

● 論 文

## 埋立을 위한 土工量 計算에 관한 研究+

문 두 열\*  
(95년 6월 20일 접수)

### A Study on the Earthwork Calculation for Reclamation

Du-Yeoul Mun\*

**Key Words** : excavation, earthwork volume(토공량), unequal interval(부등간격), congruence area formula(혼합면적식), reclamation(매립), trapezoidal(사다리꼴), grid(격자), spot level method(매립), digital elevation model(수치표고모형), aerial photogrammetry(항공사진측량), model test(모형실험), aquarium(유리수조), accuracy(정확도)

### Abstract

The purpose of this paper is to calculate the excavation volume of unequal interval grid using nonlinear boundary in earthwork volume determination for reclamation of the foreshore.

A congruence area formula by first and third equation is compared with trapezoidal, simpson formulas to earthwork volume.

And nonlinear spot level method of unequal interval grid is compared with linear and nonlinear spot level method of equal interval grid excavation volume.

As a result algorithm of derived area and volume formula should provide a better accuracy than linear and nonlinear spot level currently in use.

Practical application of each method to the excavation volume is illustrated by digital elevation model of aerial photogrammetry and model test of aquarium.

+ 이 연구는 1995학년도 동의대학교 자체 학술 연구 조성비에 의하여 연구 되었음

\* 동의대학교 토목공학과 부교수

### 1. 서 론

항만 매립공사와 같은 대형 건설공사에서 넓은 지역의 면적이나 체적, 그리고 매립용 토공량의 범위를 결정할 때 정확한 토공량의 계산이 요구된다. 특히, 요즈음과 같이 토취장의 확보가 어려워 공사의 차질이 우려되는 여건 속에서 꼭 필요한 만큼의 토공량을 결정하는 것은 매우 중요하다. 아울러 매립 공사에서 상당한 비중을 차지하는 토공의 비용을 절감할 수 있으므로 경제적인 시공을 기대할 수 있다.

지금까지 토공량의 계산은 지형의 표면곡물을 선형으로 가정하여 사다리꼴법, 삼각형법, 최소제곱법, 횡단면법 등으로 각 구간면적을 구하고 전구간을 합하여 결정하고 있다. 그러나 불규칙적이고 변화가 심한 지형표면의 경계선을 단순히 직선형으로만 가정한 면적 및 체적의 계산식은 실제의 지형과 부합되지 않으므로 불합리한 면이 많다. 또한 격자간격을 등간격으로만 분할하여 계산하는 선형 또는 비선형 점고법은 지형의 굴곡에 대한 변곡점(최대, 최소점)을 정확히 선택할 수 없으므로 그 경계선에서 많은 오차가 수반 된다.

지형의 형상과 부합되는 비선형 해석은 1983년 Amed가 변곡점을 고려한 곡선과 직선을 혼합한 면적식을 제시하였고<sup>1)</sup>, 1987년 Hassan은 보간 다항식에 의해 Simpson 제 2법칙을 해석하여 사다리꼴 법칙에 의한 면적계산과 비교하였다.<sup>2)</sup> 1988년 Easa는 Simpson 제 1법칙에 따라 변곡점을 고려하여 비 등간격으로 분할한 면적을 계산하였으며, 구간이 홀수개인 경우 나머지 구간의 경계선은 미분으로 구하였고<sup>3)</sup>, 1989년 Chambers는 보간 다항식에 의한 비선형 부등간격의 점고법으로 토공량 계산식을 유도하였다.<sup>4)</sup>

따라서 본 연구에서는 토공량(면.체적) 계산의 정확도 향상을 위하여 먼저 지형의 경계선을 3차 곡선식과 1차 직선식을 혼합한 면적식을 유도한 후, 각 구간별로 구하여 합한 체적계산 결과와 기존의 사다리꼴법칙이나 Simpson 제 1,2법칙, 선형 점고법의 토공량 계산식에 의하여 구한 체적과 비교하였다.

또한, 기존의 동일한 격자간격의 선형 및 비선형

점고법과 본 연구에서 유도한 연속점(지거)에 의한 비선형 부등간격의 점고법과 비교하여 보았다. 유도식에 의한 방법은 실제지형에 부합되도록 곡선식을 구했으며, 각 면적의 구간을 유한 요소개로 분할하여 곡선 경계선의 연속성을 합리적으로 결정할 수 있을 것이다.

그리고 정확도의 확인을 위하여 유리 수조에서 모형실험과 항공사진에 의한 수치 표고자료를 이용하였다.

### 2. 토공량계산

#### 2.1 양단면평균법

양단면의 면적을  $A_1, A_2$ 라 하고 그 간격을  $h$ 이라 하면 토공량  $V$ 는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \times h \tag{2-1}$$

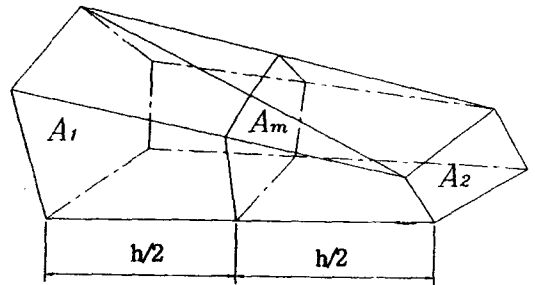


Fig. 1 End area formula.

#### 2.2 중앙 단면법

중앙 단면을  $A_m$ 이라하고 양 단면간의 거리를  $h$ 이라하면 다음식과 같다.

$$V = A_m \cdot h \tag{2-2}$$

#### 2.3 각주공식

Fig. 2와 같이 다각형의 위, 아래의 면이 평행이고 측면이 모두 평면으로 된 입체로서 체적은 다음식과 같다.

$$V = \frac{h}{6} (A_0 + 4A_m + A_1) \quad (2-3)$$

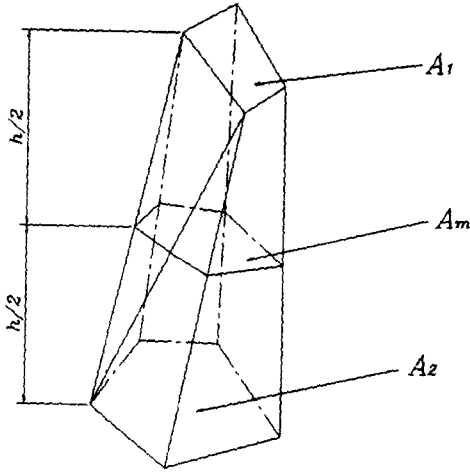


Fig. 2 Prismoidal formular.

2.4 면적계산

Fig. 1과 Fig. 2에서 면적 \$A\_1, A\_2\$의 계산은 그 경계를 선형으로 가정한 사다리꼴 공식과 비선형으로 가정한 Simpson 제1, 2법칙으로 구한다.

2.4.1 사다리꼴공식

Fig. 3에서 \$y\_0, y\_1, y\_2 \dots, y\_n\$는 지거의 길이이고, \$h\_0, h\_1, h\_2 \dots, h\_n\$이 지거의 간격이라면 면적은 다음 식과 같다.

$$\Sigma A = \frac{1}{2} ( y_0 h_1 + y_1 (h_1 + h_2) + y_2 (h_2 + h_3) + \dots + y_{n-1} (h_{n-1} + h_n) + y_n h_n ) \quad (2-4)$$

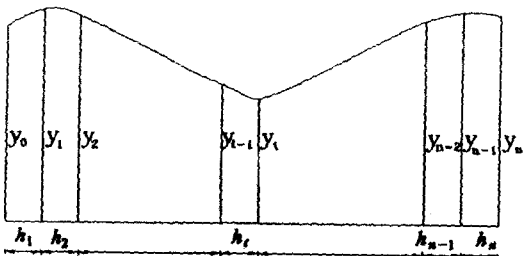


Fig. 3 Trapezoidal formular.

2.4.2 Simpson 제1법칙

Fig. 4는 수평거리 \$h\$인 점 \$x\_0, x\_1, x\_2\$의 절토고 \$f\_0, f\_1, f\_2\$를 나타내며 그 단면적을 계산하기 위하여 경계 곡선식을 2차 다항식으로 가정한다. 여기서 \$a\_0, a\_1, a\_2\$는 다항식의 계수이다.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2-5)$$

식(2-5)에서 다항식 아래의 면적을 계산하면 다음과 같다.

$$A = \int_0^b (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx \quad (2-6)$$

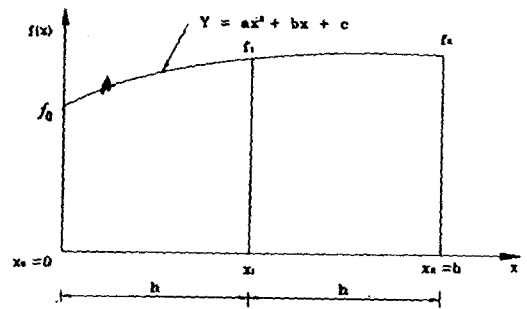


Fig. 4 Simpson's first formular.

2.4.3 Simpson 제2법칙

Fig. 5에서 경계를 3차 다항식으로 가정하고 그 아래의 면적을 계산하면 식(2-7)과 같다.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{3x_1} (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx \\ &= [ \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx + e ]_0^{3x_1} \\ &= ( \frac{81ax_1^4}{4} + \frac{27bx_1^3}{3} + \frac{9cx_1^2}{2} + 3dx_1 ) \quad (2-7) \end{aligned}$$

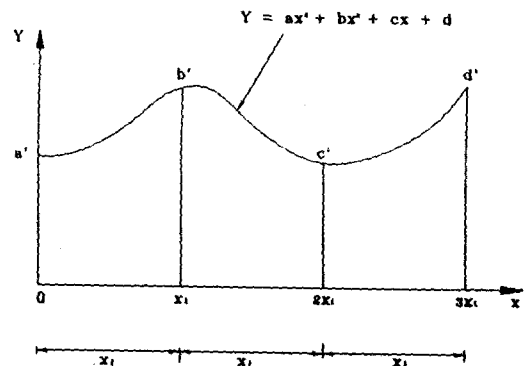


Fig. 5 Simpson's second formular.

2.4.4 제안식(혼합식)

Fig. 6에서 경계선을 3차식과 1차식을 혼합하여 면적을 계산하고

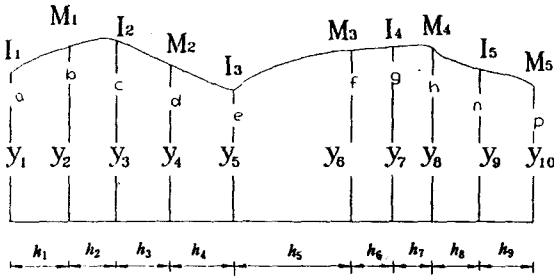


Fig. 6 A congruence area formular.

전체면적을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{1}{4} \{yI_1h_1 + yI_2(h_2 + h_3) + yI_3(h_4 + h_5) \\
 & + yI_4(h_6 + h_7) + yI_5(yI_5 + h_8 + h_9) \\
 & + 3yM_1(h_1 + h_2) + 3yM_2(h_3 + h_4) \\
 & + 3yM_3(h_5 + h_6) + 3yM_4(h_7 + h_8) \\
 & + yM_5h_9\} \quad (2-8)
 \end{aligned}$$

이며 일반식으로 나타내면 식(2-9)와 같다.

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^k yI_i(h_L I_i + h_R \cdot I_i) \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^j yM_i(h_L M_i + h_R \cdot M_i) \right] \quad (2-9)
 \end{aligned}$$

2.5 선형점고법

두 연속점  $f_0$ 와  $f_1$ 을지나는 1차 다항식의 면적은

$$A = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) \quad (2-10)$$

이며 단위 격자의 토공량(체적)을 계산하기 위해 적분하면 다음식과 같다.

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(X, Y) dy dx \quad (2-11)$$

여기서 격자 간격이  $m$ 과  $n$ 일때 전체 토공량(체

적)  $V$ 는

$$V = \frac{h^2}{4} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} f_{ij} \quad (2-12)$$

이 된다.

2.6 비선형 등간격의 점고법

Fig. 7에서 간격이  $m$ 과  $n$ 이고 토공량은  $f(x_i, y_i)$ 이며 단위 격자의 면적은  $h^2$ 이다.

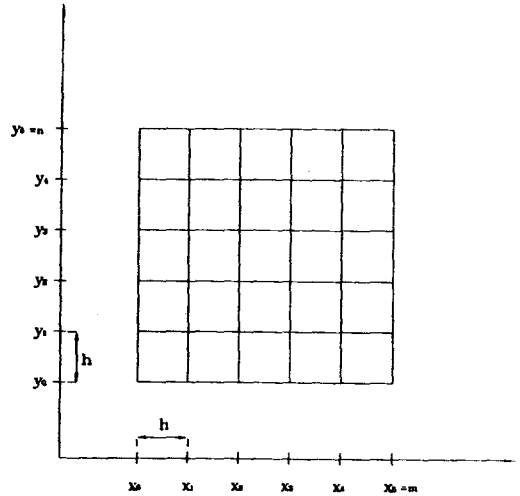


Fig. 7 Rectangular grid equal intervals.

예를 들어  $m=2, n=2$ 로 격자를 나누어 체적을 구하면

$$V = \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} f(X, Y) dy dx \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{h^2}{9} [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0) \\
 & + 4f(x_0, y_1) + 16f(x_1, y_1) + 4f(x_2, y_1) \\
 & + f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)] \quad (2-14)
 \end{aligned}$$

가 된다.

2.7 비선형 부등간격의 점고법

지금까지는 규칙적인 등간격에 대해서만 체적을 구하였지만 여기서는 간격을 불규칙적으로 취하므

로서 효율적인 토공량 계산을 할 수 있도록 한다.

Fig. 8 처럼 부등간격의 2×2 단위의 토공량(체적) 계산방법은 가로와 세로의 경계선은 비선형으로 각 다항식의 계수를 곱하면 된다.

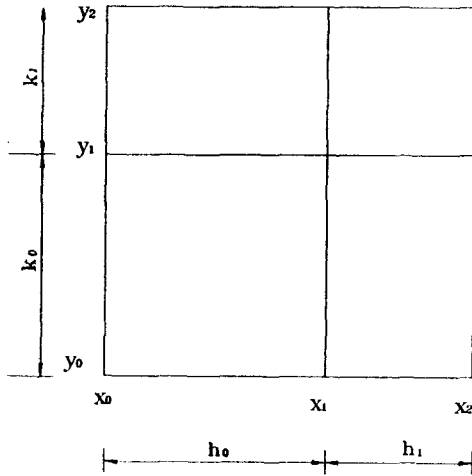


Fig. 8 2×2 Grid unit, unequal intervals.

여기서 x,y 는 절토고이고 h 와 k 는 간격이다.

$$V = \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} f(x, y) dy dx \quad (2-15)$$

y와 x에 대하여 적분하여 일반식으로 나타내면 식(2-16)과 같다.

$$V = \frac{(k_0+k_1)(h_0+h_1)}{6} \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 a_i c_j f_{ij} \quad (2-16)$$

여기서  $a_0 = \frac{(2h_0-h_1)}{h_0}$ ,  $a_1 = \frac{(2h_0-h_1)^2}{h_0h_1}$

$a_2 = \frac{(2h_0-h_1)}{h_1}$  이고

$c_0 = \frac{(2k_0-k_1)}{k_0}$ ,  $c_1 = \frac{(2k_0-k_1)^2}{k_0k_1}$ ,

$c_2 = \frac{(2k_0-k_1)}{k_1}$  이다.

### 3. 실험결과 및 분석

본 연구에서 제시된 토공계산식의 정확도를 확인할 목적으로 2종류의 실험을 하였다.

#### 3.1 항공사진측량

가시적으로 지형의 변화가 뚜렷한 100m×100m 인 6가지의 지형(Ad1~Ad6)을 선정하였다. 각지형의 표고자료는 정밀도화기 Wild A10을 통해 격자 간격을 5m 의 등간격으로 각 지형별로 400개를 추출 하였으며, 그 정확도의 기준이 되는 최확값은 2m 의 격자 간격에 의한 표고값으로 하였다. 정규 격자로 된 각 지형에 대한 등고선도와 3차원 투시도는 Fig. 9 및 Fig. 10과 같다.(지형 Ad2~Ad5의 그림은 생략)

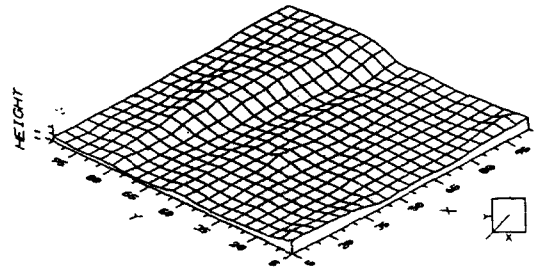
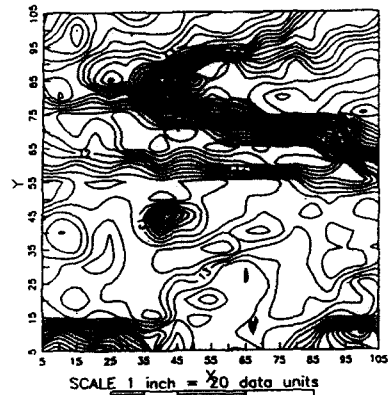


Fig. 9 A contour map and perspective drawing of Ad1.

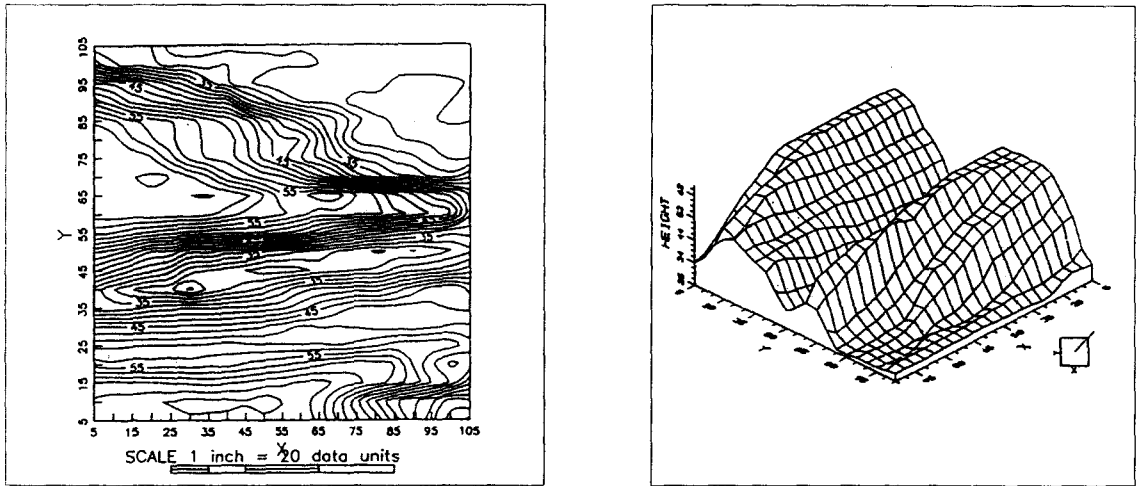


Fig. 10 A contour map and perspective drawing of Ad6.

Table-1. A deviation and accuracy for earthwork computation of Ad1, 2.

Case	Terrain		Ad 1			Ad 2		
	Method		Earth	Deviat	Accuray	Earth	Deviat	Accuray
C1	Sim1	End	132609.1	1635.1	1/80.1	100245.1	1023.8	1/96.9
C2		Mid	132870.9	1896.9	1/69.0	100318.9	1097.6	1/90.4
C3		Pri	131274.1	300.1	1/436.4	99585.69	364.36	1/272.3
C4	Sim2	End	131268.9	294.9	1/444.1	99558.7	337.37	1/294.1
C5		Mid	132887.2	1913.2	1/68.5	100528.6	1361.27	1/72.9
C6		Pri	131092.6	118.6	1/1104.3	99355.2	133.82	1/741.5
C7	Tra	End	132542.8	1568.8	1/83.5	101081.0	1859.7	1/53.4
C8		Mid	132465.2	1491.2	1/87.8	101777.2	2555.87	1/38.8
C9		Pri	132699.6	1725.6	1/75.9	100567.7	1346.37	1/73.7
C10	Der	End	131252.4	278.4	1/470.5	99379.00	157.67	1/629.3
C11		Mid	134585.6	3611.6	1/36.3	101951.1	2729.77	1/36.3
C12		Pri	131080.7	106.7	1/1227.5	99316.24	94.91	1/1045.4
C13	Spot		132050.5	1076.5	1/121.7	99800.63	579.3	1/171.3
	Mpe			130974			99221.33	

- \* Earth. : Earthwork
- Sim1,2 : Simpson'1,2rule
- End. : End area formula
- Deviat : Deviation
- Tra. : Trapezoidal rule
- Der. : Dervied rule(Congruence area formula)
- Mpe. : Most probable earthwork
- Spot : Spot levels formula
- Mid. : middle area method

Table-2. A deviation and accuracy for earthwork computation of Ad3,4.

Case	Terrain Method		Ad 3			Ad 4		
			Earth	Deviat	Accuray	Earth	Deviat	Accuray
C1	S i m 1	End	272889.2	2378.7	1/113.7	834290.2	9696.0	1/85.0
C2		Mid	272247.9	1737.4	1/155.7	832676.3	8082.1	1/102.0
C3		Pri	271173.8	663.3	1/407.8	826335.6	1741.4	1/473.5
C4	S i m 2	End	273997.8	3487.3	1/77.6	832569.9	7975.7	1/103.4
C5		Mid	273976.5	3466.0	1/78.0	831728.4	7134.2	1/115.6
C6		Pri	270929.1	418.6	1/646.2	825682.9	1088.7	1/757.4
C7	T r a	End	277469.3	6958.8	1/38.9	837148.5	12554.3	1/65.7
C8		Mid	277393.2	6882.7	1/39.3	836910.8	12316.6	1/66.9
C9		Pri	274283.8	3773.3	1/71.7	835788.9	11194.7	1/73.7
C10	D e r	End	272690.5	2180.0	1/124.1	828703.6	4109.4	1/200.7
C11		Mid	277102.8	6592.3	1/41.0	826849.4	22552.2	1/36.6
C12		Pri	270814.2	303.7	1/890.7	825375.7	781.5	1/1055.1
C13	Spot		271351.7	841.2	1/321.6	828701.3	4107.1	1/200.8
	Mpe		270510.5			824594.2		

Table-3. A deviation and accuracy for earthwork computation of Ad5,6.

Case	Terrain Method		Ad 5			Ad 6		
			Earth	Deviat	Accuray	Earth	Deviat	Accuray
C1	S i m 1	End	752068.4	9993.4	1/74.3	452953.9	6372.3	1/70.1
C2		Mid	748741.3	6666.3	1/111.3	451416.9	4835.3	1/92.4
C3		Pri	744302.5	2227.5	1/333.1	447828.9	1247.3	1/358.0
C4	S i m 2	End	753147.3	11072.3	1/67.0	453648.2	7066.6	1/63.2
C5		Mid	754596.2	12521.2	1/59.3	455062.9	8481.3	1/52.7
C6		Pri	743738.5	1663.5	1/446.1	447527.7	946.1	1/472.0
C7	T r a	End	762778.4	20703.4	1/35.8	459636.7	13055.1	1/34.2
C8		Mid	764038.5	21963.5	1/33.8	460955.7	14374.1	1/31.1
C9		Pri	752407.7	10332.7	1/71.8	453258.3	6676.7	1/66.9
C10	D e r	End	748107.4	6032.4	1/123.0	454865.7	8284.1	1/53.9
C11		Mid	763714.0	21639.0	1/34.3	460757.7	14176.1	1/31.5
C12		Pri	742829.8	754.8	1/983.1	447260.0	678.4	1/658.3
C13	Spot		745105.1	3030.1	1/244.9	447858.5	1276.9	1/349.7
	Mpe		742075			446581.6		

6가지 지형에 대해 Simpson과 사다리꼴, 그리고 본 연구에서 유도된 혼합식으로 면적을 구하여 양단면평균법, 중앙단면법, 각주공식에 의한 13가지 방법으로 토공량의 계산을 하였으며, 최확토공량에 대한 편차는 Table. 1, 2, 3과 같다.

Fig. 11~13은 토공량계산에 적용된 각식의 결과에 대한 정확도 분석을 막대그래프로 나타내었다.

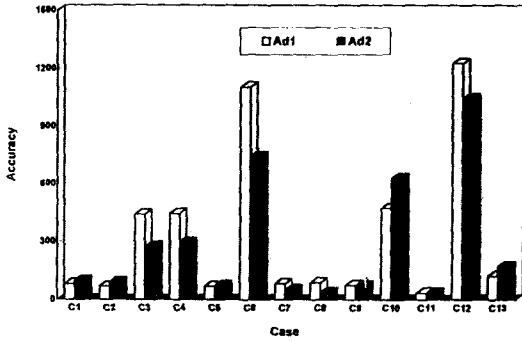


Fig. 11 Accuracy of terrain Ad1, Ad2.

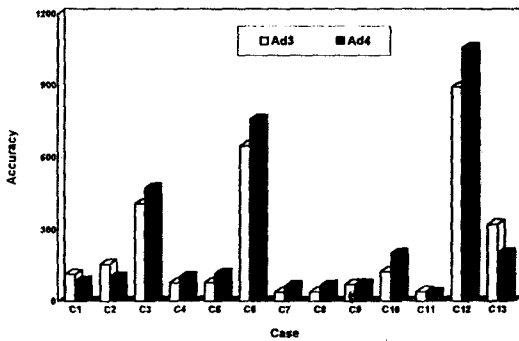


Fig. 12 Accuracy of terrain Ad3, Ad4.

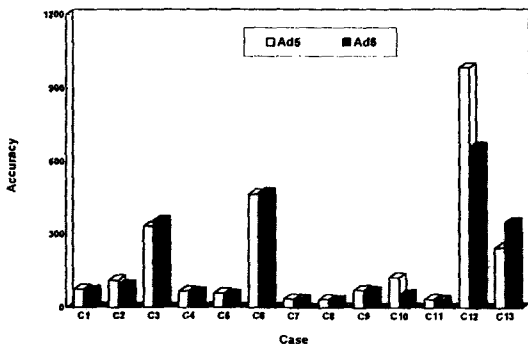


Fig. 13 Accuracy of terrain Ad5, Ad6.

Fig. 11~13에서 격자 간격이 5m 일때 각 방법에 대한 정확도 분석을 하면 전체 지형 6가지(Ad1~Ad6) 모두 본 연구에서 제시된 제안식(혼합식)을 각주공식에 적용한 방법이 가장 정확도가 높게 나타났다.

지형 Ad1에서는 Simpson 제2법칙에 의한 각주공식이 비교적 정확하였고, 지형 Ad2는 Simpson 제2법칙에 의한 각주공식과 제안식에 의한 양단면법의 순으로 높게 나타났다. 또한 지형 Ad3와 Ad4는 제안식의 각주공식 그리고 Simpson 제2법칙의 각주공식, 그 다음 Simpson 제1법칙의 각주공식 순으로 정확도가 높게 나타났다.

경사가 급한 지형인 Ad5 와 Ad6 은 제안식의 각주공식과 그 다음 Simpson 제2법칙의 각주공식 그리고 Simpson 제1법칙에 의한 각주공식과 점교법이 비교적 높은 정확도를 나타내었다.

### 3.2 모형실험

지금까지 주로 토공계산에 이용되고 있는 선형 점교법 대신 그 경계선을 비선형으로 가정한 점교법과 본 연구에서 제시한 비선형 부등간격의 점교법의 프로그램 결과와 비교하여 보기로 한다.

먼저 투명 유리로된 34cm×50cm의 유리 수조에 주문진 표준사 10,000cm<sup>3</sup>을 검정용인 최확토공량으로 하여 3가지의 지형 모델을 구성하였다.

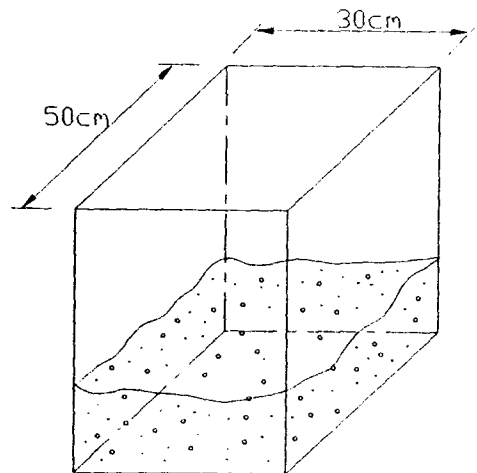


Fig. 14 A model test of a quarry.



각 격자를 등간격과 부등간격으로 나누어 측정  
침으로 표고를 측정하였고, 각 지형의 등고선도와  
투시도는 Fig. 15, 16과 같다.(지형 2와 지형 3은  
생략)

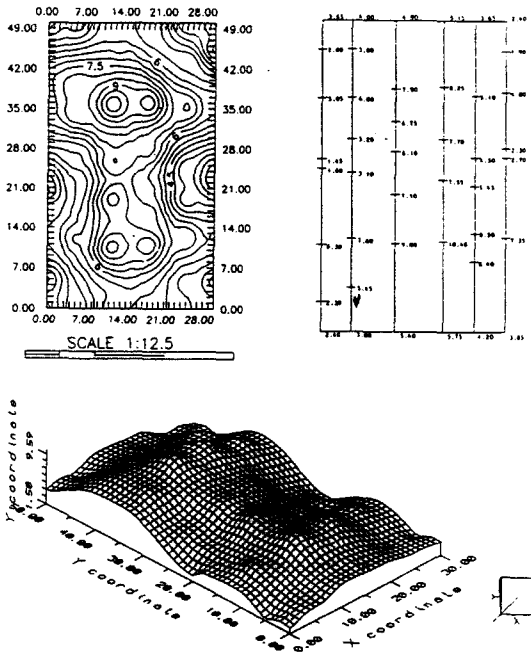


Fig. 15 Terrain 1 by equal intervals.

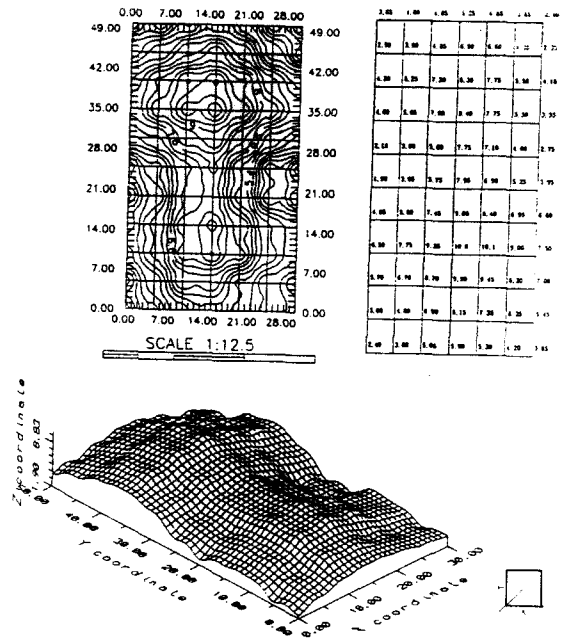


Fig. 16 Terrain 1 by unequal intervals.

각 지형에 대한 토공량 계산결과 Table.4와 같  
은 값을 보였고, 편차에 의한 정확도 분석은 Fig.  
17과 같다.

Table. 4 Earthwork of Terrain 1,2,3 and accuracy.

Method \ Terrain	Terrain 1			Terrain 2			Terrain 3		
	Earthwork	Diviation	Accuracy	Earthwork	Diviation	Accuracy	Earthwork	Diviation	Accuracy
Linear spot	9443.375	5.6%	1/17.97	9433.563	5.6%	1/17.97	9281.813	7.2%	1/13.92
Nonlinear spot equal	9466.555	5.3%	1/18.75	9450.863	5.5%	1/18.21	9250.512	7.5%	1/13.34
Nonlinear spot unequal	9673.890	3.3%	1/30.66	9696.500	3.0%	1/32.95	9493.130	5.1%	1/19.73
Most probable earthwork	10,000								

- \* Linear spot : Linear spot level method of equal interval
- \* Nonlinear spot equal : Nonlinear spot level method of equal interval
- \* Nonlinear spot unequal : Nonlinear spot level method of unequal interval

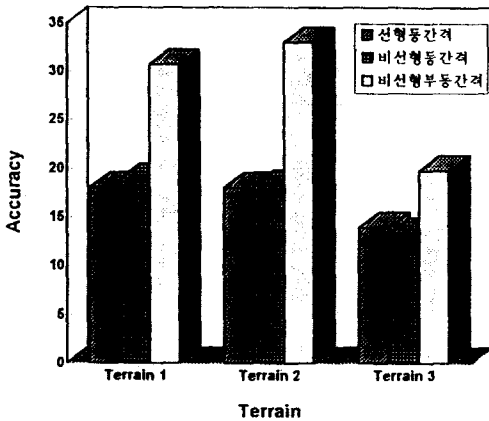


Fig. 17 Accuracy of terrain 1, 2, 3.

지형 1, 2, 3의 최확 토공량에 대한 정확도를 보면 지금까지 이용되고 있는 선형점고법이나 최근 연구되고 있는 비선형 등간격의 점고법보다 본 연구에서 제시한 비선형 부등간격의 토공량계산이 약 2~2.5% 가량 더 정확도가 향상 되었다. 또한 추출된 표고점의 자료가 현저히 줄어들므로서 현장에서 많은 표고를 추출해야하는 어려움을 덜 수 있으므로 경제적이고 효율적인 방법이라 할 수 있다.

#### 4. 결 론

지금까지 해안 매립공사에 필요한 최적 토공량을 구하기 위하여 각 이론식을 유도하고 프로그램 하였다. 정확도 비교를 위해 항공사진에 의한 수치 표고자료와 수조의 모형실험 결과, 다음과 같은 몇 가지의 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 본 연구에서 제시한 비선형 부등 간격식은 지형의 표고자료(최대, 최소점)를 임의로 추출하므로 최소의 표고 자료점만으로도 정확도가 가장 높았다. 그러므로 경제적이면서 효율적인 방법이라고 할 수 있다.

둘째, 제시된 비선형 부등 간격식은 실제 지형에 부합되도록 곡선식을 결정할 뿐만아니라, 각 면적의 구간을 유한 요소개로 분할하여 곡선식의 연속성을 합리적으로 결정할 수 있다.

그리고 완만한 지형 보다 굴곡이 심한 지역의 토공량 계산에 대한 정확도가 더 높게 나타났다.

세째, 면적을 구하여 토공량 계산을 할때, 본 연구에서 제시한 직선식과 3차 곡선식을 혼합시킨 면적식을 각주공식에 적용한 방법이 가장 정확하였다.

네째, 지형굴곡의 변화가 거의 없는 지역에서는 등간격의 선형점고법이나 비선형점고법의 정확도가 비슷하므로 어떤 방법을 이용하 여도 큰 차이가 없음을 알 수 있었다.

본 제안식(비선형점고법, 혼합면적식)은 컴퓨터 프로그램으로 간략화 하였고, 적용도 용이하게 할 수 있으므로 현장의 실무 작업에 널리 이용될 것으로 기대된다.

#### 참 고 문 헌

1. F.A., Ahmed, Area compulation using salient boundary points, J.Surveying Engrg., ASCE, 109(1), 54~63, 1983.
2. I.M., El Hassan, Irregular boundary area computation by simpson's 3/8 rule, Surveying Engrg., ASCE, 113(3), 127~132, 1987.
3. S.M., Easa, Area of irregularregion with unequal intervals, J.Surveying Engrg., ASCE, 114(2), 50~58, 1988.
4. D.W., Chambers, Estimating pit excavation volume using unequal intervals, J.Surveying Engrg., ASCE, 115(4), 390~401, 1989.
5. A.L., Allan, J.R., Hollway, and J.H.B., Maynes, Practical Field Surveying and Computations, William Hinemann Ltd., London, U.K., 597~601, 1975.
6. R.C., Brinker, and P.R., Wolf, Elementary Srveying, Harper and row, New York, N.Y., 245~254, 1984.
7. C.F., Gerald, and P.O., Wheatly, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley, Menlopark, Calif., 248~256, 1984.