
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 32 卷 第 4 號 1995 年 11 月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 32, No. 4, November 1995

물질경계면을 갖는 판에서의 응력파에 대한 수치해석

김경수*

Numerical Simulation of Stress Waves in Plates with Material Interfaces

by

Kyung-Su Kim*

요 약

본 논문에서는 물질경계면을 갖는 선형탄성체에서의 응력파를 수치적으로 해석하는 기법이 소개되었으며 사각판에 대해 bicharacteristic법을 사용하여 개발된 수치해석법이 곡선경계면을 갖는 판으로 확장되었다. 제안된 개념의 효용성을 검증하기 위하여 수치해석 결과가 이론적으로 잘 알려진 응력파의 물리적 특성을 재현시켜 주는지 검토되었으며 곡선경계면을 갖는 판에 있어서 실험결과와 비교계산이 수행되었다. 또한 곡선 가장자리와 물질경계면에서 반사와 회절에 의한 응력축점현상에 대해서도 조사되었다.

Abstract

In this paper a computational method is presented to solve the plane problem of wave propagation in linear-elastic plate with zones of different materials.

An existing numerical scheme of bicharacteristics for rectangular plate is extended to plates with curvilinear boundaries. In order to show the validity of the employed concept, it is necessary to examine the numerical results whether they reproduce the well-known physical phenomena of stress waves. It seems also desirable to make a comparison between the numerical results and appropriate experimental results for plates with curvilinear boundaries. Also studied are the focusing phenomena induced by reflection and refraction at curved outer boundaries and material interfaces.

발 표 : 1995년도 대한조선학회 춘계연구발표회('95. 4. 20.)

접수일자 : 1995년 5월 25일. 재접수일자: 1995년 8월 2일

* 정회원, 인하대학교 선박해양공학과

1. 서론

구조물에 충격이나 폭발하중이 가해지면 이들은 응력파가 되어 파급되어진다. 이와 같은 응력파는 가장자리나 모서리 혹은 물질경계면에서 반사·굴절및 회절을 일으키면서 시간에 따라 변화되는 복잡한 응력장을 형성하게 되며 때로는 국부적으로 응력집중이나 응력충점현상을 일으켜 예기치 못한 파괴의 원인이 되곤 한다.

본 논문에서는 이와 같은 응력파의 지배방정식인 쌍곡선형의 편미분방정식계의 해석을 위하여 수치해석기법인 bicharacteristic 방법이 소개되었다. 이 수치해법은 Clifton[1]에 의하여 처음으로 고체에 적용되었으며 그후 Raatschen[2], Kim[3]등에 의해 다양한 경계조건에 대하여 개발되어 응력파의 해석에 성공적으로 사용되었다. 특히 이 수치해석법의 취약점인 곡선경계면에 대하여 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 안정성조건[4]을 만족하고 수치해석에 따른 소산(dissipation)을 최소화시킬 수 있는 해석기법이 개발되었다.

이 수치해석 프로그램의 검증을 위하여 응력파의 파급에 대하여 광탄성 실험결과 및 잘 알려진 이론과 비교되어졌다. 또한 물질경계면에서의 응력파의 파급 및 응력충점현상에 대한 수치해석적 실험이 수행되었으며 원형 이물질을 포함한 판에서 이물질내에서와 matrix-inclusion의 경계면에서의 응력집중 및 충점현상이 조사되어 광탄성 실험결과와 비교되어졌다.

2. 기본방정식 및 수치해법

2.1 기본 방정식

동질의 선형 탄성체에서의 elastodynamic 방정식은 시간과 공간에 있어서 1차의 쌍곡선형의 편미분 방정식의 계를 형성한다. 여기에서 미지의 독립변수로서 입자의 속도벡터 v 는 v_1 과 v_2 그리고 응력텐서 σ 는 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ 의 구성성분을 각각 갖는다.

즉 운동 방정식과

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \text{div } \sigma = 0 \tag{1}$$

시간에 의해 미분된 재료의 구성식은

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda^* \text{div } v I + G(\text{grad } v + (\text{grad } v)^T) \tag{2}$$

함께 지배 방정식을 형성한다.

여기에서 λ^* 은 평면응력 상태에서는

$$\lambda^* = \lambda \frac{1-2\nu}{1-\nu}$$

이며, 평면변형을 상태에서는

$$\lambda^* = \lambda$$

가 된다.

또한 심볼 I 는 단위텐서, λ 는 Lamé상수, G 는 전단계수, ρ 는 밀도이며, ν 는 Poisson's ratio를 나타낸다.

식(1)과 식(2)의 해는 경계조건을 만족해야 하는데, 자유경계면에서는 (3)과 (4)의 하중에 대한경계조건, 그리고 물질경계면에서는 (5), (6), (7) 즉 입자의 속도와 응력은 물질경계면에 평행한 단면에서는 연속이어야 하며 물질경계면에 수직인 단면에서의 응력벡터는 불연속일수 있다는 경계조건을 만족하여야 한다.

$$\sigma n_b = P_{\text{exp}} n_b \tag{3}$$

$$\sigma n_b = 0 \tag{4}$$

$$[v] = 0 \tag{5}$$

$$[\sigma] n_{AB} = 0 \tag{6}$$

$$[\sigma] t_{AB} = 0 \tag{7}$$

여기에서 기호 $[]$ 는 불연속 조건(jump condition) $[v] = v^+ - v^-$ 를 의미한다.

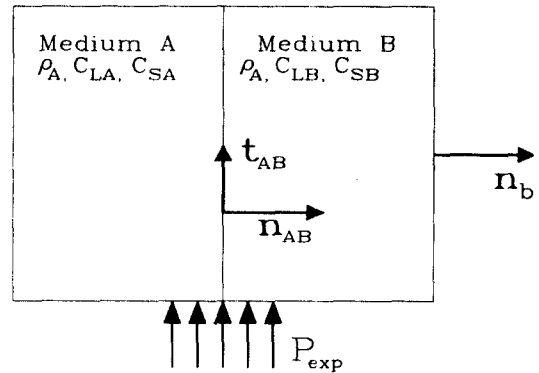


Fig. 1

2.2 수치해법

쌍곡선형 편미분 방정식의 계는 수직도함수가 미정인 시공간의 특이면을 포함하기 때문에 단지 이 면내에 있는 선을 따라서만 수치적으로 적분되어야 하며 그렇지 않는 경우에는 이 방정식의 물리적 특성을 잃어버리게 된다.

시공간의 어떤 해점을 통과하는 모든 특성곡면은 시간과 공간좌표계에서 하나의 원추를 형성하게 되

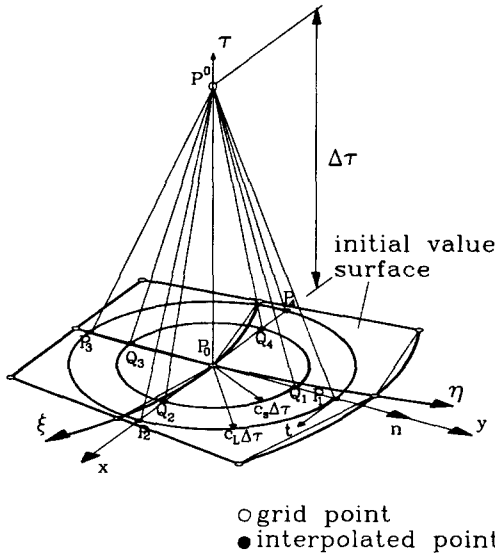


Fig. 2 Monge cone for an inner point P_0 in a curvilinear coordinate system ξ, η

는데 이 원추를 Monge원추라 한다 (Fig.2).

여기에서 내부원추는 속도 C_S 를 갖는 전단파의 파급에 관계되며, 외부원추는 속도 C_L 를 갖는 종파의 파급에 관계한다.

이 미분방정식들의 선형조합에 의해 불연속인 수직도함수를 소거하면 특이곡면내에 연속인 도함수만 남게 되는데 이들을 compatibility방정식이라 한다.

$$[\rho C_L n v + n v n - t \text{grad}(\lambda t v + C_L n \sigma t) \frac{\Delta \tau}{2}] | P^0$$

$$= [\rho C_L n v + n \sigma n + t \text{grad}(\lambda t v + C_L n \sigma t) \frac{\Delta \tau}{2}] | P, \quad (8)$$

$$[\rho C_S t v + n \sigma t - t \text{grad}(G n v + C_S n \sigma t) \frac{\Delta \tau}{2}] | P^0$$

$$= [\rho C_S t v + n \sigma t + t \text{grad}(G n v + C_S n \sigma t) \frac{\Delta \tau}{2}] | Q, \quad (9)$$

내부점 P^0 에서의 해를 얻기 위하여 식(5)와 (6)은 각각 4개의 선 $P_i P^0$ 와 $Q_i P^0$ 에 대한 식들을 형성한다. 여기에서 P_i 와 Q_i 점에서의 입자의 속도와 응력요소들의 값과 도함수값들은 initial value surface의 9개의 격자점으로부터 최소자승법을 통해 얻을 수 있다. 여기에서 미지수로 5개의 독립변수와 8개의 공간도함수가 식에 포함되는데 이들을 소거하기 위하여 식(8)과 식(9)로부터 주어지는 8개의 compatibility방정식 외에 원래의 식(1)과 (2)의 $P_0 P^0$ 를 따라 적분한 식 5개가 더 필요하다.

$$\rho v - \frac{\Delta \tau}{2} \text{div} \sigma | P^0 = \rho v + \frac{\Delta \tau}{2} \text{div} \sigma | P_0, \quad (10)$$

$$\sigma - \frac{\Delta \tau}{2} (\lambda^* \text{div} v I + G(\text{grad} v + (\text{grad} v)^T)) | P^0$$

$$= \sigma + \frac{\Delta \tau}{2} (\lambda^* \text{div} v I + G(\text{grad} v + (\text{grad} v)^T)) | P_0, \quad (11)$$

수치해석적 소산(dissipation)을 낮게 하기 위하여는 안전성 조건인 CFL수가 1에 가까워야 하기 때문에 가능한 한 정사각형 격자를 유지하여야 한다. 그러나 심한 곡률을 갖는 격자선(gridline)에서는 이것이 불가능하기 때문에 곡면에 갖는 판의 경계면에서만 약간의 곡선격자선을, 그리고 내부에서는 정사각형 격자를 형성하는 것이 바람직하며 겹쳐지는 부분의 데이터값들은 최소자승법을 통해 서로 주고받게 된다.

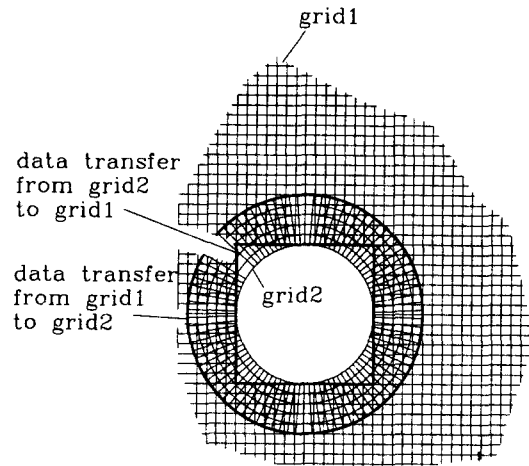


Fig. 3 Two grids discretizing an infinite plate with a hole

Fig.3에서는 이에 대한 예를 보여주고 있으며 이러한 격자분할법에 대해서는 참고문헌[5]에서 검증된 바 있다.

판의 경계면에 있는 P_0 점에서의 해를 구하기 위해서는 단지 반쪽의 Monge원추가 주어지기 때문에 각각 세개의 characteristic선 P_iP^0 와 Q_iP^0 에 대한 Compatibility방정식이 얻어진다. 나머지 부족한 정보는 응력 혹은 입자속도에 대한 경계조건에 의해서 얻게 된다. 속도와 응력요소들의 값과 도함수를 구하는 법은 내부점에서와 마찬가지로이며 이에 대한 자세한 계산과 모서리점에 대한 내용은 문헌[3]에 수록되어 있다.

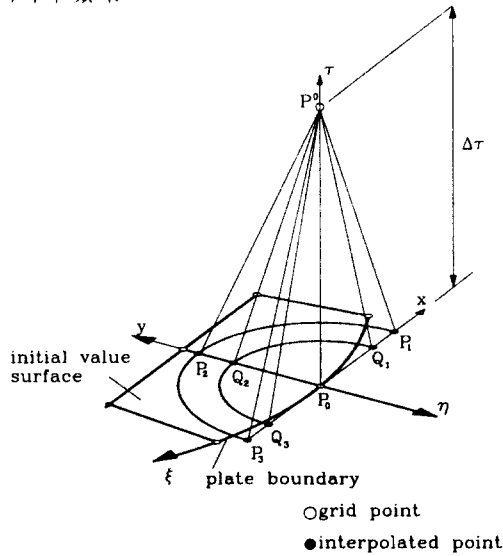


Fig. 4 Monge cones for a point P_0 at a curved plate boundary

물질경계면에 위치한 점에 대한 수치해석적 scheme을 Fig.5에 나타내었다. 물질경계면의 점인 P_0 에 대해서 각각의 물질에서 2개의 반쪽Monge원추가 주어지기 때문에 식(8)과 (9)로부터 P_iP^0 와 Q_iP^0 를 따라 각각 3개씩의 compatibility방정식을 얻을 수 있다. 또한 물질경계면조건인 (5)와 (6)으로부터 부족한 정보가 채워지게 된다.

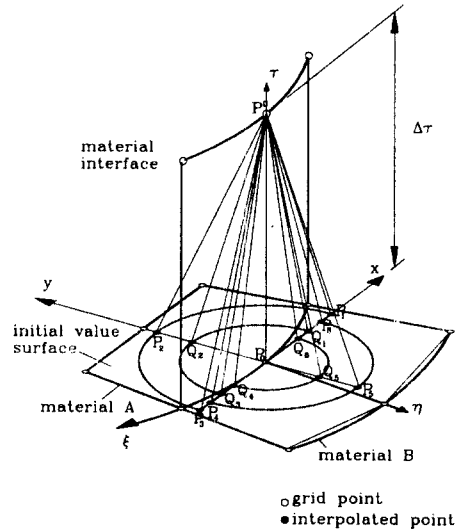


Fig. 5 Monge cones for a point P_0 at a curved material interface

3. 수치해석 결과

3.1 응력파에 대한 광탄성 실험과의 비교계산

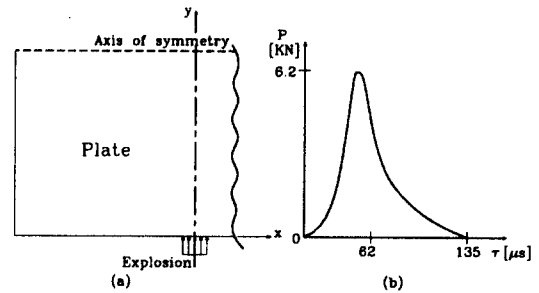


Fig. 6 Section of the loaded plate (a), time history of the explosion force (b)

Fig.6에서는 Rossmanith에 의해서 수행되어진 실험[5]에 사용된 Araldit판과 시간에 따른 폭발하중을 보여준다.

Araldit판의 크기는 $(500 \times 500 \times 10)mm^3$ 이며 Fig.6에서 실선은 실제 경계면이며 점선은 해석결과를 그 선까지 그림으로 나타냄을 의미한다.

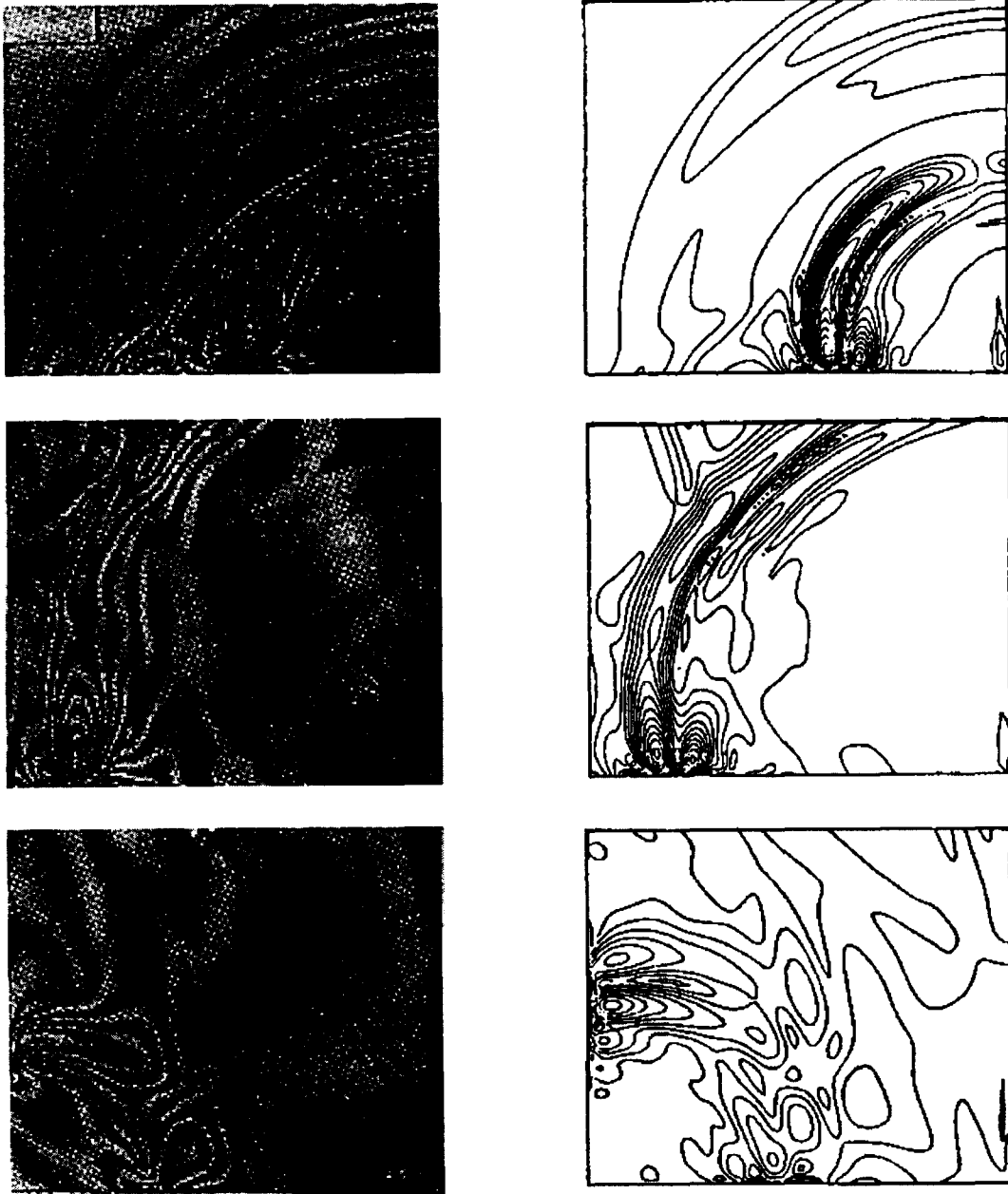


Fig. 7 Comparison of experimental and numerical isolines of the maximum shear stress

폭발하중은 판의 대칭축의 가장자리에 국부적으로 가해졌으며 이 Araldit판의 특성치와 응력파의 속도는 다음과 같다.

탄성계수 : $E = 0.354E10 \text{ N/m}^2$
 전단계수 : $G = 0.133E10 \text{ N/m}^2$
 밀도 : $\rho = 1226 \text{ kg/m}^3$

Poisson's ratio(dynamic) : $\nu=0.37$
 Longitudinal wave speed : $C_L=1857 \text{ m/sec}$
 Shear wave speed : $C_S=1042 \text{ m/sec}$
 Rayleigh wave speed : $C_R=977 \text{ m/sec}$

Fig.7에서는 광탄성 실험결과와 수치해석결과를 폭발하중이 가해진 후 각각 비슷한 시간대에서 비교하였다. 이 그림에서는 Isochromatic fringe pattern 즉 최대전단응력이 같은 점들을 연결한 선을 보여주고 있다. 가장 빠른 속도로 퍼져 나가는 종파와 이 종파의 대략 60%의 속도로 진행되는 전단파, 그리고 이 전단파가 표면에서 경계조건을 만족시키기 위하여 복잡한 형상으로 변화되어져 형성된 Rayleigh파 등이 실험과 수치해석결과에서 서로 잘 일치하고 있다. 나아가서 판의 가장자리와 모서리에서의 반사와 회절현상도 최소한 정성적으로 매우 유사함을 보여주고 있다.

Fig.8에서는 폭발하중이 가해지기 시작한지 $160\mu\text{sec}$ 후 최대전단응력을 나타낸 그림으로 각 응력파의 크기와 특성을 한눈에 알아볼 수 있으며 특히 표면파인 Rayleigh 파는 두개의 peak를 갖는 것을 알 수 있다. 이 표면파는 표면의 얇은 층에 높은 에너지를 보유하고 분산됨이 없이 퍼져 나가며 이 파는 지진파의 주된 에너지 함유파로 알려져 있다. 이 표면파의 영역을 확대하여 주응력의 방향을 나타낸 그림이 Fig.9이다. 이 그림에서 점선은 압축을, 실선은 인장을 나타내며 선의 길이는 주응력의 크기를 나타낸다.

그러므로 Fig.8의 leading peak는 인장파 그리고 rear peak는 압축파임을 알 수 있다.

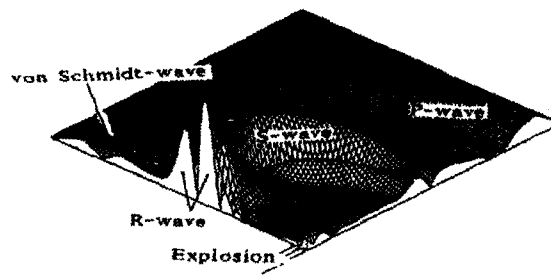


Fig. 8 A typical distribution of τ_{\max} in a plate

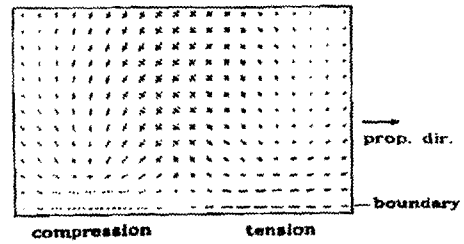


Fig. 9 Principle stress directions in Rayleigh wave domain

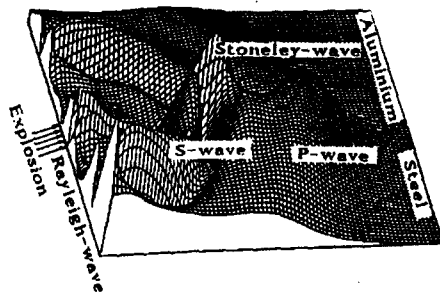
3.2 물질경계면에서의 응력파 - Stoneley wave

1924년 Stoneley는 여러 종류의 물질경계면에 탄성파가 나타날 수 있으며 후에 Stoneley 파라고 명명되어진 이 파는 Rayleigh 파와 매우 유사한 특성을 가지고 있다[7]. 그 후 Cagniard는 이 파의 존재범위를 두 물질의 밀도비와 전단파의 속도비의 제곱에 대하여 제시하였지만[8], 아직까지 이 Stoneley 파에 대하여 실험적으로나 수치해석적으로 보여지지는 않았었다. 저자는 이 Stoneley파를 조사하기 위하여 여러 물질들의 쌍에 대하여 수치해석 프로그램을 통해 시뮬레이션한 결과 Aluminium과 Steel의 경계면에서 이 파를 발견할 수 있었기 때문에[9], 이 예제에서도 Aluminium과 Steel의 경계면에 3.1에서와 같은 Fig.6(b)의 하중을 가하였다.

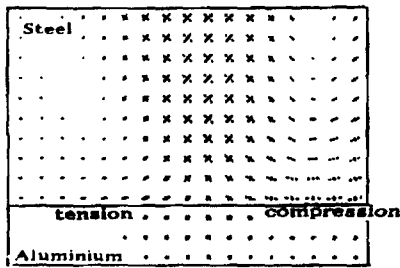
Fig.10의 (a)와 (b)에서 물질경계면에 수직방향으로 그 크기가 급격히 감소되는 물질경계파인 Stoneley파가 형성되었으며 이 파가 Rayleigh파와 매우 유사함을 볼 수 있다.

3.3 응력파의 쫓점현상

응력파의 쫓점현상을 조사하기 위하여 Fig.11의 Aradit판과 하중을 수치해석적인 실험에 사용하였다. 여기에서 단지 쫓점현상에 관심이 있기 때문에 대칭축을 따라서 σ_{11} 과 σ_{22} 를 매 시간별로 그렸다 (Fig.12).



(a) Distribution of τ_{max}



(b) Principle stress direction in Stoneley wave domain

Fig. 10 Stoneley wave at a material interface

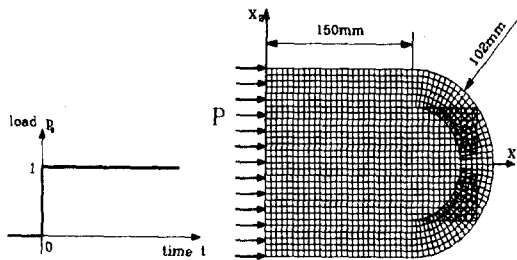


Fig. 11 Time history and location of loading and geometry of the plate

Raatschen[2]에 의하면 큰 값의 ν 에 대하여 σ_{22}/σ_{11} 대의 최대값은 1.3에 달하였다. 우리의 계산 결과에 의하면 대칭축선상의 두점에서 응력의 쏠집 현상이 일어나며 그중 하나는 σ_{11} 에 의한 것으로 대략 반지름 즉 $x_1 \approx 0.20$, $\tau \approx 170\mu s$ 에서 형성되며 다른 하나는 σ_{22} 에 의해 $x_1 \approx 0.170$, $\tau \approx 180\mu s$ 에서 형성된다.

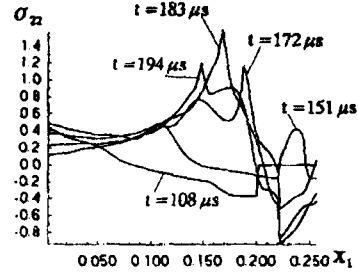
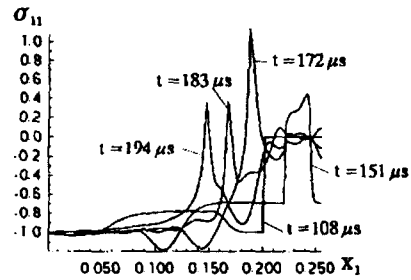


Fig. 12 Stresses σ_{11} and σ_{22} along of symmetry

쏠집영역에서의 σ_{22}/σ_{11} 의 값은 $\tau = 172\mu s$ 와 $\tau = 183\mu s$ 사이에서 1부터 4의 값을 갖는다. 이 2개의 쏠집점은 광선이론(ray theory)과도 일치되며 이중 하나는 종파의 반사에 의해서 다른 하나는 전단파의 반사에 기인한 것으로 예측된다.

3.4 원형 이물질을 갖는 판에서의 응력파

여기에서는 개발되어진 수치해석기법을 곡선물질 경계면에 대해서 검증하고자 Hemann등에 의해 수행되어진 실험[10]과 비교계산을 수행하였다. Fig.13은 실험에서와 같이 원형 이물질 Solithane113을 포함한 광탄성 물질인 Hysol4485판에 평면압력파(plane pressure wave)가 작용하는 것을 보여준다.

Fig.14에서는 물질경계면주위의 계산격자(computational grid)를 나타내었다.

계산결과로서 최대전단응력의 수치해석적, fringe pattern을 Fig.15에 나타내었다.

경계면에서의 초기 파동전면(wave front)의 반사 후 inclusion의 외부에 peak가 형성되어 좌우면에서 경계면을 따라 움직인다.

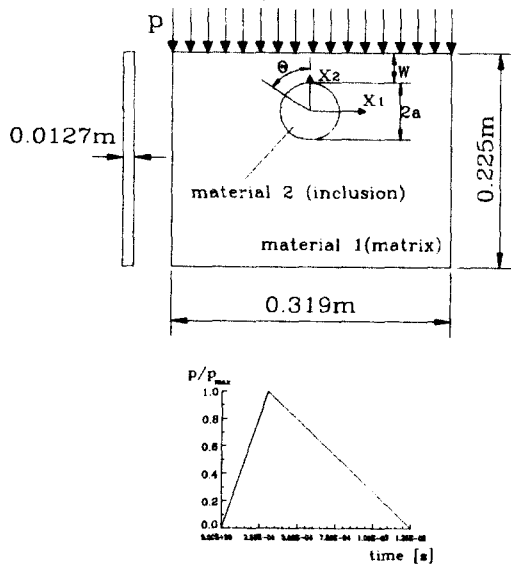


Fig. 13 Experimental setup of plate with inclusion

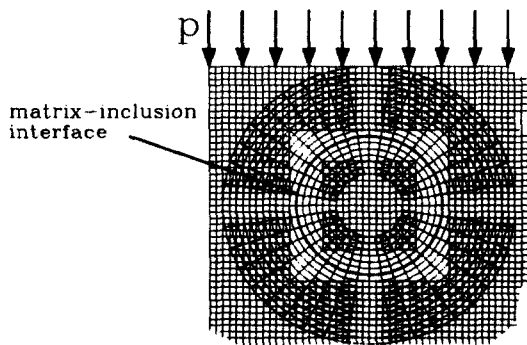


Fig. 14 Computational grid for a plate with inclusion

inclusion-matrix의 경계면에서의 반사는 inclusion내부에서 촛점현상을 일으킴을 알 수 있으나 이것은 Solithane의 광탄성특성때문에 실험에서는 명확히 보이지 않는다. Fig.16에서는 peak 값에 의해 표준화된 최대전단응력을 물질경계면의 양쪽편을 따라서 나타내었다. 응력의 가장 큰 도약은 matrix편의 최대전단응력이 사라지는 대략 $\theta = 90^\circ$ 에서 일어났다.

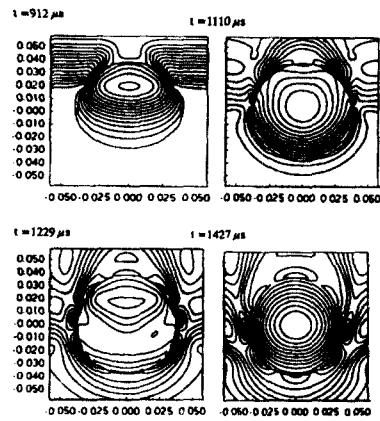


Fig. 15 Numerical fringe patterns maximum shear stress

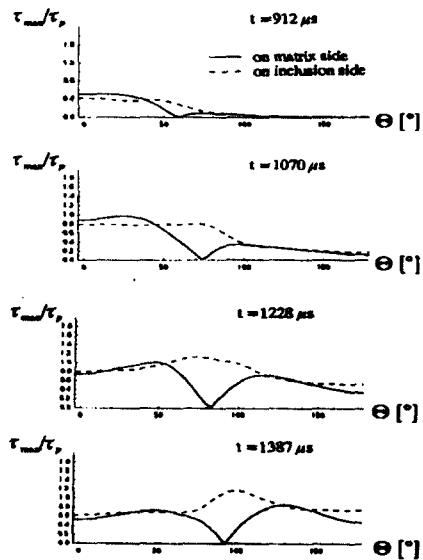


Fig. 16. Maximum shear stress along the interface

이것은 Hemann등의 실험에 의해서 관찰된 것과 동일함을 알 수 있다. 이 계산결과는 대체적으로 Hemann등의 실험과 매우 잘 일치하지만 실험과 수치해석 사이에 약간의 시간차가 있음이 나타났다. 이것은 아마도 실험에 사용된 물질들의 약간의 비선형 거동과 실험상의 불완전함에 기인한 것이 아닌가 한다.

4. 결 론

본 연구에서는 충격이나 폭발하중이 가해지는 판에서의 응력파의 반사, 굴절, 회절현상을 수치해석프로그램을 통해 조사하였으며 물질경계면에서의 응력파, 그리고 응력파의 축점현상 및 원형 이물질을 포함하는 판에서의 응력파의 파급에 대해 이론 및 실험과의 비교계산을 수행하였다.

여기에서 수치해석기법으로 사용되어진 bicharacteristic method는 응력파의 물리학적 특성을 잘 재현시켜 주었으며 광탄성 실험과의 비교계산에서도 매우 잘 일치함을 보여주었다.

곡선경계면에 대한 계산을 수행하기 위하여 곡선격자를 도입하면서 CFL-안정성조건을 만족시키고 수치해석적 소산을 줄이기 위해 정사각형 격자와 중첩을 시켜 사용하였다. 이에 대한 검증계산결과가 실험의 결과와 잘 일치함을 보임으로써 여기에서 계산된 원형이외의 임의의 형상에 대한 계산 가능성을 보여주었다.

본 논문에서는 탄성파의 파급에 대해서 수치해석적으로 다양하게 조사, 연구되었으며 추후 탄성 및 소성파에 대한 수치해석기법의 개발 및 탄소성 응력파와 균열과의 상호작용, 균열의 전진 및 정지에 대한 연구가 계속되어야 할 것으로 사료되어진다.

참 고 문 헌

- [1] R.J. Clifton, "A Difference Method for Plane Problems in Dynamic Elasticity," *Quart. Appl. Math.*, Vol. 25, 1967.
- [2] H.-J. Raatschen, "Ein Bicharakteristiken Verfahren zur Berechnung von Spannungswellen in Krummlinig-berandeten Scheiben", Ph. D. thesis, RWTH Aachen, 1986.
- [3] K.S. Kim, "Spannungswellen an Grenzflächen in Linearelastischen Scheiben", VDI Verlag, Reihe 18, Nr. 91, 1991.
- [4] Th. Meis, U. Marcowitz, "Numerische Behandlung Partieller Differentialgleichungen", Springer-Verlag, 1978.
- [5] R.J. Niethammer, K.S. Kim, J. Ballmann, "Numerical Simulation of Shock Waves in Linear-Elastic Plates with Curvilinear Boundaries and Material Interfaces", *Journal of Impact Engng*, 1995 appear.
- [6] H.P. Rossmannith, "Ausbreitung Elastischer Wellen in Festkörpern", *Film C 1893 des ÖWF Wien : Österreichisches Bundesinstitut f. d. Wiss. Film 1985. Begleitveröffentlichung von H.-P. Rossmannith, iu : Wiss. Film(Wien) 33*, 1985
- [7] R. Stoneley, "Elastic Waves at the Surface of Separation of two Solids." *Proc. Roy. Soc. London*, A106, 416, 1924.
- [8] L. Cagniard, "Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves", (translated and revised by E.A. Flinn and C.H. Dix). McGraw-Hill Book Co., Inc., 1962.
- [9] K.S. Kim, J. Ballmann, "Numerische Simulation mechanischer Wellen in geschichteten elastischen Körpern." *ZAMM70*, Vol. 4, 1990.
- [10] J.H. Hemann, J.D. Achenbach, S.J. Fang, "A dynamic photoelastic study of stress-wave propagation through an inclusion.", *Experimental Mechanics* 16, 1976.