실린더에서 점자극에 의한 어더미턴스와 자유파수

Admittance and Free Wavenumber in the Cylinderical Shell by Point Excitation

조 형 국*, 이 채 봉*, 김 정 국*
(Heung-Kuk Jo*, Chai-Bong Lee*, Jeong-Kuk Kim*)

요 약

본 논문에서는 새로운 실린더 운동방정식을 유도하고, 실린더 좌표의 각 방향에 대해 가정해로써 선형방정식을 구하였다. 또한, 점 자극을 가정하여 어드미턴스를 구하였고, 그 결과를 그림으로 나타내었다. 임피던스를 통해서 자유파수를 구하였고, 그 결과를 그림으로 나타내었으며, 이러한 계산 결과를 통하여 실린더에서 발생하는 진동 해석의 가능성을 보였다.

ABSTRACT

This paper shows newly developed equations of cylindrical shell motion, which solutions are obtained as a set of linear equation.

Each linear equation is derived along each axis of cylindrical coordinates. The admittance and the free wavenumber are obtained under assumption of point excition on a cylindrical shell. Their results are shown in figures.

In the results, this paper shows a possibility that a vibration and a noise generated in a cylindrical shell can be formulated as a mathematical model.

Ⅰ. 서 론

실린더 형태의 원통관은 주로 가정의 수로관이나 화학 공장의 유체나 증기 혹은 가스를 전달하는 통로로 쓰인다. 또한, 비행기나 로켓은 실린더의 한 응용된 형태이다. 특히 유독가스나 흐르는 원통관을 사용하는 공장에서는 실린더의 Structure-Borne Sound에 대하여 유의해야 한다.

실린더 형태의 원통관에서 Structure-Borne Sound의 해석은 실린더 운동방정식이 필요하다. 지금까지 많은 음향학자들에의해 실린더 운동방정식이 유도되었다.

본 논문에서는, 새로운 실리던 운동방정식을 유도하였고(유도 과정은 부록 참조), 실린더가 갖이고 있는 물리적인 현상을 해석하기위해 실린더 좌표의 각 방향에 해를 가정하였다. 실린더 운동방정식과 가정해로서 선형 방정식을 유도하였고, 점 자극으로 인한 실린더의 Structure-Borne Sound를 해석하였다. Structure-Borne Sound의 해석에서 어더미턴스는 매우 중요한 부분이다. 실린더에서 임의의 자극으로 인하여 발생되는 진동은 주파수에 따라 어떠한 모드가 최대로 되는가는 어더미턴스의 계산 결과로 알 수 있

*동서공과대학교 전자정보통신학부 전자공학전공
접수일자 : 1994년 7월 13일

다. 일반적으로 실린더에서는 무한히 많은 모드(mode)가 발생되며, 낮은 주파수와 높은 주파수에서는 각각 다른 모드의 형태로 진동을 하게 된다. 어떤 임의의 자극으로 인한 실린더의 진동을 최소화 하려면 어더미턴스를 이용하여 진동이 최소로 되는 주파수로서 실린더를 자극 하면 된다. 또한 실린더에서 자유운동으로 인한 Structure-Borne Sound를 알려면 어더미턴스의 역인 임피던스를 "0"으로 하는 파수(wavenumber)를 구하면 된다. 이 결과, 각 모드에서 z방향으로 향하는 자유파를 정확히 추측할 수가 있다.

본 논문에서는, 어더미턴스와 자유파수를 이론적으로 계산하였고, 이것의 물리적인 의미를 부가하였다.

Ⅱ. 실린더 운동방정식의 유도

그림 1은, 실린더 벽의 벽 두께가 얇고, 무한히 긴 실린더로 가정한다. 이 그림에서, z, φ 그리고 r은 실린더 좌표이고, u, v 그리고 w는 실린더 벽 두께의 중간선(h = 0)에서 z, φ 그리고 r방향의 변위이고, a는 실린더의 반경이다.

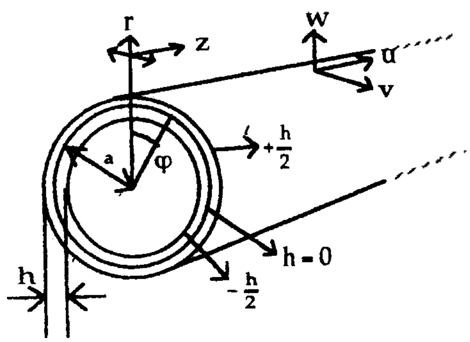


Fig. 1. System of coordinates for cylindrical shell(tube).

그림 1과 같은 실린더에서, 운동방정식은 다음과 같은 과정으로 유도된다.

1) 실린더 벽의 두께(h)의 중간선에서 각 방향의 변위를 구한다.
2) Taylor급수를 이용한 변위를 strain과 stress로 표현한다.
3) 위치에너지와 운동에너지를 실린더의 표면에 대해 적분함으로서 계산한다.
4) Hamilton원리를 이용하여, 에너지로 부터 실린더 운동방정식을 유도해 낸다.

이 과정에서 strain과 stress의 표현 방법으로, 여러가지 다른 형태의 실린더 운동방정식이 유도 된다. 이로 인하여 유도된 운동방정식은 오차가 발생한다. Leissa[1]는 이러한 여러 종류의 실린더 운동방정식을 비교하였다.

본 논문에서는, 위의 유도 과정에서 실린더 두께의 중간선(h = 0)에서 변위뿐만이 아니라 실린더 두께의 임의의 점에서 변위를 모두 고려하였다. 만약 이러한점을 고려치 않는다면, h = 0에서 변위만 고려하기 때문에 반지(ring)형태의 지지대를 갖는 실린더 형태의 원통관에서는 힘이 지지대를 통과하지 못할 것이다(Junger와 Feit는, 실린더 벽이 매우 얇다는 가정하에 h = 0에서 변위만 고려).

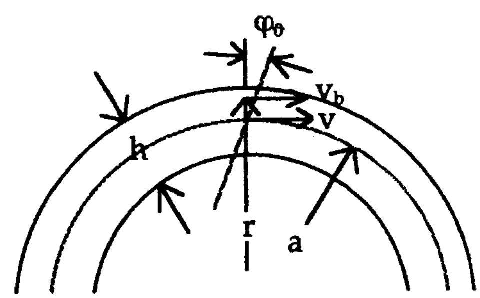


Fig. 2. φ directed displacement(v_b) at an arbitary interior point cylindrical wall.

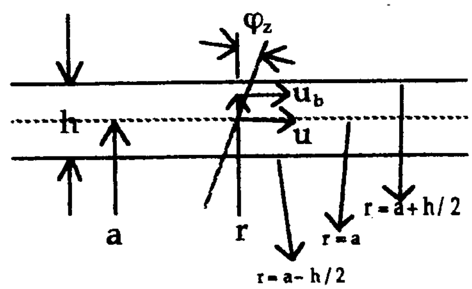


Fig. 3. z directed displacement(u_b) at an arbitary interior point cylindrical wall.

$$v_b = \frac{r}{a}\, v + (r-a)\, \varphi_v \quad (1)$$

$$u_b = u + (r-a)\, \varphi_z \quad (2)$$

$$w_h = w \tag{3}$$

그림 2와 그림 3에 보인것과 같이 실린더 벽사이의 임의의 점에서 각 방향의 변위를 식(1), (2) 그리고 (3)과 같이 가정하였다.

u_b, v_b 그리고 w_b는 실린더 벽 두께 h사이의 임의의 점에서 각 방향의 변위이다. 이 변위를 이용하여 새로운 실린더 운동방정식을 구하면 식(4), (5) 그리고 (6)과 같이 구할 수 있다(문헌[3], 부록 참조). 식 (1), (2) 그리고 (3)에서 $\varphi_v = -\partial w/a\partial_v$, $\varphi_z = -\partial w/\partial z$이다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z} + \frac{1-\mu}{2}\frac{1+\beta^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2\frac{1-\mu}{2}\right)\cdot \frac{1}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\varphi} + \frac{\mu}{a}\frac{\partial w}{\partial z} + (1-\mu)\frac{\beta^2}{a}\frac{\partial^3 w}{\partial z\partial\varphi^2} - \frac{1}{C_L^2}\ddot{u} = 0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\varphi} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi} - (1-\mu)\beta^2\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial z^2\partial\varphi} - \frac{1}{C_L^2}\left[(1+\beta^2)\ddot{v} - \beta^2\frac{\partial\ddot{w}}{\partial\varphi}\right] = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\mu}{a}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{(1-\mu)}{a}\beta^2\frac{\partial^3 u}{\partial z\partial\varphi^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi} - (1-\mu)\beta^2\frac{\partial^3 v}{\partial z^2\partial\varphi} + \frac{1+\beta^2}{a^2}w + \frac{\beta^2}{a^2}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4} + 2a^2\frac{\partial^4 w}{\partial z^2\partial\varphi^2} + a^4\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}\right] + 2\beta^2\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{C_L^2}\left[\ddot{w} - \beta^2\frac{\partial^2\ddot{w}}{\partial\varphi^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2\ddot{w}}{\partial z^2} + \beta^2\frac{\partial\ddot{v}}{\partial\varphi}\right] = \frac{(1-\mu^2)}{Eh}P_a \tag{6}$$

여기서, 첨자와 변수의 의미는 다음과 같다.

ω : 각 속도
μ : Poisson's ratio
a : 실린더 반경[m]
h : 실린더 관벽의 두께[m]
ρ_w : 실린더 재료의 밀도[kg/m^3]
C_L : 횡파의 속도[m/s]
E : Young's Modul[N/m^2]
j : 허수 단위
$\beta^2 = h^2/12a^2$

Ⅲ. Admittance

그림 1에서 보인 실린더 모델에서, $r=a$, $\varphi=0$ 그리고 $z=0$점에서 자극을 가하면, 실린더는 여러 모드들과 각 모드에 해당하는 진폭으로 진동하게 된다. 이러한 진동을 해석하기 위해 우선 입력 임피던스를 구해야 한다. 기계적인 임피던스는 식(7)과 같다.

$$\underline{z} = \frac{\underline{\hat{F}}}{\underline{\hat{v}}} \tag{7}$$

$\underline{\hat{F}}$는 자극한 힘의 phasor이고, $\underline{\hat{v}}$은 자극한 영역에서 자극의 결과로 나타나는 속도이다. 입력 임피던스는 힘과 속도의 비가 주파수를 포함하기 때문에 주파수의 복소함수로 나타난다. 자극으로는 자연현상을 매우 유용하게 해석할 수 있는 점자극(point excitation)을 이용하였다. 입력 임피던스의 계산을 위해 실린더 좌표 방향의 변위를 u, v 그리고 w를 다음과 같이 가정하였다.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(k_z)\cos n\varphi e^{-jk_z z} \tag{8}$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(k_z)\sin n\varphi e^{-jk_z z} \tag{9}$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(k_z)\cos n\varphi\ e^{-jk_z z} \tag{10}$$

그리고, 실린더 벽의 바깥쪽과 안쪽에서 자극으로 인한 입력의 차이를 다음과 같이 가정하였다.

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(k_z)\cos n\varphi e^{-jk_z z} \tag{11}$$

윗 식들은 자극으로 인해 발생되는 모드의 형태가 무한히 많음을 의미한다. 식(8), (9), (10) 그리고 (11)

에서 φ방향에 대해 cosinus함수와 sinus함수로 표현한 것은 φ방향의 접선에 대해 수직 방향으로 사구 한 것을 의미한다. 만약 임의의 방향에서 실린더 표면을 사각한나면 cosinus함수나 sinus함수 대신에 지수함수로 표현 해야만 할것이다. 식(8)~(10)에서 시간에 대해서는 고려하지 않았다. 시간에 대한 표현은 $e^{j\omega t}$를 각 가정해에 곱하고, 임의의 시간에 대한 해는 t에 대해 푸리에 변환을 하면된다. k_z는 z방향으로 향하는 파의 파수(wavenumber)이고, 파수는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$k_Z = \frac{\omega}{C_z} = \frac{2\pi}{\lambda_Z} \tag{12}$$

식(12)에서 ω는 각 주파수이고, C_z는 z방향으로 향하는 파의 속도, λ_z는 파의 파장이다. 그림 4에서는 각 모드와 파장을 보이고 있다. 식(8)~(10)에서 u, v 그리고 w은 각 방향의 변위이고, Un, Vn 그리고 Wn은 진폭이다. 식(8)~(11)을 식(4), (5) 그리고 (6)에 대입하면 각 모드와 k_z에 대한 선형방정식 식(13),

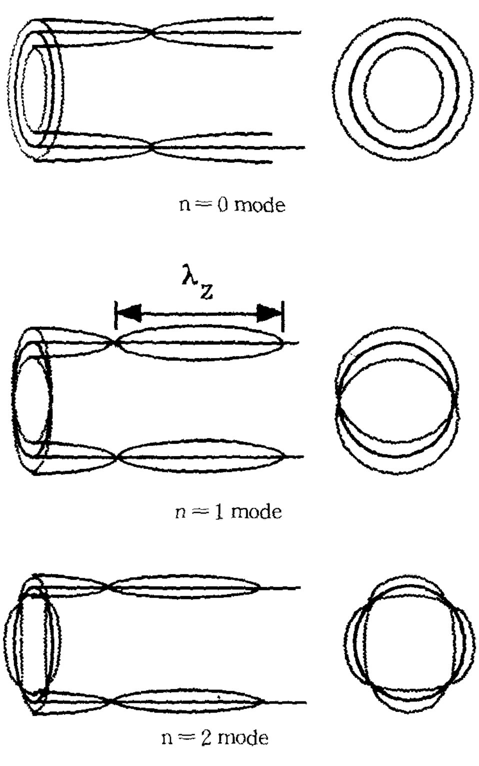


Fig. 4. Vibrationform by mode n = 0, 1, 2

(14) 그리고 (15)을 유도 할수가 있다. 여기서, $\nu=\omega a/C_L$이다.

$$\left\{-k_Z^2a^2-\frac{1-\mu}{2}n^2(1+\beta^2)+\nu^2\right\}U_n$$
$$+j\left\{-\left(\frac{1+\mu}{2}-\beta^2\frac{1-\mu}{2}\right)nk_Za\right\}V_n$$
$$+j\{-\mu k_Za+(1-\mu)\beta^2n^2k_Za\}W_n=0 \tag{13}$$

$$j\left\{\left(\frac{1+\mu}{2}-\beta^2\frac{1-\mu}{2}\right)nk_Za\right\}U_n$$
$$+\left\{-n^2-\frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2)k_Z^2a^2+(1+\beta^2)\nu^2\right\}V_n$$
$$+\{-n-(1-\mu)\beta^2nk_Z^2a^2+\beta^2n\nu^2\}W_n=0 \tag{14}$$

$$j\{-\mu k_Za+(1-\mu)\beta^2n^2k_Za\}U_n$$
$$+\{n+(1-\mu)\beta^2nk_Z^2a^2-\beta^2n\nu^2\}V_n$$
$$+\{(1+\beta^2)+\beta^2(n^4+2n^2k_Z^2a^2+k_Z^4a^4)$$
$$-2\beta^2n^2-2\beta^2\mu k_Z^2a^2+(-1-n^2\beta^2)\nu^2$$
$$-\beta^2\nu^2k_Z^2a^2\}W_n=\frac{(1-\mu^2)a^2}{Eh}P_{an} \tag{15}$$

식(13), (14) 그리고 (15)는 U_n, V_n 그리고 W_n에 대한 대각선으로 좌우 동형의 matrix로 표현할 수 있으며, Cramer법칙을 이용하여, P_n가 포함된 각 방향의 진폭을 식으로 표현할 수 있다. 입력 임피던스는 식(16)와 같이 표현 된다. 식(16)는 모드에 대한 입력 임피던스를 나타내며,

$$Z_{Tn}(k_Z)=\frac{P_{an}}{j\omega W_n}=\frac{\omega\rho h}{j\nu^2}\cdot\left[\frac{a_1(k_Z^2a^2)^4+a_2(k_Z^2a^2)^3+a_3(k_Z^2a^2)^2+a_4(k_Za^2)+a_5}{T_{m1}(k_Z^2a^2)^2+T_{m2}(k_Z^2a^2)+T_{m3}}\right] \tag{16}$$

여기서,

$a_1=-\beta^2A_m$

$a_2=(A_mF_m-B_m)\beta^2-A_mH_m-D_m^2-\beta^2C_m^2$

$a_3=B_mF_m\beta^2+(A_mF_m-B_m)H_m-A_mI_m$
$\quad -C_mG_mD_m-D_mC_mG_m-(E_m-D_mF_m)D_m$

$$-D_m E_m - C_m^2 H_m + A_m G_m^2$$

$$a_4 = B_m F_m H_m + (A_m F_m - B_m) I_m - 2C_m G_m E_m$$
$$+ E_m F_m D_m - (E_m - D_m F_m) E_m - C_m^2 I_m$$
$$+ B_m G_m^2$$

$$a_5 = B_m F_m I_m + E_m^2 F_m$$

$$T_{m1} = -C_m$$

$$T_{m2} = F_m A_m - B_m - C_m^2$$

$$T_{m3} = B_m F_m$$

$$A_m = -\frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2), \quad B_m = \nu^2(1+\beta^2) - n^2,$$

$$C_m = \left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2}\right)n, \quad D_m = -(1-\mu)\beta^2 n,$$

$$E_m = \nu^2\beta^2 n - n, \quad F_m = -\frac{1-\mu}{2}(1+\beta^2) + \nu^2$$

$$G_m = \mu - (1-\mu)\beta^2 n^2, \quad H_m = \beta^2(2n^2 - 2\mu - \nu^2),$$

$$I_m = (1+\beta^2) + \beta^2 n^4 - 2\beta^2 n^2 - \nu^2(1-\beta^2 n^2)$$ 이다.

식(7)과 같이 표현하려면, n에 대해 $-\infty$에서 $+\infty$까지 합하고, k_z에 대해서 적분하면 된다. 이것은 모든 부분파를 합하면 실린더 위의 임의의 점에서의 진동을 알 수 있다는 의미이다. 실린더 위의 점 $\varphi = 0$ 그리고 $z = 0$에서 어더미턴스는 식(17)과 같다.

$$\frac{v(0,0)}{F} = A = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{Z_{Tn}(k_z)} dk_z \quad (17)$$

여기서, α_n는 $\varepsilon_n/2\pi^2 a$이고, ε_n는 $n=0$ 일때 0.5이며, $n>0$일때 1이다. 그림 5는 식(17)의 계산 결과이다.

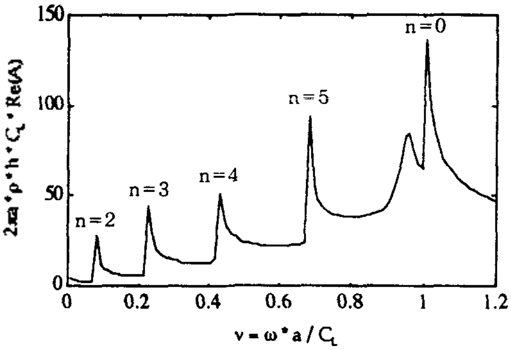


Fig. 5. Admittance.

그림 5에서 표시된 어더미턴스는 주파수에 따라 매우 민감하게 변하는 것을 알 수 있다. 식(17)에서 $Z_{Tn}(k_z)$가 "0"이 되는 점에서, 어드미턴스가 무한대가 됨을 알 수 있으나, 실제 자연 현상에서는 그러한 일이 일어나지 않는다. 계산 상에서는 k_z을 실수로 대입하여 적분을 행하지 않고 복소수를 대입하여 적분하였다. 이것은 복소수가 물리적으로 감쇠(damping)을 의미한다. 이로인해, 컴퓨터를 이용한 계산에서, over flow는 발생하지 않았다. 그림 5에서 주파수로는 ν을 사용하였다(식(12) 참조). 그림 5에서, ν가 "0" 근처에서는 실린더가 $n=1$ 모드로서 진동하는데, 이것은 실린더가 막대운동처럼 진동하는 것을 의미하고, $\nu=1$일때는 $n=0$ 모드로서 진동하며, 실린더가 쉼쉬는 형태로 진동함을 의미한다. $0<\nu<1$에서, 주파수에 따라, $n=2, 3, 4, 5$의 형태로 진동함을 의미한다(그림 4 참조).

Ⅳ. 자유 파수(Free Wavenumber)

자유파수는 실린더가 자유 운동을 할 때 파의 파수를 의미하며, 수식적으로는 임피던스가 "0"으로 될때 파의 파수이다.

식(16)의 자유파수는 식(18)에서 구할 수 있다. 식(18)에서 $k_z a$에 대해 8개의 해가 구해진다. $k_z^2 a^2$에 대한 두해의 의미는 자극점에서, +방향과 −방향으로 향하는 파를 의미하며, 나머지 4개의 해는 r방향으로 움직이면서 z방향으로 향하는 진행파 1개, φ방향으로 움직이면서(나사형태) z방향으로 진행하는 파 1개, z방향으로 움직이면서 z방향으로 진행하는 파 1개 그리고 자극점에서 감쇠하는 파 1개이다.

$$Z_{Tn}(k_z) = a_1(k_z^2 a^2)^4 + a_2(k_z^2 a^2)^3 + a_3(k_z^2 a^2)^2$$
$$+ a_4(k_z^2 a^2) + a_5 = 0 \quad (18)$$

그림 6, 7 그리고 8은 식(18)을 이용하여 각 모드에서 자유파수를 주파수에 대해 나타낸 그림이다. 그림 6, 7 그리고 8에서 $n=0$ 일때, ①은 관이 쉼쉬는 형태이고, $n=1$에서 ①은 관이 막대운동하는것을 나타내고 그리고 $n=2$ 이상 일때는 실린더가 굽힘운동하는 것을 나타내고 있다.

그림 6, 7 그리고 8에서 ②는 모든 n에 대해서 비틀림파이고, ③은 횡파를 의미한다. 그러나 높은 주파수에서는 파들의 분명한 구별은 없어진다.

그림 6, 7 그리고 8에서 상수값은 $h/a = 0.1$, $C_L = 5000m/s$ 그리고 $\rho_\omega = 8000kg/m^3$이다.

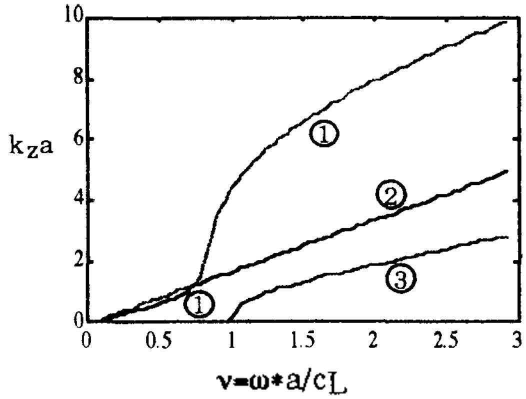


Fig. 6. Free wave number(n = 0).

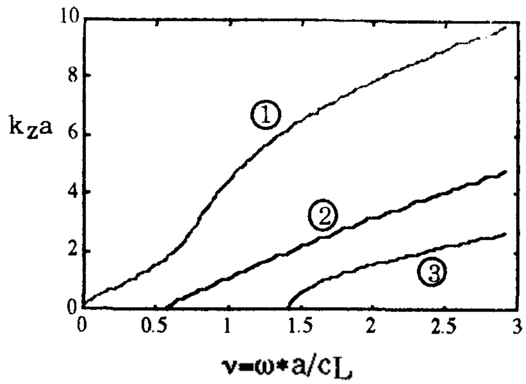


Fig. 7. Free wave number(n = 1).

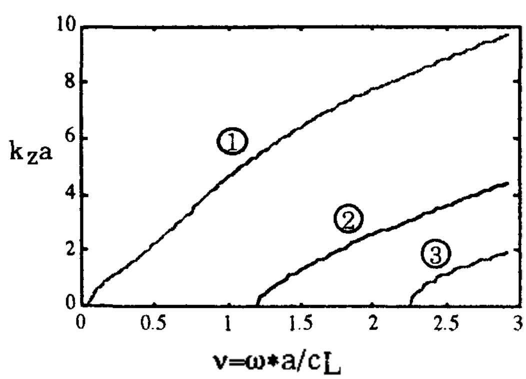


Fig. 8. Free wave number(n = 2).

V. 결 론

본 논문에서, 실린더에 Structure-Borne Sound의 음향학적인 문제를 다루었다.

실린더 형태의 구조는 여러 분야에서 유체나 기체의 통로로 사용된다. 또한 비행기나 잠수함은 실린더의 일차적인 근접 형태로 볼 수 있다.

음향학적인 측면의 해석을 위해 실린더에서 자극으로 인해 발생되는 파수와 임피던스는 중요하다. 파수와 임피던스의 계산을 위해 오차가 최소인 실린더 운동방정식이 필요하다.

본 논문에서는 지금까지 실린더의 벽이 얇다는 가정에 의해 단지 $h = 0$에서 변위만 고려한것을, 실린더 벽 사이 $+\frac{h}{2} \sim -\frac{h}{2}$에서 일어나는 변위를 모두 고려하여 새로운 실린더 운동방정식 유도하였다. 유도된 실린더 운동방정식으로써 실린더위에 지지대를 한 경우에도 에너지의 흐름을 계산할 수 있다.

또한, 각 방향의 가정해와 실린더 운동방정식을 이용하여 어더미턴스를 계산하였고, 자극으로 인한 실린더의 진동형태를 알 수 있었다. 계산 결과, 실린더는 낮은 주파수에서 실린더는 막대운동을 하고, 주파수가 상승해감에 따라 판운동과 실린더의 고유 진동으로 변함을 알 수 있었다. 특히 $\nu = 1(2\pi a = \lambda_z)$일때 $n = 0$의 모드형태로 진동함을 알 수 있었다. 그외 특정한 주파수에서는 특이한 모드형태를 갖고 진동함을 알 수 있었다.

어더미턴스를 이용하여 자유파수를 계산하였고, z 방향으로 향하는 파는 주파수와 모드에 따라 1, 2 혹은 3개의 파가 진행하고, 각 모드에서 각 방향으로 향하는 파는 어떤 주파수에서 시작되는가를 알 수 있었다.

이러한 결과들이 실린더 형태의 원통관을 사용하는 산업체의 기술자들에게 좋은 자료가 되기를 바란다.

참 고 문 헌

1. A. N. Leissa, "Vibration of Shells," NASA, SP-288.
2. M. C. Junger and Feit D., "Sound, Structures, and Their Interaction," 2th edition, pp. 231-253.
3. M. Cremer M. Heckl and E. E. Ungar, "Structur-Borne Sound," Springer Verlag Berlin 1988.
4. G. Pavic, "The Influence of Curvature on Structure-Borne Acoustical Power Propagation in a Cylindrical Circular Shell," ICA, vol.12, D6-6, TORONTO.

5. 조형국, 김정국, "z방향의 에너지 흐름을 위한 실린더 운동 방정식 유도," 한국음향학회 학술논문발표회 논문집, Vol.12, No.1(s), 1993.

부록(실린더 운동방정식 유도 과정)

그림1과 같은 실린더에서, 실린더 운동방정식의 일반적인 장에 관한 식의 3방향의 normal stress는 다음과 같다[3].

$$\sigma_\varphi=\frac{2-2\mu}{1-2\mu}G\left(\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{2\mu}{1-2\mu}G\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2\mu}{1-2\mu}G\frac{\partial u}{\partial z} \tag{A.1}$$

$$\sigma_r=\frac{2\mu}{1-2\mu}G\left(\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{2-2\mu}{1-2\mu}G\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2\mu}{1-2\mu}G\frac{\partial u}{\partial z} \tag{A.2}$$

$$\sigma_z=\frac{2\mu}{1-2\mu}G\left(\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{2\mu}{1-2\mu}G\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2-2\mu}{1-2\mu}G\frac{\partial u}{\partial z} \tag{A.3}$$

그리고, shear stress는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{r\varphi}=G\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) \tag{A.4}$$

$$\sigma_{rz}=G\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{A.5}$$

$$\sigma_{z\varphi}=G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) \tag{A.6}$$

위의 식들로 고찰하려는 실린더 모델에 적용하기 위해 경계 조건을 r방향의 $\sigma_r=0$이라 놓으면, 식(A.2)는 식(A.7)로 쓸수 있다.

$$\frac{2\mu}{1-2\mu}\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{2\mu^2}{1-\mu}\frac{1}{1-2\mu}\left(\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{A.7}$$

식(A.7)을 식(A.1)~(A.6)에 대입하면, 경계 조건에 의한 각 stress가 구해진다. 예로서 식(A.7)을 식(A.1)에 대입하면 식(A.8)과 같이 유도되고, 같은 방법으로 식(A.9)~(A.13)가 유도 된다.

$$\sigma_\varphi=G\left\{\left(\frac{2-2\mu}{1-2\mu}-\frac{2\mu^2}{1-\mu}\frac{1}{1-2\mu}\right)\left(\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\left(\frac{2\mu}{1-2\mu}-\frac{2\mu^2}{1-2\mu}\frac{1}{1-\mu}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$=G\left\{\frac{2}{1-\mu}\left(\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{2\mu}{1-\mu}\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$=\frac{E}{1-\mu^2}\left\{\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right\} \tag{A.8}$$

여기서, $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$ 이다.

$$\sigma_\varphi=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\frac{w}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi+\mu\varepsilon_z) \tag{A.9}$$

$$\sigma_z=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\mu\left(\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z) \tag{A.10}$$

$$\sigma_{r\varphi}=G\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)=G\varepsilon_{r\varphi} \tag{A.11}$$

$$\sigma_{rz}=G\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=G\varepsilon_{rz} \tag{A.12}$$

$$\sigma_{z\varphi}=G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)=G\varepsilon_{r\varphi} \tag{A.13}$$

식 (A.9)~(A.13)에서 식 (4), (5) 그리고(6)을 대입하면 식 (A.14)~(A.18)과 같이 변형 된다.

$$\varepsilon_\varphi=\frac{w_b}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_b}{\partial\varphi}=\frac{w}{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{r}{a}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+(r-a)\frac{\partial\varphi_v}{\partial\varphi}\right] \tag{A.14}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial u_b}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+(r-a)\frac{\partial\varphi_z}{\partial z} \tag{A.15}$$

$$\varepsilon_{r\varphi}=\frac{a}{r}\varphi_v+\frac{1}{r}\frac{\partial w_b}{\partial\varphi} \tag{A.16}$$

$$\varepsilon_{rz}=\varphi_z+\frac{\partial w_b}{\partial z} \tag{A.17}$$

$$\varepsilon_{z\varphi}=\frac{r}{a}\frac{\partial v}{\partial z}+(r-a)\frac{\partial\varphi_v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{r-a}{r}\frac{\partial\varphi_z}{\partial\varphi} \tag{A.18}$$

고찰하는 실린더에서는 벽면이 매우 얇기 때문에 r방향의 미소 변화는 없다고 하면 $\dfrac{\partial}{\partial r}=0$이며, 위의 식

들에서 다음항을 "0"으로 하였다.

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial \varphi_v}{\partial r}=\frac{\partial \varphi_z}{\partial r}=0 \tag{A.19}$$

식 (A.19)을 식 (A.14)~(A.18)에 적용하고, $v=v_v$ 라고 두면, 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)w+\frac{x}{a}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{x}{a}\frac{\partial \varphi_v}{\partial \varphi} \tag{A.20}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial u}{\partial z}+x\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \tag{A.21}$$

$$\varepsilon_{r\varphi}=\left(1-\frac{x}{a}\right)\varphi_v+\frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{\partial w}{\partial \varphi} \tag{A.22}$$

$$\varepsilon_{rz}=\varphi_z+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{A.23}$$

$$\varepsilon_{z\varphi}=\left(1+\frac{x}{a}\right)\frac{\partial v_v}{\partial z}+x\frac{\varphi_v}{\partial z}+\frac{1}{a}$$

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{x}{a}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \varphi} \tag{A.24}$$

식(A.9)~(A.13)과 식(A.20)~(A.24)을 이용하여 위치 에너지를 구하는 과정은 다음과 같다. 우선 위치 에너지 구하는 식은 식 (A.25)이다.

$$E_{pot}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma\varepsilon\, dr$$

$$\frac{2}{h}E_{pot}=\frac{1}{h}\int(\sigma_\varphi\varepsilon_\varphi+\sigma_z\varepsilon_z+\sigma_{r\varphi}\varepsilon_{r\varphi}+\sigma_{rz}\varepsilon_{rz}+\sigma_{z\varphi}\varepsilon_{z\varphi})dr$$

$$\frac{2}{h}E_{pot}=\frac{1}{h}\int\Big[\bar{E}(\varepsilon_\varphi^2+\varepsilon_z^2+2\mu\varepsilon_\varphi\varepsilon_z)$$

$$+G(\varepsilon_{rz}^2+\varepsilon_{r\varphi}^2+\varepsilon_{z\varphi}^2)\Big]dr \tag{A.25}$$

식(A.25)에서는 각 적분 항을 쉽게 풀이하기 위하여 변형을 하였으며, $\bar{E}=\dfrac{E}{1-\mu^2}$ 이다. x에 관한 적분은 식 (A.26)과 같다.

$$\frac{1}{h}\int\varepsilon_z^2\,dr=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+I\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\right)^2 \tag{A.26}$$

식 (A.25)의 각 항들의 전개식은 식 (A.27)~(A.32)과 같다.

$$\frac{1}{h}\int\varepsilon_{r\varphi}^2 dr=(1+\beta^2)\varphi_v^2+\frac{1}{a^2}(1+\beta^2)\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+\frac{2}{a}\varphi_v\frac{\partial w}{\partial \varphi}+\frac{2}{a}\beta^2\varphi_v\frac{\partial w}{\partial \varphi} \tag{A.27}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x\,dr=0\quad\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x^2\,dr=\frac{h^2}{12} \tag{A.28}$$

$$\frac{1}{h}\int\varepsilon_z\varepsilon_\varphi\,dr=\frac{1}{a}w\frac{\partial u}{\partial z}-\beta^2 w\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$$

$$+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v_v}{\partial \varphi}+\frac{I}{a}\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\frac{\partial \varphi_v}{\partial \varphi} \tag{A.29}$$

$$\frac{1}{h}\int\varepsilon_\varphi^2\,dr=\frac{1}{a^2}(1+\beta^2)w^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial v_v}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+\beta^2\left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{2}{a^2}w\frac{\partial v_v}{\partial \varphi}-\frac{2\beta^2}{a}w\frac{\partial \varphi_v}{\partial \varphi} \tag{A.30}$$

$$\frac{1}{h}\int\varepsilon_{rz}^2\,dr=\varphi_z^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\varphi_z\frac{\partial w}{\partial z} \tag{A.31}$$

$$\frac{1}{h}\int\varepsilon_{z\varphi}^2\,dr=(1+\beta^2)\left(\frac{\partial v_v}{\partial z}\right)^2+I\left(\frac{\partial v_v}{\partial z}\right)^2$$

$$+\frac{1}{a^2}(1+\beta^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+\frac{2I}{a}\frac{\partial v_v}{\partial z}\frac{\partial \varphi_v}{\partial z}+\frac{2}{a}\frac{\partial v_v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{2}{a}\beta^2\frac{\partial v_v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$+2\beta^2\frac{\partial v_v}{\partial z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \varphi}-\frac{2I}{a^2}\frac{\partial \varphi_v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$+\frac{2I}{a}\frac{\partial \varphi_v}{\partial z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \varphi}-\frac{2}{a}\beta^2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \varphi} \tag{A.32}$$

식 (A.27)~(A.32)을 식(A.25)에 대입하면 식 (A.33)과 같다.

$$\frac{2E_{pot}}{h}=\bar{E}\Big[\frac{1}{a^2}(1+\beta^2)w^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial v_v}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+\beta^2\left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{2}{a^2}w\frac{\partial v_v}{\partial \varphi}-\frac{2}{a}\beta^2 w\frac{\partial \varphi_v}{\partial \varphi}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+I\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\right)^2$$

$$+2\mu\Big(\frac{1}{a}w\frac{\partial u}{\partial z}-\beta^2 w\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v_v}{\partial \varphi}$$

$$+\frac{1}{a}\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\frac{\partial v_v}{\partial \varphi}\Big)$$

$$+G(1+\beta^2)\varphi_v^2+\frac{1}{a^2}(1+\beta^2)\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+\frac{2}{a}(1+\beta^2)\varphi_z\frac{\partial w}{\partial \varphi}+\varphi_z^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\varphi_z\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$+(1+\beta^2)\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2+I\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{a}(1+\beta^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+\beta^2\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{2I}{a}\frac{\partial v_r}{\partial z}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}$$

$$+\frac{2}{a}(1-\beta^2)\frac{\partial v_r}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+2\beta^2\frac{\partial v_r}{\partial z}\frac{\partial \varphi z}{\partial \varphi}$$

$$-2\beta^2\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{2I}{a}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \varphi}-\frac{2}{a}\beta^2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \varphi} \tag{A.33}$$

운동 에너지를 구하기 식 (1), (2) 그리고 (3)을 식 (A.34)에 대입하면 식 (A.35)와 같이 된다.

$$E_{kin}=\frac{1}{2}\rho_w\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\dot{u}_b^2+\dot{v}_b^2+\dot{w}_b^2)dx \tag{A.34}$$

$$\delta\int_{t2}^{t1}(E_{kin}-E_{pot})dt+\int_{t2}^{t1}\delta E_a\,dt=0 \tag{A.35}$$

$$\frac{2}{h}E_{kin}=\frac{\rho_w}{h}\int(\dot{u}_b^2+\dot{v}_b^2+\dot{w}_b^2)dx$$

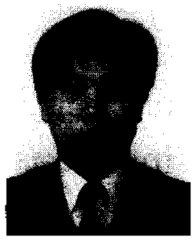
$$=\rho_w\left[(1+\beta^2)\dot{v}_r^2+I\dot{\varphi}_r^2+\frac{2}{a}I\dot{v}_r\dot{\varphi}_r+\dot{w}^2+\dot{u}^2+I\dot{\varphi}_z^2\right] \tag{A.36}$$

위치에너지, 식 (A.33)와 운동에너지, 식(A.34)를 구하여 식 (A.35)에 대입하면 Pa(외부로부터의 가해진 힘)가 적용된 긴 식이 유도된다. 유도된 식을 각 변수에 대해 Hamilton의 원리를 적용하면 5개의 식이 유도되며, 이 유도된 식으로부터 실린더 운동방정식을 구하면 식 (4), (5) 그리고 (6)이다.

▲이 채 봉(Chai-Bong Lee) 1960년 2월 2일생

1985년 2월 : 동아대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1988년 3월 : 일본 동북대학 대학원 전기통신 전공 졸업(공학석사)
1992년 3월 : 일본 동북대학 대학원 전기통신 전공 졸업(공학박사)
~현재 : 동서 공과대학교 전자정보통신학부 정보통신공학전공

▲조 형 국(Heung-Kuk Jo) 1955년 12월 2일생



1973년 3월~1977년 2월 : 동아대학교 전자공학과 공학사
1977년 3월~1979년 2월 : 동아대학교 전자공학과 공학석사
1984년 10월~1990년 12월 : 베르린공과대학 음향공학과 공학박사
1980년 4월~1980년 10월 : 군복무
1981년 1월~1984년 2월 : 동의공업전문대학 강사
1984년 7월~1990년 8월 : 베르린공과대학 음향공학연구소 연구원
1990년 12월~1993년 2월 : 삼성전자 종합 연구소 선임연구원
1993년 2월~현재 : 동서공과대학교 전자정보통신학부 전자공학전공 선임강사

▲김 정 국(Jeong-Kuk Kim) 1953년 2월 5일생

1969년 3월~1973년 2월 : 동아대학교 전자공학과 공학사
1977년 3월~1979년 2월 : 동아대학교 전자공학과 공학석사
1980년 3월~1984년 2월 : 동아대학교 전자공학과 박사과정수료
1986년 10월~1987년 10월 : 신호대학 디지탈신호처리 연구생
1987년 10월~1991년 10월 : 신호대학 디지탈신호처리 공학박사
1973년 3월~1975년 6월 : 7290부대(ROTC 11기) 통신과장
1975년 9월~1978년 2월 : 대양공업고등학교 교사
1978년 3월~1992년 2월 : 경남 전문대학 전자과 부교수
1992년 3월~현재 : 동서공과대학 전자정보통신학부 전자공학전공 조교수