강판 절단 생산에서의 CSP -A Cutting Stock Problem in the Sheet Steel Cutting Production-

오 세 호*
OH, SE-HO

Abstract

The aim of this paper is to suggest the cutting stock problems which are two-dimensional in form, but can be treated as the optimization methods for one-dimensional cutting stock problem by exploiting the length requirement of the products. The solution method consists of two stages. The first calculates the number of roll pieces of each size. Next, 1-dimensional cutting stock model is set up. One heuristic method to calculate the number of each roll is suggested. The trim loss minization criteria are used to design the objective function. This model can be solved by the conventional cutting stock procedures based on enumerating the possible cutting patterns.

1. 서론

철강판, 접착테이프, 신문용지와 같은 원자재를 적절한 규격으로 잘라내는 절단 공정(cutting process)은 찌꺼기, 즉 trim-loss를 발생시킨다. trim-loss가 많으면 많을수록 원자재의 사용량은 증가한다고 볼 수 있다. 따라서 최소한의 원자재를 사용하여 수요자가 원하는 규격의 제품을 생산하기 위해서는 trim-loss를 최소화시킬 수 있는 절단 방법을 모색하여야 하는데 이러한 부류의 문제들이 cutting stock problem 이다. (이후 CSP로 표기)

CSP는 Kantarovich[7]가 처음 제기한 이후로 이 문제의 범주에 속하는 여러가지 모형들이 제시되었고, 최적해 또는 근사해를 구할 수 있는 해법들이 연구되어 왔다.

Hinxman[6]은 dimension의 관점에서 발표된 CSP들을 분류했고 해법들을 선형계획법, 분지한계해법, 동적계획법에 근거한 algorithmic method 와 heuristic method 로 구분했다.

Dyckhoff[1]는 bin packing, pallet loading, nesting 그리고 knapsack problem 을 CSP와 동일한 논리적인 구조를 갖고 있다고 보고 체계적인 통합을 시도하였고 문제 유형을 분류하는데 기준이 되는 특성들을 제시하였다.

본 연구에서는 2-dimensional CSP에 속하는 문제를 완제품의 품질특성을 이용하여 1-dimensional 문제 형태로 변형시키는 절차와 해법을 제시하였다. 먼저 각 폭(width)의 규격의 roll piece들을 적어도 몇개씩을 생산해야 하는지 그 갯수를 계산한다. 다음 단계로 1-dimensional cutting 모형을 만들어 해를 구하게 된다. 근본적으로 CSP는 이론적인 복잡도 관점에서는 NP-complete로 분류되지만 실제로 최적해를 구하는데 필요한 계산량은 cutting pattern의 dimension 에 영향을 많이 받기 때문에 dimension을 줄이는 것은 해법의 효율성을 높이는데 절대적이라고 할 수 있다.

* 청주대학교 산업공학과

2. 수리 모형 및 해법

2.1 표기(notation)및 가정(assumption)

본 연구에서 고려된 CSP는 폭과 길이가 W, L 인 직사각형 원자재(jumbo roll)를 일정한 폭과 길이로 잘라내는 문제이다.
원자재와 제품규격을 나타내면 다음과 같다.

<u>표기(notation)</u>

1) ($W \times L$): 폭,길이가 W, L 인 원자재(jumbo roll)
2) ($w_i \times l_{i,k}$) , $i = 1, \cdot\cdot\cdot, m$, $k = 1, \cdot\cdot\cdot, u_i$: 제품 규격
3) α mod(β) : α를 β로 나눈 나머지
4) $\lceil \delta \rceil$: δ를 넘지 않는 최대의 정수

수리모형을 개발하는 과정에서 주어진 문제상황을 수식화하기 위해 다음의 가정들을 전제로 한다.

<u>가정 (assumption)</u>

1) cutting 방법은 2 stage guillotine cutting을 채택한다.
2) $l_{i,k}$ > L 이면 폭이 w_i 인 다른 strip으로 길이의 규격을 맞춘다.즉, 길이는 폭이 동일한 strip들의 연장 길이로 이루어진다.
3) 제품을 형성하고 있는 각 strip 들은 최소한의 길이 $L_{i,k}$ 보다 커야 한다.

가정1)은 먼저 폭의 규격을 맞추기 위한 절단 공정이 이루어진 다음 길이 규격을 맞추기 위한 공정이 이루어진다는 것을 의미한다. 한편, 완제품의 길이는 원자재의 길이보다 큰경우가 있는데 이때는 폭의 규격이 맞는 piece 들로 완제품의 길이가 형성된다. 그러나, 완제품의 규격을 형성하고 있는 piece 들은 수요자의 요구에 따라 최소한의 길이보다 커야한다.

2.2 수리 모형

폭의 규격을 맞추기 위한 1 stage cutting에서 jth cutting pattern을 다음과 같이 표기하자.

$$a_{.j} = (a_{1j}, a_{2j}, \cdot\cdot\cdot, a_{mj}), \quad a_{ij} : (w_i \times L) \text{ 인 strip의 갯수}$$

이때 j^{th} pattern에 의한 폭의 trim loss 는 식(1)과 같다.

$$L \{ W - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \} x_j \qquad \cdot\cdot\cdot (1)$$

x_j : jth cutting pattern을 채택한 jumbo roll의 갯수

각 패턴 $a_{\cdot j}$ 로 x_j 개의 jumbo roll 을 잘라냈을때 폭이 w_i 인 strip 의 총길이는 식(2)이다.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j \cdot L \qquad \cdots (2)$$

가정(3)을 고려하지 않는다면 폭이 w_i 인 제품들의 길이의 총합은 식(3)이 된다.

$$\sum_{k=1}^{u_i} l_{i,k} \qquad \cdots (3)$$

따라서 폭이 w_i 인 제품들에서 발생되는 trim loss 는 식(4)와 같다.

$$w_i \{ \sum_{j=1}^{n} L \cdot a_{ij} \cdot x_j - \sum_{k=1}^{u_i} l_{i,k} \} \qquad \cdots (4)$$

그러므로 가정 1), 2) 아래에서 최소의 trim loss 를 발생시키는 방법은 (P1)을 풀면 구할 수 있다.

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} \{ W - a_{ij} w_i \} x_j \cdot L + \sum_{i=1}^{m} w_i \{ \sum_{j=1}^{n} L \cdot a_{ij} \cdot x_j - \sum_{k=1}^{u_i} l_{i,k} \}$$

$$(\text{P1}) \quad \text{s.t} \quad L \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq \sum_{k=1}^{u_i} l_{i,k}, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0, \ \text{integer}, \quad j = 1, \cdots, n$$

가정3)을 만족시키기 위해서는 (P1)에서 구해진 strip 보다 많은 양이 필요할 것이다. 따라서 필요한 각 strip들의 갯수를 알 수 있다면 가정 1), 2), 3)을 모두 고려한 문제를 1-dimensional cutting 문제로 모형화 할 수 있다.

폭이 w_i인 strip ($w_i \times l_{i,k}$), $k=1, \cdots, u_i$ 에 대하여 고려해 보자

$L'_{i,1} = l_{i,1} \bmod (L)$ 이라고 놓았을 때 $L'_{i,1}$이 $L_{i,1}$보다 작으면 $L_{i,1} - L'_{i,1}$ 만큼 loss 양이 늘어난다. 그러나 $\lceil l_{i,L}/L \rceil$개의 $(w_i \times L)$ strip으로부터 $(w_i \times L - L_{i,1})$만큼씩 떼어내 총길이 규격 $L_{i,1}$을 맞추어 줄수 있고 떼어낸 $(w_i \times L - L_{i,1})$ 은 다른 길이 규격을 맞추는데 사용할 수 있다.

$$\lceil (L_{i,1} - L'_{i,1})/(L - L_{i,1}) \rceil + 1 \leq \lceil l_{i,1}/L \rceil \qquad \cdots (5)$$

식(5)가 성립하면 $\lceil (L_{i,1} - L'_{i,1})/(L - L_{i,1}) \rceil$ 개의 $(w_i \times L)$ strip에서 $(w_i \times L - L_{i,1})$을 떼

어내고 1개의 $(w_i \times L)$ strip 에서 $(L_{i,1}-L'_{i,1})$ mod $(L-L_{i,1})$의 길이 만큼 잘라 낼 수 있다. 반대로 식(6)이 성립하면 $(w_i \times L)$ strip 모두에서 $(w_i \times L-L_{i,1})$을 떼어낼 수 있다.

$$\lceil (L_{i,1}-L'_{i,1})/(L-L_{i,1}) \rceil + 1 \geq \lceil l_{i,1}/L \rceil \qquad \cdots (6)$$

이러한 부분은 회수할 수 있는 양이지만 상품가치가 없어 loss로 처리될 수 밖에 없다. 그렇지만 재활용이 가능한 경우는 약간의 가치가 인정이 되기 때문에 순수한 Loss는 식(6)의 경우에만 발생한다.

본 모형의 경우 $(w_i \times L-L_{i,1})$ strip들이 다른 길이 규격을 맞추는데 사용할 때는 양품으로 인정받을 수가 있기 때문에 $(w_i \times L_{i,k})$, $k=2, \cdots, u_i$를 만들어 낼 수 있는지를 파악하는 것이 중요하다. $k=u_i$인 경우까지 확장시켜 $(w_i \times L)$의 strip이 몇개가 더 필요한지 계산하자. 다음의 해법은 $(w_i \times L'_{i,k})$ 혹은 $(w_i \times L_{i,k})$, $k=1, \cdots, u_i$ 의 piece를 만들기 위해 필요한 $(w_i \times L)$ strip의 갯수를 결정하는 해법이다. 편의상 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$L_{i,1} \leq L_{i,2} \leq \cdots \leq L_{i,u_i} \qquad \cdots (7)$$

해법

단계0. $\overline{L}_{i,k} = L-L_{i,k}$, $k \in N=\{1, \cdots, u_i\}$

$\Phi = \phi$, $k=0$, $K=0$

단계1. $k=k+1$

$\min\{\lceil (L_{i,k}-L'_{i,k})/(L-L_{i,k}) \rceil + 1 , \lceil l_{i,k}/L \rceil\} - 1$ 개의 $(w_i, \overline{L}_{i,k})$의 strip을 Φ에 넣는다. Φ에 속해 있는 strip 중에서 $\overline{L}_{i,j}$, $j \in N \setminus k$ 중 큰 순서대로 $(w_i, \overline{L}_{i,j})$을 만들 수 있는 strip 을 찾아 만족된 j는 N에서 제거하고 단계2로 간다.

단계2. $K_i=K_i+1$,$N=\phi$ 이면 종결

위의 해법으로 구한 K_i는 필요한 $(w_i \times L)$ 의 총갯수를 계산하는데 이용된다. 즉 총 갯수는 아래의 식과 같다.

$$\sum_{k=1}^{u_i} \lceil l_{i,k}/L \rceil + K_i \qquad \cdots (8)$$

따라서 식(8)을 (P1)에 첨가하여 모형 (P2)를 완성시킨다.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq K_i + \sum_{k=1}^{u_i} \lceil l_{i,k}/L \rceil, \quad i = 1, \cdots, m \qquad \cdots (9)$$

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} \{ W - a_{ij}\, w_i \}\, x_j \cdot L + \sum_{i=1}^{m} w_i \{ \sum_{j=1}^{n} L \cdot a_{ij} \cdot x_j - \sum_{k=1}^{u_i} l_{i,k} \}$$

$$(\mathrm{P2}) \qquad \mathrm{s \cdot t} \quad L \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq \sum_{k=1}^{u_i} l_{i,k}, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq K_i + \sum_{k=1}^{u_i} \lceil l_{i,k}/L, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0, \ \text{integer}, \quad j = 1, \cdots, n$$

모형(P2)를 기존의 CSP해법을 이용하면 최적해를 구할 수 있다. 앞으로 좀더 모형의 특성을 이용한 효율적인 해법이 연구되어야할 것이다. 앞에서 언급했듯이 loss가 재활용되는 모형에 대한 연구가 필요하다. (P2)모형은 길이 loss의 일부만 활용되는 경우이다. 폭에 의한 loss는 strip 전체에 해당되기 때문에 전체 loss의 대부분을 차지한다. 이 loss로 일정한 폭의 strip을 만들어 재고로 인정하는 상황을 고려해 볼 수 있다.

3. 결론

CSP 는 NP-complete 문제로 이론적 관점에서 효율적인 해법을 찾을 수는 없지만 최적해를 구하는데 필요한 실제적인 계산량은 cutting pattern 의 기하학적 형태에 의해 결정되는 dimensionality 에 크게 좌우되기 때문에 dimension 을 낮추는 것은 해법의 효율성을 높이는데 절대적이라고 할 수 있다.

본 연구에서는 2-dimensional 문제로 분류될 수 있는 모형을 제시하고 원자재(jumbo roll)와 제품의 요구조건의 특징을 이용하여 1-dimensional 문제로 변형시켜 최적해를 찾을 수 있는 방안을 모색하였다. 경우에 따라서는 trim-loss도 재활용이 가능하기 때문에 이것의 가치를 인정하는 모형 개발이 필요하다. 또한 대부분의 생산시스템의 여러 주기의 생산계획을 세우고 있는 현실성을 감안하여 trim-loss 의 일부분을 준 양품으로 처리하여 재고의 개념을 도입할 수 있도록 변형시킨 모형에 대한 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

[1] Dyckhoff, H. (1990), "A typology of cutting and packing problems",The Computer Journal 5,353-357.
[2] Farley,A.A. (1990), "The cutting stock problem in the canvas industry",European Journal of Operational Research 44,247-255.
[3] Gilmore, P.C., and Gomory, R.E. (1961), "A linear programming approach to the cutting-stock problem", Operations Research 9,849-859.
[4] Goulimis, C. (1990), "Optimal solutions for the cutting stock problem",European Journal of Operational Research 44,197-208.
[5] Haessler, R.W., and Sweeney, P.E. (1991), "Cutting stock problems and solution procedures", European Journal of Operational Research 54,141-150.
[6] Hinxman, A.I. (1980), "The trim loss and assortment problems: A survey",European Journal of Operational Research 5,8-18.
[7] Kantorovich(1960), "Mathematical methods of organizing and planning production", Management Sci. 6,366-422.