상태공간 모형을 이용한 동적 예측 모형 설계
A Design of One-Stage Dynamic Prediction Model with State Space Model

고 명 훈*
Ko Myung-Hun
윤 상 원**
Yoon Sang-Won
신 용 백**
Shin Yong-Back

ABSTRACT

The objective of this study is to design a one-stage dynamic prediction model with Kalman state space model. For a model verification, it is compared with EWMA(Exponentially Weighed Moving Average) model.

The model designed in this research can be extended to process prevention control and quality monitoring.

1.서 론

보통 제품을 생산하는 생산공정에서 여러 종류의 데이터를 취해 공정분석 및 관리를 하게 되는데, 이러한 데이터가 그 공정을 잘 표현해 줄때, 여러 가지의 수학적모형을 통한 생산공정의 모형화 및 공정예측이 이루어질 수 있다. 또한 모형화 및 공정예측이 큰 에러없이 이루어 질 때, 그 모형에 따른 여러 가지 의사결정을 할 수 있으므로 공정예측의 정확성을 위한 모형구축은 중요한 문제가 된다. 이런 관점에서, 기존의 연구들이 생산공정을 표현해 줄때 Time Series(AR, MA, ARMA, ARIMA)등의 여러 모형을 가정하여 공정예측이 이루어져왔다[7][8][9]. 실제 생산공정 적용에 있어서 정적모형이 갖는 여러 가지 모순이 나타나게 된다[7].

따라서 본 연구에서는 공정예측을 위한 모형으로 실측 데이터를 상태공간 모형화시켜 그에 따른 시간 Update 개념이 적용된다. 시간 Update을 위한 방정식은 칼만 필터링의 2개 방정식(시간 Update, 측정Update)의 구축을 통해 이루어 진다[1][2]. 예측모형은 1단계예측으로 연구되었으며 모형의 효율성을 검증하기 위해 EWMA 모형과 비교평가 한다. 한편 본 모형은 현 시점에서 다음시점의 정확한 공정변화및 미래 공정패턴의 파악은 물론 적극적인 공정 예방관리를 위한 동적 공정 예측모형을 설계하고자 한다.

2. 1단계 동적예측 모형

2.1 1단계 예측을위한 칼만 상태공간모형

* 대림전문대학 공업경영학과
**아주대학교 대학원 산업공학과

신호(Signal)모형과 측정모형의 전형적인 형태로서

$X(k+1)=A(k+1, k)X(k)+W(k-1)$

$Y(k)=C(k)X(k)+V(k)$

로서 표시될때 시간 Update추정식은

$\hat{X}(k+1|k)=A(k+1, k)\hat{X}(k+1|k)$

로 나타낼 수 있다[1][2]. A(k+1. k)는 시간전이 행렬(Time Transition Matrix)로서 측정치 고려 없이 계속적으로 그 상태만 시간을 기준으로 Update시킬 수 있는 모형이 된다. 또한 A(k+1, k)는 실측치 고려 없이 1단계 예측모형의 기초를 제공해 주게 된다.

위의 개념이 적용된 과거에 상태공간 예측모형이 <표 1>에 제시 되었다[8][9].

제시된 상태공간 모형식들은 시간 k에서 시스템의 상태를 추정하는 방정식이 된다. 내부 상태방정식들은 어떻게 설정하느냐에 따라 다를뿐이지 칼만 필터링의 상태 및 측정방정식의 범주에 포함시킬 수 있는 일반적인 모형이 된다.

<표1> 상태공간모형

Model	Time series	State Equation:X(k)	Time Transition Matrix A(k+1, k)
Constant Model	$\mu(k)=a_0$ $y(k)=\mu(k)+v(k)$	$(X(k))$	(1)
Liner Model	$\mu(k)=\mu(k-1)+a_1$ $y(k)=\mu(k)+v(k)$	$\begin{bmatrix}\mu(k)\\ a_1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
Quardatic Model	$\mu(k)=\mu(k-1)+a_1+1/2a_1(k-1)$ $y(k)=\mu(k)+v(k)$	$\begin{bmatrix}\mu(k)\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & k+\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Exponential growth rate Model	$\mu(k)=\mu(k-1)+a_1(k)$ $a_1(k)=\alpha\ \mu(k-1)$ (단, α :a known parameter) $y(k)=X(k)+v(k)$	$\begin{bmatrix}\mu(k)\\ a_1(k)\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\ \alpha & 0\end{bmatrix}$
AR(p)	$X(k)=X(k-1)$ $y(k)=H(k)X(k)+v(k)$ 단, $H(k)=[y(k-1), y(k-2),\cdots y(k-p)]$	$\begin{bmatrix}\phi_1(k)\\ \phi_2(k)\\ \vdots\\ \phi_p(k)\end{bmatrix}$	I
MA(q)	$X(k)=X(k-1)$ $y(k)=H(k)X(k)+v(k)$ 단, $H(k)=[e(k-1), e(k-2)\cdots e(k-q)]$	$\begin{bmatrix}-\theta_1(k)\\ -\theta_2(k)\\ \vdots\\ -\theta_q(k)\end{bmatrix}$	I
ARMA(p, q)	$X(k)=X(k-1)$ $y(k)=H(k)X(k)+v(k)$ 단, $H(k)=[y(k-1), y(k-2), \cdots\ y(k-p), e(k-1), e(k-2)\cdots e(k-q)$	$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_p\\ \theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_Q\end{bmatrix}$	I
ARIMA(p, q)	$X(k)=A(k,k-1)X(k-1)+G(k)W(k)$ $y(k)=H(k)X_S(k)+v(k)$ 단, $G(k)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$ $H(k)=1$	$\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ \vdots\\ x_s(k)\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \vdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$

<표1>에서 선형모형을 보면 시간전이행렬 A(K+1,K)가 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 일정한 값으로 $\mu(K)$를 추정해주는 상태공간 모형이 된다. 특히, 측정방정식 $y(K)$를 실시간으로 고려함으로써 a_1이 시간변화에 대해 일정한 값으로 추정되고 추정된 a_1이 $\mu(K)$에 더해 주면서 최종 $\mu(K)$를 추정해주는 모형이된다. 본 연구가 제시한 새로운 모형은 기존 연구된 선형 모형의 a_1을 시변(Time-Varying)으로 처리해 주는 모형으로써 다음과 같이 설계된다.

<상태방정식>

$$x_1(k) = \alpha x_1(k-1) + (1-\alpha)x_2(k-1)$$
$$x_2(k) = \beta x_2(k-1) + w(k-1)$$

으로 설정했으며, 행렬(Matrix)로 표현하면

$$X(k) = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} X(k-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k-1) \qquad (1)$$

단, $X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, α: $0<\alpha<1$, β: 시변 또는 시불변 변수값

와 같다.

여기서,

$x_1(k)$= k시점에서의 관측치

$x_2(k)$= k시점에서의 추정치

$w(k) \sim N(0, \sigma_w^2)$

<측정방정식>

$$y(k) = [\ 1\ \ 0\ ]\ X(k) + v(k) \qquad (2)$$

단, $v(k) \sim N(0, \sigma_v^2)$

(1),(2)식으로 표현되는 모형은 실측데이터의 모형화를 상태공간모형화로 변형시키므로서, 0 시점에서의 추정치 $x_2(0)=0$, $x_1(0)$를 실측데이터의 평균값 및 시간전이행렬 A(k, k-1)에 의한 새로운 추정값들을 구할 수 있는 동적궤환 예측모형이 된다.

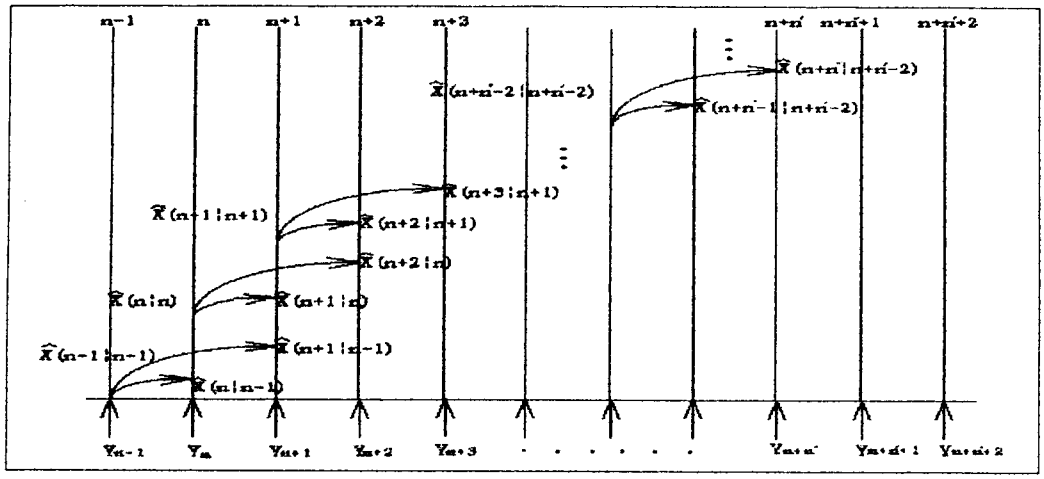
또한 α, β의 값은 관측치와 추정치에 대해 추정 에러를 가장 최소화 시켜주는 값이 선택된다.

2.2 1단계 동적 예측모형설계

생산시스템의 품질 데이터를 가장 잘 표현해주는 상태 및 측정방정식이 설정 될때, 상태방정식의 시간전이 행렬 A(k+1,k)를 갖고 1단계 시간 Update 예측치를 구할 수 있게된다. 측정치를 고려하지 않아 예측치의 위험률이 존재하겠지만, 칼만 필터링 추정식의 에러공분산 및 칼만게인의 특성에 의해 1단계 예측치는 어느정도 신뢰성이 높은 예측치로 고려 된다.

예측된 값은 시간 Update 예측값이기 때문에 현재 측정치를 고려한 추정치는 필터추정치가 되며, 필터추정치에 근거한 시간 Update 1단계 예측이 된다. 이와같은 개념의 2단계 예측치 중복 평균방법을 통한 1단계 예측은<그림1>에 표시되어 있다.

<그림1>의 방법은 예측치들의 위험율을 스무싱(smoothing) 시켜주는 방법이라고 할 수 있다.



<그림 1> 1단계 예측을위한 블럭다이어그램

(2단계 시간 예측치 중복평균방법)

<그림 1>의 시간 Update 중복평균 방법은 각 시점에서 2단계 예측하여 각 시점의 중복 예측치를 평균하여 그 값을 공정예측치로 처리해 주게된다.

<그림 1>에 제시된 방법은 기 설정된 (1),(2)식에서 k = n-1 시점에서 2단계 시간 Update 예측값들과 k = n 시점에서의 2단계 시간 Update 예측값들이 k = n+1 시점에서 1개의 중복된 값이 나타난다. 중복된 값들의 평균치를 구해 그것들을 임의의 k에 대해 $\hat{x}(k+1|k, k-1)$의 일단계 예측값으로 처리해 주는 방법이 된다. 각 기준 시점을 중심으로한 일반화된 모형식으로 표현해 보면,

$$\hat{x}'(n+1|n, n-1) = \frac{\hat{x}(n+1|n) + \hat{x}(n+1|n-1)}{2}$$

$$\hat{x}'(n+2|n+1, n) = \frac{\hat{x}(n+2|n+1) + \hat{x}(n+2|n)}{2}$$

$$\hat{x}'(n+3|n+2, n+1) = \frac{\hat{x}(n+3|n+2) + \hat{x}(n+3|n+1)}{2}$$

$$\vdots$$

$$\hat{x}'(n+n'|n+n'-1, n+n'-2) = \frac{\hat{x}(n+n'|n+n'-1) + \hat{x}(n+n'|n+n'-2)}{2} \qquad (3)$$

와 같다. 제시된 모형은 새로운 측정치가 고려됨에 따라 일단계 예측되는 동적궤환 예측모형이 된다.

3. EWMA와 1단계예측 결과 비교

3.1 EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)

EWMA는 현재의 측정치를 고려한 다음단계의 일단계예측 궤환(Recursive) 모형으로서 과거 데이터일수록 가중치가 줄어들게되는 특성치를 갖는 통계량이다. EWMA 모형은 현재 예측된 값에 관측 에러의 λ배를 더한 형태로, 다음과 같이 표시할 수 있다[3].

$$\begin{aligned} \text{EWMA} = \hat{y}_{t+1} &= \hat{y}_t + \lambda e_t \\ &= \hat{y}_t + \lambda(y_t - \hat{y}_t) \\ &= \lambda y_t + (1-\lambda)\hat{y}_t \end{aligned} \qquad (4)$$

여기서

$\hat{y}_{t+1}$ = 시간 t+1 시점에서 예측된 값(새로운 EWMA값)

$\hat{y}_t$ = 시간 t에서 관측된 값

y_t = 시간 t에서 예측된 값(과거 EWMA값)

e_t = $y_t - \hat{y}_t$ = 시간 t에서 관측된 에러(Error)

λ = $0<\lambda<1$ 사이의 상수값

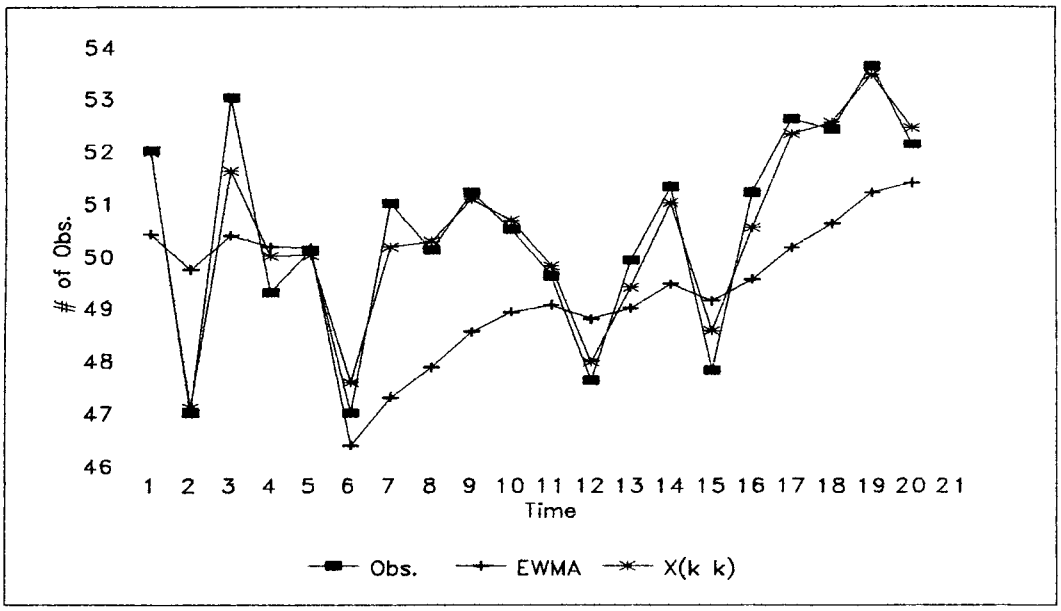
3.2 EWMA와 1단계 예측결과 비교

EWMA값이 현재 관측치를 갖고 다음 예측치를 구하는 모형으로 품질 모니터링의 한 도구로서 많은 연구가 이루어져왔다[3][5]. 그러나 제시된 1단계예측모형이 EWMA값과 동등한 또한 그 이상의 정도 높은 예측치를 구할 수 있다면 경제성, 시간측면에서 효과를 기대할 수 있다. 또한 사전에 공정의 품질 모니터링이 가능하게 되어 품질모니터링의 정확성 측면에서도 기존 EWMA에 의한 품질모니터링보다 효율적인 모니터링을 제공해 주게 된다. 따라서 주어진 실측데이터[6]를 갖고 EWMA값과 식(1)와 식(2)에 근거한 제안된 일단계 예측결과(α=0.5, β=1일때)를 비교 평가하는 과정이 필요하게 된다.

<표2>와 <표3>에 EWMA, 1단계 예측결과를 제시했고, 결과추이를 그림으로 나타내면 <그림 2>와 <그림3>와 같다.

<표2> EWMA와 필터링추정치 결과 비교

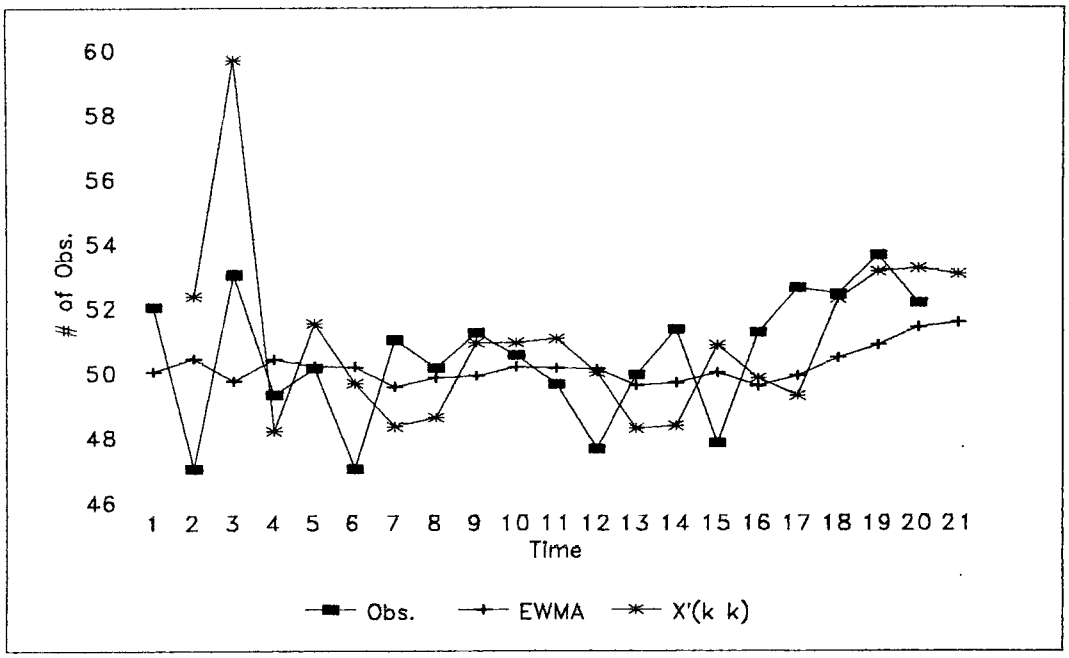
t	obs	EWMA (λ=0.2)	e(k)	$e^2(k)$	$\hat{X}(k \mid k)$	$\underline{e}(k)$	$\underline{e}^2(k)$
0		(50.00)			(50.00)		
1	52.0	50.4	1.60	2.56	51.97	0.03	0.00
2	47.0	49.72	-2.72	7.40	47.08	-0.08	0.01
3	53.0	50.38	2.62	6.86	51.61	1.39	1.93
4	49.3	50.16	-0.86	0.74	49.98	-0.68	0.46
5	50.1	50.15	-0.05	0.00	49.99	0.11	0.01
6	47.0	46.37	0.63	0.40	47.57	-0.57	0.32
7	51.0	47.29	3.71	13.76	50.16	0.84	0.71
8	50.1	47.86	2.24	5.02	50.27	-0.17	0.03
9	51.2	48.53	2.67	7.13	51.05	0.15	0.02
10	50.5	48.92	1.58	2.50	50.66	-0.16	0.03
11	49.6	49.05	0.55	0.30	49.78	-0.18	0.03
12	47.6	48.77	-1.77	1.37	47.96	-0.36	0.13
13	49.9	48.99	0.91	0.83	49.38	0.52	0.27
14	51.3	49.45	1.85	3.42	51.00	0.30	0.09
15	47.8	49.12	-1.32	1.74	48.55	-0.75	0.56
16	51.2	49.54	1.66	2.76	50.53	0.67	0.45
17	52.6	50.15	2.45	6.00	52.31	0.29	0.08
18	52.4	50.60	1.80	3.24	52.53	-0.13	0.02
19	53.6	50.20	2.40	5.76	53.43	0.17	0.03
20	52.1	51.38	0.72	0.52	52.43	-0.33	0.11
21							
Error sum of square		$\sum_{k=1}^{20} e^2(k) = 72.32$			$\sum_{k=1}^{20} \underline{e}^2(k) = 5.29$		



<그림2> EWMA와 필터링추정치 결과추이

<표3> EWMA와 1단계 예측결과 비교

t	obs	EWMA (λ=2)	e(k)	$e^2(k)$	$\hat{X}'(k \mid k)$	e'(k)	$e'(k)^2$
0					(50.00)		
1	52.0	(50.00)	2.00	4.00	-	-	-
2	47.0	50.40	-3.40	11.56	52.33	-5.33	28.41
3	53.0	49.72	3.28	10.76	59.65	-6.65	44.22
4	49.3	50.38	-1.08	1.17	48.16	1.14	1.13
5	50.1	50.16	-0.06	0.00	51.49	-1.39	1.93
6	47.0	50.15	-3.15	9.92	49.64	-2.64	6.97
7	51.0	49.52	1.48	2.19	48.29	2.71	7.34
8	50.1	49.82	0.28	0.08	48.60	1.50	2.25
9	51.2	49.87	1.33	1.77	50.90	0.30	0.09
10	50.5	50.14	0.36	0.13	50.90	-0.40	0.16
11	49.6	50.21	-0.61	0.37	51.03	-1.43	2.04
12	47.6	50.09	-2.49	6.20	49.97	-2.37	5.62
13	49.9	49.59	0.31	0.10	48.26	1.64	2.68
14	51.3	49.65	1.65	2.72	48.34	2.96	8.76
15	47.8	49.98	-2.18	4.75	50.83	-3.03	9.18
16	51.2	49.55	1.65	2.72	49.80	1.40	1.96
17	52.6	49.88	2.72	7.40	49.25	3.35	11.22
18	52.4	50.42	1.98	3.92	52.25	0.15	0.02
19	53.6	50.82	2.78	7.73	53.10	0.50	0.25
20	52.1	51.37	0.73	0.53	53.20	-1.10	1.21
21		51.52			53.02		
Error sum of square		$\sum_{k=1}^{20} e^2(k) = 78.02$		$\sum_{k=4}^{20} e^2(k) = 51.7$		$\sum_{k=4}^{20} e'(k)^2 = 23.84$	



<그림3> EWMA와 1단계 예측결과 추이

<표2>의 필터링 추정치 결과를 보면 EWMA모형에서는 에러제곱합(Error Sum of Square)이 72.32로서 최소가 되는 λ=0.2가 선택된다, 설정된 칼만모형에 적용되었을때는 에러제곱합이 5,29가 되어 67.03의 차이가나며 약 13.67배의 효율향상으로 나타난다.
전체분석에 따른 추정치결과들의 추이는 <그림2>에 나와있다. 2단계 시간 Update 중복평균방법에 의한 일단계예측결과인 <표3>을 보면 t=4이후의 시점들을 비교했을때 EWMA예측값의 에러제곱합 5.17에 비해 27.86의 차이가 발생되어 약 2.17배의 효율향상이 된다. 추정치 결과들의 추이는 <그림3>에 나와있다.

위 결과에따라 설계된 주어진 데이터에 대해 모형이 EWMA예측값보다 우수함을 입증할 수 있다. 그러나 <표3>의 결과에서 t=3시점 까지는 칼만필터링의 속성상 워밍업 과정으로 큰 에러제곱합이 나타난다. 데이터의 특성에 따라 다르겠지만, 어느정도 시간까지의 워밍업을 요구하는 문제점을 내포하게 된다. 전체적으로 예측효율 및 동적시스템구축 측면에서는 좋은 모형이 된다. <표4>에 모형별 종합분석결과가 나와있다.

<표4> 모형별 종합분석결과

모 형	에러 제곱합	모 형	에러 제곱합
EWMA	72.32	EWMA	51.7(t=4 이후)
필터링	5.29	시간update중복평균	27.86
효 율	13.69	효 율	2.17배

4. 결 론

본 연구에서는 실측데이터를 상태 공간 모형화시켜 그에 따른 시간 update 예측치들의 중복평균 방법을 이용하여 1단계 예측모형을 설계하였다. 설계된 모형의 효율성을 검증하기 위해 기존의 EWMA 모형과의 비교 평가를 실시한 결과 EWMA모형보다 우수한 결과가 나왔다. 따라서 본 연구에서 설계된

모형을 공정의 예방관리 및 품질 모니터링의 측면에서도 좋은 결과를 줄 수 있고 실제 제조현장의 적용가능성을 더욱 높여주는 효과적인 모형설계와 그 효율성을 입증하였다.

한편 본 연구에서 제안한 설계모형과 관련하여 향후 연구과제는

첫째, 동적 품질 모니터링 시스템설계

둘째, 현재를 기준으로한 사전 예측 품질 정보의 활용을 통한 실시간 공정 관리등으로 확장 연구될 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Bozic, S.M., Digital and Kalman Filtering; An Introduction to Discrete Time Filtering and Optimum Linear Estimation, Edward Arnold, pp.113-120, 1979.

[2] Lewis, F.L., Optimal Estimation, John Wiley & Sons, pp.67-80, 1986.

[3] Mongomery, D.C., Introduction to Statistical Process Control, 2nd edition, John Wiley & Sons, pp.299-305, 1991.

[4] Harrison, P.J., "Exponential Smoothing and Short-Term Sales Forcasting," Management Science," vol.13, pp,821-842, 1967.

[5] Hubele, N.F. and Chang, S.I., "Adaptive Exponentially Weighted Moving Average Schemes Using a Kalman Filter," IIE Transaction, Vol.22, No.4, pp.361-369, December 1990.

[6] Hunter, J.S., "The Exponentially Weighted Moving Average", Journal of Quality Technology, Vol.18, No.18, pp.203-210, 1986.

[7] Ledolter, J., "A Recursive Approach to Parameter Estimation in Regression and Time series Models," Communication in Statistics, A, pp.227-1246, 1979.

[8] Morrisom, G.W. and D.H. Pike, "Kalman Filtering Applied to Statistical Forecasting," Management Science, Vol.23, pp768-774, 1977.

[9] Sastri, T., "A State Space Modeling Approach for Time Series Forecasting," Management Science, Vol.31, No.11, pp.1451-1470, Nov, 1985.