \otimes_3 , \otimes_4 , \otimes_5 , \otimes_6 , \otimes_7 , \otimes_8 , \otimes_{10} , \otimes_{15} , \otimes_{17} , \otimes_{22} , \otimes_{23} , \otimes_{25} , \otimes_{26} , \otimes_{27} , \otimes_{28} , \otimes_{29} , \otimes_{31} , \otimes_{33}) 중 어떤 퍼지 함축을 선택해도 무방하다.

이후 연구에서는 자율적인 학습에 의해 퍼지 소속 함수뿐 아니라 퍼지 규칙 베이스도 함께 조정함으로써 좀더 지능적인 퍼지 추론 기관을 완성하고자 한다. 또한 완성된 지능적 퍼지 추론에서의 퍼지 함축에 대한 비교 연구도 기대된다.

참 고 문 헌

1. L. Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. 3, pp. 28-44, 1973.
2. 이광형, 오길록, *퍼지이론 및 응용 I, II*, 홍릉과학출판사, 1991.
3. D. Park, A. Kandel, and G. Langholz, "Genetic-based new fuzzy reasoning models with application to fuzzy control," IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., vol 24, no. 1, pp. 39-47, 1994.
4. D. Park, A. Kandel, and G. Langholz, "Hybrid neural-fuzzy reasoning model with application to fuzzy control," *Fuzzy Control Systems* A. Kandel and G. Langholz, Eds, CRC Press, pp. 355-373, 1994.
5. M. Mizumoto and H. J. Zimmerman, "Comparison of fuzzy reasoning methods," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 8, pp. 254-283, 1982.
6. M. Mizumoto, "Fuzzy controls under various approximate reasoning methods," in Preprints of second IFSA Congress, Tokyo, July 20-25, pp. 143-146, 1987.
7. J. B. Kiszka, M. E. Kochanska, and D. S. Sliwinski, "The influence of some fuzzy implication operators on the accuracy of a fuzzy model-part I, II," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 15, pp. 111-128, pp. 223-240, 1985.
8. Z. Cao and A. Kandel, "Application of some fuzzy implication operators," *Fuzzy Sets and Systems*, vol.

31, pp. 151-186, 1989.

9. D. Park, Z. Cao, and A. Kandel, "Investigations on the applicability of fuzzy inference," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, no. 2, pp. 151-170, 1992.

10. 원성현, 김진일, 엄정국, "확률이 고려된 퍼지 함축," *정보과학회 논문지*, 제20권, 제4호, pp. 505-514, 1993.

11. B. V. Walle, D. Ruan, and E. E. Kerre, "Implementing the generalized modus-ponens in a fuzzy rule-base for an atmospheric stability monitoring study," In *Proc. of Third IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, pp. 1081-1086, 1994.

12. S. H. Park, H. T. Jean, H. G. Lee, and H. C. Cho, "Application of genetic algorithm to hybrid fuzzy inference engine," In *Proc. of Korea-Japan Conf. on Fuzzy Systems and Engineering*, pp. 296-301, 1992.

13. M. Sugeno, *Industrial Application of Fuzzy Control*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

14. Z. Cao, A. Kandel, and L. Li, "A new model of fuzzy reasoning," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 36, pp. 311-325, 1990.

15. D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*, Addison-Wesley, 1989.

16. V. Del Toro, *Electric Machine and Power Systems*, Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1985.

부 록

다음의 표 7~표 13은 Cao와 Kandel의 7개 모델[8]에 대하여 본 논문에서 제안된 방법(GA+FRM)과 기존의 방법(FRM)을 36개의 퍼지 함축에 대해 실험한 결과이다. 이때 GA+FRM은 100번 학습한 후의 결과이고, Δe^2 는 평균 제곱 오차, 그리고 $\max e_i$ 는 최대 오차이다.

표 7. EX 1에 대한 36개의 퍼지 함축의 비교

퍼지 함축	GA + FRM		FRM		퍼지 함축	GA + FRM		FRM	
	Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$		Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$
⊗ ₁	3.330×10^{-2}	440	1.013×10^{-1}	800	⊗ ₁₉	9.836×10^{-2}	705	1.023×10^{-1}	705
⊗ ₂	1.526×10^{-4}	40	2.504×10^{-2}	300	⊗ ₂₀	1.025×10^{-1}	705	3.841×10^{-1}	1200
⊗ ₃	1.725×10^{-3}	100	1.023×10^{-1}	705	⊗ ₂₁	2.094×10^{-2}	255	1.719×10^{-1}	800
⊗ ₄	2.760×10^{-4}	45	2.504×10^{-2}	300	⊗ ₂₂	3.993×10^{-4}	45	2.633×10^{-2}	300
⊗ ₅	1.835×10^{-4}	40	2.504×10^{-2}	300	⊗ ₂₃	7.337×10^{-3}	170	1.719×10^{-1}	800
⊗ ₆	8.002×10^{-4}	100	7.715×10^{-2}	800	⊗ ₂₄	1.719×10^{-1}	800	3.186×10^{-1}	1200
⊗ ₇	3.377×10^{-4}	55	1.013×10^{-1}	800	⊗ ₂₅	4.501×10^{-3}	155	2.633×10^{-1}	300
⊗ ₈	1.078×10^{-3}	120	2.627×10^{-2}	300	⊗ ₂₆	7.097×10^{-4}	71.7	1.013×10^{-1}	800
⊗ ₉	5.359×10^{-2}	505	2.790×10^{-1}	1200	⊗ ₂₇	1.835×10^{-4}	45	2.504×10^{-2}	300
⊗ ₁₀	6.166×10^{-3}	240	2.633×10^{-2}	300	⊗ ₂₈	2.760×10^{-4}	60	2.504×10^{-2}	300
⊗ ₁₁	6.906×10^{-3}	240	2.423×10^{-1}	980	⊗ ₂₉	4.302×10^{-4}	45	2.633×10^{-2}	300
⊗ ₁₂	1.719×10^{-1}	800	2.676×10^{-1}	1200	⊗ ₃₀	3.020×10^{-3}	155	1.268×10^{-1}	705
⊗ ₁₃	1.001×10^{-1}	705	1.946×10^{-1}	837.5	⊗ ₃₁	3.637×10^{-3}	155	2.633×10^{-2}	300
⊗ ₁₄	7.222×10^{-4}	50	1.609×10^{-1}	705	⊗ ₃₂	1.415×10^{-1}	705	1.719×10^{-1}	800
⊗ ₁₅	4.302×10^{-4}	45	1.005×10^{-1}	705	⊗ ₃₃	1.294×10^{-3}	95	1.254×10^{-1}	705
⊗ ₁₆	4.918×10^{-4}	55	6.938×10^{-2}	705	⊗ ₃₄	1.361×10^{-1}	800	2.915×10^{-1}	980
⊗ ₁₇	8.002×10^{-4}	80	2.128×10^{-2}	300	⊗ ₃₅	1.226×10^{-1}	705	2.580×10^{-1}	980
⊗ ₁₈	3.514×10^{-3}	105	1.023×10^{-1}	705	⊗ ₃₆	1.719×10^{-1}	800	3.186×10^{-1}	1200

표 8. EX 2에 대한 36개의 퍼지 함축의 비교

퍼지 함축	GA + FRM		FRM		퍼지 함축	GA + FRM		FRM	
	Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$		Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$
⊗ ₁	0	0	0	0	⊗ ₁₉	1.051×10^{-1}	800	2.041×10^{-1}	800
⊗ ₂	0	0	0	0	⊗ ₂₀	9.120×10^{-2}	700	3.189×10^{-1}	1000
⊗ ₃	0	0	2.041×10^{-1}	800	⊗ ₂₁	1.378×10^{-1}	793.8	2.041×10^{-1}	800
⊗ ₄	0	0	0	0	⊗ ₂₂	0	0	0	0
⊗ ₅	0	0	0	0	⊗ ₂₃	7.972×10^{-4}	50	2.041×10^{-1}	800
⊗ ₆	0	0	0	0	⊗ ₂₄	2.002×10^{-1}	680	2.750×10^{-1}	928.6
⊗ ₇	0	0	0	0	⊗ ₂₅	0	0	0	0
⊗ ₈	0	0	0	0	⊗ ₂₆	0	0	0	0
⊗ ₉	9.072×10^{-2}	600	2.041×10^{-1}	800	⊗ ₂₇	0	0	0	0
⊗ ₁₀	0	0	0	0	⊗ ₂₈	0	0	0	0
⊗ ₁₁	4.177×10^{-2}	800	2.750×10^{-1}	928.6	⊗ ₂₉	0	0	0	0
⊗ ₁₂	2.010×10^{-1}	680	2.041×10^{-1}	800	⊗ ₃₀	2.485×10^{-2}	440	2.041×10^{-1}	800
⊗ ₁₃	7.557×10^{-2}	800	2.041×10^{-1}	800	⊗ ₃₁	0	0	0	0
⊗ ₁₄	1.904×10^{-1}	900	2.041×10^{-1}	800	⊗ ₃₂	1.714×10^{-1}	800	2.041×10^{-1}	800
⊗ ₁₅	1.148×10^{-2}	300	2.041×10^{-1}	800	⊗ ₃₃	7.972×10^{-4}	50	2.041×10^{-1}	800
⊗ ₁₆	4.082×10^{-2}	800	2.041×10^{-1}	800	⊗ ₃₄	1.551×10^{-1}	950	3.189×10^{-1}	1000
⊗ ₁₇	0	0	1.128×10^{-2}	200	⊗ ₃₅	1.054×10^{-1}	450	3.189×10^{-1}	1000
⊗ ₁₈	9.885×10^{-2}	800	2.041×10^{-1}	800	⊗ ₃₆	2.002×10^{-1}	680	2.750×10^{-1}	928.6

표 9. EX 3에 대한 36개의 퍼지 함축의 비교

퍼지 함축	GA + FRM		FRM		퍼지 함축	GA + FRM		FRM	
	Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$		Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$
⊗ ₁	4.243×10^{-2}	400	4.587×10^{-2}	400	⊗ ₁₉	4.128×10^{-2}	400	8.257×10^{-2}	800
⊗ ₂	1.720×10^{-3}	100	4.587×10^{-2}	400	⊗ ₂₀	7.110×10^{-2}	800	3.138×10^{-1}	1000
⊗ ₃	6.307×10^{-3}	300	8.257×10^{-2}	800	⊗ ₂₁	7.153×10^{-2}	800	1.193×10^{-1}	800
⊗ ₄	3.440×10^{-3}	200	4.587×10^{-2}	400	⊗ ₂₂	1.577×10^{-3}	100	4.588×10^{-2}	400
⊗ ₅	8.028×10^{-3}	250	4.587×10^{-2}	400	⊗ ₂₃	2.982×10^{-2}	400	1.193×10^{-1}	800
⊗ ₆	8.458×10^{-3}	250	4.587×10^{-2}	400	⊗ ₂₄	9.187×10^{-2}	1000	2.077×10^{-1}	1000
⊗ ₇	6.164×10^{-3}	150	4.587×10^{-2}	400	⊗ ₂₅	0	0	0	0
⊗ ₈	1.792×10^{-4}	25	5.420×10^{-3}	137.5	⊗ ₂₆	3.013×10^{-3}	100	4.587×10^{-2}	400
⊗ ₉	1.184×10^{-1}	838.5	2.008×10^{-1}	800	⊗ ₂₇	2.867×10^{-3}	200	4.587×10^{-2}	400
⊗ ₁₀	0	0	0	0	⊗ ₂₈	7.168×10^{-4}	100	4.587×10^{-2}	400
⊗ ₁₁	9.748×10^{-3}	300	1.445×10^{-1}	1000	⊗ ₂₉	8.028×10^{-3}	250	4.587×10^{-2}	400
⊗ ₁₂	1.193×10^{-1}	800	2.202×10^{-1}	1200	⊗ ₃₀	1.434×10^{-3}	100	9.212×10^{-2}	800
⊗ ₁₃	7.346×10^{-2}	400	1.240×10^{-1}	850	⊗ ₃₁	0	0	0	0
⊗ ₁₄	2.624×10^{-2}	400	8.994×10^{-2}	800	⊗ ₃₂	8.486×10^{-2}	800	1.193×10^{-1}	800
⊗ ₁₅	1.720×10^{-3}	100	8.486×10^{-2}	800	⊗ ₃₃	5.971×10^{-3}	250	9.131×10^{-2}	800
⊗ ₁₆	7.454×10^{-3}	200	8.257×10^{-2}	800	⊗ ₃₄	7.371×10^{-2}	800	1.606×10^{-1}	1000
⊗ ₁₇	1.147×10^{-2}	300	4.817×10^{-2}	400	⊗ ₃₅	8.165×10^{-2}	800	1.606×10^{-1}	1000
⊗ ₁₈	6.422×10^{-2}	800	8.257×10^{-2}	800	⊗ ₃₆	9.187×10^{-2}	1000	2.077×10^{-1}	1000

표 10. EX 4에 대한 36개의 퍼지 함축의 비교

퍼지 함축	GA + FRM		FRM		퍼지 함축	GA + FRM		FRM	
	Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$		Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$
⊗ ₁	1.044×10^{-1}	600	1.753×10^{-1}	800	⊗ ₁₉	1.031×10^{-1}	600	3.814×10^{-1}	800
⊗ ₂	3.222×10^{-4}	50	2.191×10^{-2}	400	⊗ ₂₀	3.602×10^{-1}	800	8.251×10^{-1}	1000
⊗ ₃	3.866×10^{-3}	150	3.814×10^{-1}	800	⊗ ₂₁	1.789×10^{-1}	663.6	3.703×10^{-1}	800
⊗ ₄	0	0	2.191×10^{-2}	400	⊗ ₂₂	0	0	2.062×10^{-2}	400
⊗ ₅	2.577×10^{-3}	100	2.191×10^{-2}	400	⊗ ₂₃	9.021×10^{-3}	100	3.467×10^{-1}	800
⊗ ₆	0	0	7.217×10^{-1}	600	⊗ ₂₄	1.063×10^{-2}	150	6.153×10^{-1}	1000
⊗ ₇	1.933×10^{-3}	100	1.753×10^{-1}	800	⊗ ₂₅	0	0	0	0
⊗ ₈	4.027×10^{-4}	50	5.014×10^{-3}	137.5	⊗ ₂₆	3.222×10^{-3}	100	1.753×10^{-1}	800
⊗ ₉	1.753×10^{-1}	800	5.677×10^{-1}	1000	⊗ ₂₇	0	0	2.191×10^{-2}	400
⊗ ₁₀	0	0	0	0	⊗ ₂₈	3.222×10^{-4}	50	2.191×10^{-2}	400
⊗ ₁₁	1.160×10^{-2}	200	4.562×10^{-1}	928.6	⊗ ₂₉	1.289×10^{-3}	100	2.062×10^{-2}	400
⊗ ₁₂	1.753×10^{-1}	800	4.463×10^{-1}	1000	⊗ ₃₀	1.432×10^{-4}	33.3	2.676×10^{-1}	800
⊗ ₁₃	1.161×10^{-1}	600	4.427×10^{-1}	950	⊗ ₃₁	0	0	0	0
⊗ ₁₄	2.175×10^{-3}	87.5	3.723×10^{-1}	800	⊗ ₃₂	5.670×10^{-2}	400	3.814×10^{-1}	800
⊗ ₁₅	1.289×10^{-3}	100	2.217×10^{-1}	800	⊗ ₃₃	1.369×10^{-3}	100	2.628×10^{-1}	800
⊗ ₁₆	1.289×10^{-3}	100	2.320×10^{-1}	800	⊗ ₃₄	3.184×10^{-1}	800	6.620×10^{-1}	1000
⊗ ₁₇	5.155×10^{-3}	100	3.608×10^{-2}	400	⊗ ₃₅	3.528×10^{-1}	800	5.839×10^{-1}	1000
⊗ ₁₈	2.988×10^{-2}	400	3.814×10^{-1}	800	⊗ ₃₆	7.231×10^{-2}	500	6.153×10^{-1}	1000

표 11. EX 5에 대한 36개의 퍼지 함축의 비교

퍼지 함축	GA + FRM		FRM		퍼지 함축	GA + FRM		FRM	
	Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$		Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$
⊗ ₁	2.855×10^{-2}	600	5.882×10^{-2}	800	⊗ ₁₉	6.920×10^{-2}	800	1.004×10^{-1}	800
⊗ ₂	8.651×10^{-4}	100	7.353×10^{-3}	400	⊗ ₂₀	1.067×10^{-1}	800	2.769×10^{-1}	1000
⊗ ₃	0	0	1.004×10^{-1}	800	⊗ ₂₁	4.696×10^{-2}	718.2	1.243×10^{-1}	800
⊗ ₄	0	0	7.735×10^{-3}	400	⊗ ₂₂	0	0	6.920×10^{-3}	400
⊗ ₅	0	0	7.735×10^{-3}	400	⊗ ₂₃	6.920×10^{-3}	200	1.164×10^{-1}	800
⊗ ₆	2.163×10^{-4}	50	2.422×10^{-2}	600	⊗ ₂₄	4.801×10^{-2}	800	2.125×10^{-1}	1000
⊗ ₇	1.946×10^{-3}	150	5.882×10^{-2}	800	⊗ ₂₅	0	0	0	0
⊗ ₈	1.081×10^{-4}	50	1.683×10^{-3}	137.5	⊗ ₂₆	2.163×10^{-4}	50	5.882×10^{-2}	800
⊗ ₉	1.031×10^{-1}	1042.9	1.906×10^{-1}	1000	⊗ ₂₇	1.081×10^{-4}	50	7.353×10^{-3}	400
⊗ ₁₀	0	0	0	0	⊗ ₂₈	1.081×10^{-4}	50	7.353×10^{-3}	400
⊗ ₁₁	6.281×10^{-3}	353.9	1.591×10^{-1}	1000	⊗ ₂₉	2.163×10^{-4}	50	6.920×10^{-3}	400
⊗ ₁₂	9.040×10^{-2}	1100	1.909×10^{-1}	1200	⊗ ₃₀	2.433×10^{-4}	50	8.983×10^{-2}	800
⊗ ₁₃	6.055×10^{-2}	800	1.522×10^{-1}	950	⊗ ₃₁	0	0	0	0
⊗ ₁₄	2.163×10^{-3}	200	1.116×10^{-1}	800	⊗ ₃₂	4.498×10^{-2}	800	1.280×10^{-1}	800
⊗ ₁₅	4.325×10^{-4}	100	7.440×10^{-2}	800	⊗ ₃₃	9.126×10^{-4}	100	8.820×10^{-2}	800
⊗ ₁₆	4.325×10^{-4}	100	5.017×10^{-2}	800	⊗ ₃₄	1.116×10^{-1}	800	2.222×10^{-1}	1000
⊗ ₁₇	0	0	1.038×10^{-2}	400	⊗ ₃₅	1.022×10^{-1}	800	1.960×10^{-1}	1000
⊗ ₁₈	1.838×10^{-3}	200	1.004×10^{-1}	800	⊗ ₃₆	4.801×10^{-2}	800	2.125×10^{-1}	1000

표 12. EX 6에 대한 36개의 퍼지 함축의 비교

퍼지 함축	GA + FRM		FRM		퍼지 함축	GA + FRM		FRM	
	Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$		Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$
⊗ ₁	3.975×10^{-2}	600	8.858×10^{-2}	760	⊗ ₁₉	6.042×10^{-2}	720	9.319×10^{-2}	760
⊗ ₂	2.240×10^{-4}	50	6.400×10^{-4}	80	⊗ ₂₀	1.647×10^{-1}	800	4.055×10^{-1}	1000
⊗ ₃	5.120×10^{-4}	80	9.319×10^{-2}	760	⊗ ₂₁	2.698×10^{-2}	350	1.828×10^{-1}	800
⊗ ₄	3.200×10^{-5}	20	6.400×10^{-4}	80	⊗ ₂₂	3.200×10^{-5}	20	5.120×10^{-4}	80
⊗ ₅	3.200×10^{-5}	20	6.400×10^{-4}	80	⊗ ₂₃	6.912×10^{-3}	200	1.828×10^{-1}	800
⊗ ₆	1.696×10^{-3}	100	5.172×10^{-2}	600	⊗ ₂₄	8.011×10^{-2}	800	3.379×10^{-1}	1000
⊗ ₇	3.520×10^{-4}	50	8.858×10^{-2}	760	⊗ ₂₅	1.351×10^{-4}	33.3	5.120×10^{-4}	80
⊗ ₈	1.152×10^{-4}	30	1.920×10^{-3}	100	⊗ ₂₆	6.865×10^{-4}	75	8.858×10^{-2}	760
⊗ ₉	7.604×10^{-2}	500	2.958×10^{-1}	1000	⊗ ₂₇	3.200×10^{-5}	20	6.400×10^{-4}	80
⊗ ₁₀	1.351×10^{-4}	33.3	5.120×10^{-4}	80	⊗ ₂₈	3.200×10^{-5}	20	6.400×10^{-4}	80
⊗ ₁₁	6.199×10^{-2}	400	2.616×10^{-1}	1000	⊗ ₂₉	2.560×10^{-4}	60	5.120×10^{-4}	80
⊗ ₁₂	1.162×10^{-1}	860	2.978×10^{-1}	1000	⊗ ₃₀	2.373×10^{-4}	50	1.342×10^{-1}	800
⊗ ₁₃	1.000×10^{-1}	800	2.134×10^{-1}	910	⊗ ₃₁	1.351×10^{-4}	33.3	5.120×10^{-4}	80
⊗ ₁₄	1.313×10^{-3}	100	1.742×10^{-1}	800	⊗ ₃₂	1.486×10^{-1}	800	1.828×10^{-1}	800
⊗ ₁₅	8.961×10^{-4}	100	1.014×10^{-1}	800	⊗ ₃₃	2.176×10^{-3}	100	1.323×10^{-1}	800
⊗ ₁₆	1.536×10^{-3}	100	3.482×10^{-2}	720	⊗ ₃₄	1.782×10^{-1}	800	3.119×10^{-1}	1000
⊗ ₁₇	2.560×10^{-4}	60	2.560×10^{-3}	160	⊗ ₃₅	1.675×10^{-1}	800	2.759×10^{-1}	1000
⊗ ₁₈	7.681×10^{-4}	100	9.319×10^{-2}	760	⊗ ₃₆	9.672×10^{-2}	800	3.379×10^{-1}	1000

표 13. EX 7에 대한 36개의 퍼지 함축의 비교

퍼지 함축	GA + FRM		FRM		퍼지 함축	GA + FRM		FRM	
	Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$		Δe^2	$\max e_i$	Δe^2	$\max e_i$
⊗ ₁	2.580×10^{-2}	600	5.595×10^{-2}	760	⊗ ₁₉	2.679×10^{-2}	600	1.071×10^{-1}	800
⊗ ₂	9.673×10^{-4}	50	1.406×10^{-2}	400	⊗ ₂₀	1.083×10^{-1}	800	2.147×10^{-1}	1000
⊗ ₃	2.511×10^{-3}	200	1.071×10^{-1}	800	⊗ ₂₁	6.584×10^{-2}	63.6	1.039×10^{-1}	800
⊗ ₄	5.580×10^{-4}	100	1.406×10^{-2}	400	⊗ ₂₂	9.859×10^{-4}	150	1.399×10^{-2}	400
⊗ ₅	7.999×10^{-4}	100	1.406×10^{-2}	400	⊗ ₂₃	8.185×10^{-3}	300	9.458×10^{-2}	800
⊗ ₆	1.153×10^{-3}	100	2.738×10^{-2}	600	⊗ ₂₄	1.654×10^{-2}	400	1.762×10^{-1}	1000
⊗ ₇	2.214×10^{-3}	150	5.595×10^{-2}	760	⊗ ₂₅	2.702×10^{-3}	200	9.524×10^{-3}	400
⊗ ₈	6.322×10^{-4}	63.6	1.407×10^{-2}	400	⊗ ₂₆	5.436×10^{-4}	70	5.595×10^{-2}	760
⊗ ₉	4.762×10^{-2}	800	1.585×10^{-1}	960	⊗ ₂₇	1.191×10^{-3}	150	1.406×10^{-2}	400
⊗ ₁₀	5.306×10^{-3}	300	9.524×10^{-3}	400	⊗ ₂₈	3.720×10^{-4}	50	1.406×10^{-2}	400
⊗ ₁₁	2.827×10^{-3}	220	1.344×10^{-1}	928.6	⊗ ₂₉	1.079×10^{-3}	150	1.399×10^{-2}	400
⊗ ₁₂	4.762×10^{-2}	800	1.204×10^{-1}	1000	⊗ ₃₀	6.975×10^{-4}	100	7.640×10^{-2}	800
⊗ ₁₃	2.159×10^{-2}	600	1.251×10^{-1}	910	⊗ ₃₁	1.981×10^{-3}	200	9.524×10^{-3}	400
⊗ ₁₄	2.928×10^{-3}	185.7	1.296×10^{-1}	875	⊗ ₃₂	1.339×10^{-2}	400	1.071×10^{-1}	800
⊗ ₁₅	1.116×10^{-3}	100	6.791×10^{-2}	800	⊗ ₃₃	1.289×10^{-3}	70	7.625×10^{-2}	800
⊗ ₁₆	1.488×10^{-4}	40	6.607×10^{-2}	800	⊗ ₃₄	1.007×10^{-1}	800	1.981×10^{-1}	1000
⊗ ₁₇	9.673×10^{-4}	100	1.667×10^{-2}	400	⊗ ₃₅	1.012×10^{-1}	800	1.705×10^{-1}	1000
⊗ ₁₈	7.589×10^{-3}	400	1.071×10^{-1}	800	⊗ ₃₆	1.203×10^{-2}	286.7	1.762×10^{-1}	1000