

IR CAT Scan 개발을 위한 기하학적 역 열전도 문제의 경계요소 해법

최창용, 박천태, 김태한, 한기남, 최순호
 한국원자력연구소

요약 IR CAT Scan 개발을 위한 기하학적 역 열전도 문제의 해를 경계요소법 및 정규화 과정을 사용하여 구하였다. 이 문제에서는 잉여기술된 온도조건이 적외선 스캐닝에 의해 표면에 주어지며, 이 조건은 다른 조건과 함께 미지경계의 위치를 계산하는데 사용되었다. 문제의 해를 구하기 위해 보조문제가 도입되었고, 이 보조문제의 영역에 대한 가상적인 내부경계를 정의함으로써 공동(cavity)이 영역 내부에 위치하게 되며, 포텐셜 문제의 해를 구하여 그 위치를 결정하였다. 이 문제의 해를 구하기 위해 경계요소법이 정규화 과정과 함께 사용되었으며, 수치해석을 통하여 역 해법에 대한 정규화 효과를 분석하였다.

1. 서론

정상 상태에서의 고전적인 열전도 문제는 물체의 기하학적 구조(geometry), 지배 방정식, 그리고 경계조건이 완전히 주어졌을 때 가열된 물체 내부의 온도분포를 구하는 것이다. 그러나 일부분의 경계조건 또는 기하학적 구조가 알려져 있지 않고 추가적인 정보로부터 이들을 결정해야 할 경우는 역 열전도 문제가 된다. 이 논문은 물체의 기하학적 구조의 일부가 알려져 있지 않는 역 열전도 문제에 대한 것이다. 잉여기술된 경계조건이 주어지고, 이 조건이 다른 조건과 함께 사용되어 미지의 경계위치를 결정하였다. 이 문제는 물체의 표면 온도를 스캐닝하여 가열된 물체내부의 공동(cavity) 또는 결함(flaw)을 탐지하는 비파괴검사 방법인 IR CAT (infrared computerized-axial tomography) Scan을 개발하는데 직접 적용된다

IR CAT Scan은 여러 단계를 거쳐 개발되어 왔다. 초기단계에서는 template matching에 의한 패턴 인식 방법¹⁾이 사용되었으며, 그 이후 IR CAT Scan이 물체의 부분적 미지의 기하학적 구조(partially

unknown geometry)를 갖는 역 열전도 문제의 해에 근거하여 개발될 수 있다는 사실로부터 큰 진전을 이루었다. 규칙적 형상의 물체(regular-shape body) 내부에 있는 규칙적 형상의 공동(regular-shape cavity) 위치를 구하는 수치적 방법과 해석적 방법^{2,3)}이 개발되었으며, 또한 이 물체내 불규칙 형상의 공동(irregular-shape cavity) 위치를 탐지하는 방법⁴⁾도 개발되었다. 이러한 방법들은 적외선 스캐너를 이용한 실험^{5,6)}에 의해 성공적으로 검증되었다. 한편 불규칙 형상의 물체내부에 있는 불규칙 형상의 공동 위치를 탐지하는 일반적인 방법으로서 경계요소법(boundary element method)을 사용하는 방법이 저자 등⁷⁾에 의해 연구되었으며, 이 연구에서는 열전달의 세가지 경계조건, 즉 Dirichlet, Neumann 또는 Robin 조건이 미지경계인 공동에 주어졌을 경우에 대해서 방법의 정확도 및 장단점 등이 논의되었다. 그러나 역 열전도 문제가 갖는 수학적 부적절 상태(ill-posed)로 인한 경계요소 해의 불안정성에 대해서는 논의되지 않았다. 한편 최근에는 Kassab 등⁸⁾이 경계요소 해법을 반복적으로 적용, 변수의 잉여 값을 최소화함으로써 공동의 위치를 탐지하였다.

본 연구에서는 경계요소법⁹⁾을 Tikhonov의 정규화 방법(regularization method)¹⁰⁾과 함께 사용하였다. 형성된 경계요소 해의 행렬 $AX=B$ 는 Hadamard 정의에 따른 부적절 상태^{10,11)}가 된다. 그러므로 미지값 X 를 직접 구하게 되면 구해진 경계값들은 심한 불규칙성을 나타내게 되며, 이는 또한 특정조건에서 부적절한 영역의 해를 가져다 준다. 안정적인 해를 얻기위해 수치적 정규화 과정을 도입하였으며, 불규칙 형상의 물체내부에 Dirichlet, Neumann, 또는 Robin 조건이 주어져 있는 불규칙 형상의 공동 위치를 탐지하는데 적용하였다. 마지막으로 이 해법을 여러가지 정규화 계수값에 대한 탐지 정확도에 대해 수치적으로 시험하였다.

2. 이론

Fig. 1(a)에 표시된 물체를 대상으로 외부경계 Γ_a 에 대해서는 Robin 조건이 주어지고, 반면에 내부(공동) 경계 Γ_c 에 대해서는 Dirichlet, Neumann 또는 Robin 조건이 주어진다. 내부경계의 위치는 알려져 있지 않다. 그러나 이 경계의 위치는 내부경계에 주어진 특정조건에 대한 사전 정보와 표면 Γ_a 에 대한 적외선 스캐닝을 통하여 얻을 수 있는 온도조건을 이용하여 결정된다. 문제는 다음과 같이 2 차원 공간으로 공식화된다.

지배방정식:

$$\nabla^2 T(x, y) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

Γ_a 에 대한 경계조건:

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} + h_a(x, y) T(x, y) = h_a(x, y) \bar{T}_e(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_a \dots\dots\dots(2)$$

$$T(x, y) = \bar{T}_a(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_a \text{ (overspecified condition)} \dots\dots\dots(3)$$

Γ_c 에 대한 경계조건:

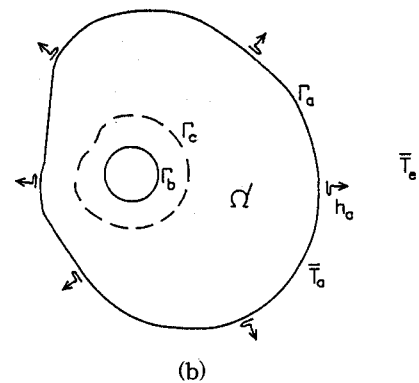
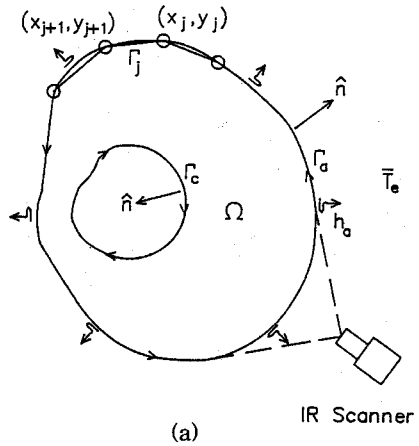


Fig. 1. Investigated system and related auxiliary problem.

$$T(x, y) = \bar{T}_c(x, y), \quad q(x, y) = \bar{q}_c(x, y), \text{ 또는 } k \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} + h_c(x, y) T(x, y) = h_c(x, y) \bar{T}_f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_c \dots\dots\dots(4)$$

위 식(1)-(4)들은 미지경계 Γ_c 의 위치를 구하는데 사용된다. 이 식들에서 T, k, q 그리고 h 는 온도, 열전도도, 열유속, 그리고 대류열전달계수를 각각 나타낸다. T 와 q 위의 (-)표시는 주어진 온도 및 열유속을 나타내고, \bar{T}_e 와 \bar{T}_f 는 대류에 의해 표면과 열교환을 하는 주어진 대기 온도를 나타낸다. 특히 식(3)에서 $\bar{T}_a(x, y)$ 는 표면 Γ_a 에 대한 적외선 스캐닝으로 주어질 수 있는 온도조건이며, 식(4)에서 $\bar{T}_c(x, y)$ 와 $\bar{q}_c(x, y)$ 는 경계 Γ_c 에 주어질 수 있는

조건중의 한가지 즉 온도가 주어질 경우(Dirichlet condition) 또는 열유속이 주어질 경우(Neumann condition)를 각각 의미한다. 온도 T 의 편미분은 Fig. 1(a)에 나타낸 바와 같이 바깥으로 향하는 법선을 따라 수행된다.

3. 해법

부분적 미지의 기하학적 구조를 갖는 역 열전도 문제를 푸는데 사용된 방법은 저자 등⁷⁾에 의해 이미 개발된 영역 확장법(domain-extension method)을 따른다. Fig. 1(a)에 나타낸 물체에 대해서 영역의 내부경계가 Γ_b 로 이동된 보조문제가 도입된다(Fig. 1(b) 참조). 따라서 실제의 공동은 보조문제 영역 Ω 내부에 위치하게 된다. 여기서 Γ_a 에 대한 조건들은 Γ_b 에 대한 가상적인 조건들을 결정하는데 이용되며, 경계요소법은 경계에서의 온도와 열유속이 완전히 결정된 후 내부점들의 온도와 열유속을 결정하는데 매우 적합하기 때문에 실제의 공동 위치 Γ_c 는 보조문제 영역 Ω 내부에서 공동에 가해진 특정조건을 만족하는 점들을 찾음으로써 구해될 수 있다. Γ_b 로서 작은 원이 가정되어 사용되고, 보조문제의 해는 Γ_c 의 위치를 예측하기 위해 정규화 과정을 이용하여 구해진다.

상기한 방법은 열역학 제 1 법칙에 의해 제안되었다. 열전달 관점에서 보면, Γ_c 에 대한 조건은 Γ_a 에 인접해 있는 또 다른 경계 Γ_b 에 열을 가함으로써 (혹은 제거함으로써) 구해될 수 있는데 이때 Γ_b 는 원래 영역의 확장부에 대한 경계가 된다. 따라서 Γ_c 에서의 실제조건이 문제의 해에서 바뀌지 않는 한 사실상 경계를 옮기거나 혹은 심지어 경계조건을 교환하는 것이 가능해진다¹²⁾. 그러나 정규화 방법을 사용하지 않으면 본 문제의 수학적 부적절 상태 특성으로 인하여 경계 Γ_b 와 영역 Ω 에서 계산된 온도들은 불안정해질 것임을 유의해야 한다.

4. 경계 요소 절점식의 유도과 정규화 과정

보조문제는 지배방정식 (1)을 사용하여 해가 구해진다. 다음의 경계조건이 일반성을 위해 적용된다.

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} + h_a(x, y) T(x, y) = h_a(x, y) T_e(x, y), (x, y) \in \Gamma_a \dots\dots\dots(5)$$

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} + h_b(x, y) T(x, y) = h_b(x, y) T_g(x, y), (x, y) \in \Gamma_b \dots\dots\dots(6)$$

이 식들은 좌변의 k 또는 h 를 0으로 놓음으로써 아홉가지의 서로 다른 조합의 경계조건을 나타낼 수 있다.

경계요소법의 일반적인 유도과정에 따라 지배방정식 (1)과 경계조건 (5), (6)이 T^* 로 가중(weight)되었고 그 결과는 다음과 같이 조합된다.

$$\int_{\Omega} T^* k \nabla^2 T \, d\Omega = \int_{\Gamma_a} T^* \left[k \frac{\partial T}{\partial n} + h_a(T - T_e) \right] \, d\Gamma + \int_{\Gamma_b} T^* \left[k \frac{\partial T}{\partial n} + h_b(T - T_g) \right] \, d\Gamma \dots\dots\dots(7)$$

그리고 편미분에 관련된 항의 부분 적분을 수행하여 다음과 같이 유도된다.

$$- \int_{\Gamma} T k \frac{\partial T^*}{\partial n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} k T \nabla^2 T^* \, d\Omega = \int_{\Gamma} h(T - T_h) T^* \, d\Gamma \dots\dots\dots(8)$$

여기서 $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$ 이며, 예상되듯이 $\Gamma = \Gamma_a$, $h = h_a$ 이고 $T_h = T_e$ 이다.

T^* 를 다음식의 해로 놓음으로써 (8)식의 면적분 $\int_{\Omega} k T \nabla^2 T^* \, d\Omega$ 를 국소온도 T_i 로 바꿀 수 있다.

$$\nabla^2 T^* + \Delta_i = 0 \dots\dots\dots(9)$$

여기서 Δ_i 는 Dirac delta 함수를 나타낸다. 따라서, 식(8)은 다음과 같이 표시된다.

$$k T_i = \int_{\Gamma} T q^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} q T^* \, d\Gamma \dots\dots\dots(10)$$

여기서

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \text{ 이고, } q^* = -k \frac{\partial T^*}{\partial n} \dots\dots(11)$$

이다. 식(10)은 Green's third identity이며 이것은 식(5)와 (6)에서 주어진 일반조건을 사용하여 유도된다.

식(10)은 내부 지점의 온도를 구하는데 있어서만 유효함을 알 수 있다. 경계요소법으로 전개시키기 위하여는 경계 Γ 가 Fig. 1(a)의 요소(element)로 나뉘어지고 점 i 가 경계상의 절점(node)으로 이동되어야 한다. 결과적으로 경계적분식(boundary integral equation)은 다음과 같은 식으로 유도된다.

$$C_i k T_i = \int_{\Gamma} T q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q T^* d\Gamma \dots\dots(12)$$

여기서

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{for } x_i \in \Omega \\ \frac{\theta}{2\pi} & \text{for } x_i \in \Gamma \end{cases} \dots\dots(13)$$

이며, 또한 θ 는 x_i 의 양쪽에 있는 Γ 에 대한 접선 사이의 각이다.

본 연구에서 관심이 있는 2차원 영역에 대하여, 식 (9)를 사용하여 T^* 와 q^* 를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$T^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad q^* = \frac{k}{2\pi r} \nabla r \cdot \hat{n} \dots\dots(14)$$

여기서 r 은 점 x_i 와 x 사이의 거리를 나타낸다.

본 논문에서 주어진 적분식 (12)의 수치해에 있어서, 적분항에 포함되어 있는 T 와 q 는 선형함수를 사용하여 모델링되었다. 일반적 적분은 다음과 같다.

$$\int_{\Gamma} T q^* d\Gamma \text{ 또는 } \int_{\Gamma} q T^* d\Gamma = \int_{\Gamma} U V^* d\Gamma \dots\dots(15)$$

여기서

$$U(t) = \phi_1(t) U_j + \phi_2(t) U_{j+1} \dots\dots(16)$$

이고

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}(1+t), \quad -1 \leq t \leq 1 \dots\dots(17)$$

이다. 이 식에서 t 는 다음과 같이 요소의 위치 Γ , 길이 l 과 관계된 변수이다.

$$\Gamma = \frac{l}{2}(t+1) \dots\dots(18)$$

식(16)의 U_j 는 절점 j 에서의 U 값을 나타내고, U_{j+1} 는 절점 $j+1$ 에서의 값을 나타냄을 알 수 있다. 식(15)에 식(16)을 대입하여 다음을 얻는다.

$$\int_{\Gamma} U V^* d\Gamma = U_j \hat{V}_{ij}^j + U_{j+1} \hat{V}_{ij}^{j+1} \dots\dots(19)$$

여기서

$$\hat{V}_{ij}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_1 V^* d\Gamma \text{ 이고, } \hat{V}_{ij}^{j+1} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 V^* d\Gamma \dots\dots(20)$$

이다. 식(20)에 내포된 물리적 의미를 쉽게 설명하면, \hat{V} 의 첫번째 아래첨자는 온도가 계산된 지점의 특정위치를 나타내며, \hat{V} 의 두번째 아래첨자는 contour 적분이 수행된 경계요소를 나타낸다. 위첨자 j 와 $j+1$ 은 기초함수 ϕ_1 와 ϕ_2 를 각각 나타내며, 이것들로 V^* 함수는 식(20)의 적분에 가중된다. 이러한 기호법으로 경계절점식(boundary nodal equation)이 간결한 형태로 구성될 수 있고 식의 각 항들에 대한 오류를 쉽게 점검할 수 있다.

경계 $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$ 는 N 개의 요소들로 나뉘어질 수 있다.

$$\int_{\Gamma} U V^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} U V^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N [\hat{V}_{ij}^{j(j-1)} + \hat{V}_{ij}^j] U_j \dots\dots(21)$$

여기서 $\hat{V}_{ij}^b = \hat{V}_{ij}^a$ 이다. 식(12)에 식(21)을 도입하고 그 결과를 정리하면 다음과 같은 일반식이 도출된다.

$$\sum_{j=1}^N [\hat{q}_{ij(j-1)} + \hat{q}_{ij}^j]$$

$$[\hat{T}_{k(j-1)}^i + \hat{T}_{ij}^j] h_j - \delta_{ij} C_i k \} T_j$$

$$= \sum_{j=1}^N [\hat{T}_{k(j-1)}^i + \hat{T}_{ij}^j] q_j \dots\dots\dots(22)$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker delta이다.

이 식의 T_j, q_j 와 h_j 를 Table 1에 표현된 값으로 나타낸다면 경계에 주어지는 어떠한 조건에도 식(22)를 사용할 수 있다. 예를 들어, 절점 j에서의 온도가 주어지면 이 지점에서의 T_j 는 \bar{T}_j 가 되며, q_j 는 미지수이고 h_j 는 0이 될 것이다. 특이한 것은 j 지점에 Robin 조건이 주어졌을 때 q_j 는 $-h \bar{T}_h$ 로 되는 것이다. 따라서 Table 1과 함께 식(22)를 사용하면 Ω 의 영역내에 있는 지점에 대한 어떠한 절점 식도 세울 수 있다. 실제적으로 식(22)는 미지수를 구하기 위한 행렬식을 구성하는데 사용된다. 식(1)-(4)에서 주어진 역 열전도 문제에 대해, T_j 와 q_j 는 Γ_a 에 모두 명시되었고, 반면에 Γ_b 상의 T_j 와 q_j 는 미지수이다. Γ_a 와 Γ_b 를 각 절점의 갯수 M' 과 M 의 요소수(number of elements)로 나누면, 식(22)는 Γ_b 상의 $2M$ 개 미지수를 갖는 $(M'+M)$ 개의 선형 식 계(system of equations)를 구성하게 된다. 벡터 X 로 미지수를 재정리하면 다음과 같은 식이 도출된다.

$$AX = B \dots\dots\dots(23)$$

여기서 A 는 계수행렬, X 는 미지의 벡터 그리고 B 는 우변으로 정리되는 값을 각각 나타낸다. 행렬 A 의 차원은 $((M' + M), 2M)$ 이며, $M' \geq M$ 을 가정하면 식(23)에 대한 근사해를 구할 수 있다.

식(23)의 해를 구하는 고전적 방법으로는 아래 잉여값(residual)의 euclidean norm을 최소화하는 X 를 찾는 것이다.

$$r = |AX - B|^2 \dots\dots\dots(24)$$

least square problem의 일반식(normal equation)을 사용하면 해는 다음과 같다.

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B \dots\dots\dots(25)$$

그러나 이 문제는 부적절 상태이므로 식(25)로 X 를 구하면 $M'=M$ 인 경우를 포함해서 매우 불규칙적인 해를 얻게 된다. 그러므로 만족할만한 결과를 얻기 위해서는 다음과 같은 정규화 과정이 도입된다.

$$\min [|AX - B|^2 + \mu |RX|^2] \dots\dots\dots(26)$$

여기서 행렬 R 은 정규화도(order of regularization)를 나타내며 계수 μ 는 그 크기를 결정한다. 그러면 식(26)의 explicit 해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X = (A^T A + \mu R^T R)^{-1} A^T B \dots\dots\dots(27)$$

본 연구에서는 zeroth 정규화도를 사용하였으며, 따라서 행렬 R 은 항등 행렬(identity matrix)이 된다.

Table 1. Expressions for T_j, q_j and h_j used in equations (22) and (29).

Condition Specified at Point j	T_j	q_j	h_j	Remarks
Dirichlet	\bar{T}_j	q_j	0	$(h, \bar{T}_h) = \begin{cases} (h_a, \bar{T}_a), & x \in \Gamma_a \\ (h_b, \bar{T}_b), & x \in \Gamma_b \end{cases}$
Neumann	T_j	\bar{q}_j	0	
Robin	T_j	$-h \bar{T}_h$	h	

5. 내부점에서의 열유속 및 온도 해

일단 경계에서의 온도와 열유속이 완전히 결정되면 이를 사용하여 내부점 $(x, y) \in \Omega$ 에서의 온도를 구하는 것은 간단하다. 식(22)를 다시 사용하며 이때 C_i 는 식(13)에서와 같이 1(unity)이 된다.

내부점에서의 열유속을 계산하는 것은 좀더 복잡하다. Fourier 법칙과 미분방정식(12)를 사용하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\vec{q}_i = -k \nabla T_i$$

$$= - \int_{\Gamma} T \nabla q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} q \nabla T^* d\Gamma \dots\dots\dots(28)$$

여기서 T 와 q 는 내부점이 아닌 경계점 위치의 함수이므로 T, q 에 대한 편미분 항(gradient)은 사라진다. 식(19)와 (20)에 따라, 내부점에서의 열유속

성분을 구하기 위한 절점식(nodal equation)은 다음과 같이 구해진다.⁷⁾

$$\sum_{j=1}^N \{ [\hat{q}_{z,\kappa(j-1)}^j + \hat{q}_{z,\psi}^j] - [\hat{T}_{z,\kappa(j-1)}^j + \hat{T}_{z,\psi}^j] h_j \} T_j + q_{z,i} = \sum_{j=1}^N [\hat{T}_{z,\kappa(j-1)}^j + \hat{T}_{z,\psi}^j] q_j \dots\dots(29)$$

여기서 z=x 또는 y이고, \hat{T} 와 \hat{q} 는 식(20)에서와 같이 일반적인 형태로 정의된다. 한편 아래첨자 z는 V*의 편미분이 수행되는 특정방향을 나타낸다. 예를 들면,

$$\hat{q}_{x,\psi}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma \dots\dots(30)$$

이로써 경계요소 절점식(boundary-element nodal equation)을 구하였다. 일단 $q_{x,i}$ 와 $q_{y,i}$ 가 식(29)에 의해 구해지면 그들을 결합하여 q_i 를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$q_i = (q_{x,i}^2 + q_{y,i}^2)^{\frac{1}{2}} \dots\dots(31)$$

이 식은 내부점에서의 열유속을 구하는데 사용된다.

공동의 위치를 찾는 최종단계로써, 만약 공동에 Dirichlet 조건이 주어져 있으면 식(22)가 내부점 $(x,y) \in \Omega$ 의 온도를 구하는데 사용되고 이 온도가 공동의 위치를 찾기 위해 검사된다. 한편 Neumann 조건이 공동에 주어져 있으면, 식(29)가 내부점에서의 열유속을 계산하여 공동의 위치를 결정하기 위해 사용된다. 마지막으로 Robin 조건이 공동에 주어져 있으면 내부온도와 열유속 모두가 계산되고 또한 식(4)에서와 같이 선형적으로 결합되어 공동의 위치를 찾게 된다.

6. 수치 해석

본 논문에서의 수치적 실험은 표면 온도자료 T_a 를 생성하기 위하여 Fig. 2에 나타낸 불규칙 형상의 물체에 대한 일반적 열전도 문제를 우선적으로 풀

었다. 얻어진 표면온도는 역 열전도 문제에서 공동의 위치 Γ_c 를 구하기 위하여 잉여기술된 조건으로 사용되었다. 이러한 방법은 적외선 스캐닝 자료가 없을 시, 해법을 시험, 확인하기 위한 통상적인 관행이다. 또한 본 논문에서는 외부경계의 절점은 반시계 방향으로 번호를 부여하였고, 내부경계의 절점은 시계방향으로 번호를 부여하였다. 이는 contour 적분의 방향 관례에 따른 것이다.

수치해석을 위하여 조건식 (2)부터 (4)에 대해 아래 값들을 취하였다.

$$\begin{aligned} \bar{T}_c &= 100^\circ\text{C} \\ k &= 40 \text{ W/m}^\circ\text{C} \\ h_a &= 25 \text{ W/m}^2\text{C} \\ \bar{T}_e &= 20^\circ\text{C} \end{aligned}$$

이미 언급한 수치적으로 생성된 온도 T_a 와 상기 자료를 공동에 Dirichlet 조건이 주어진 해석 예의 해를 구하기 위한 입력자료로 사용하였다.

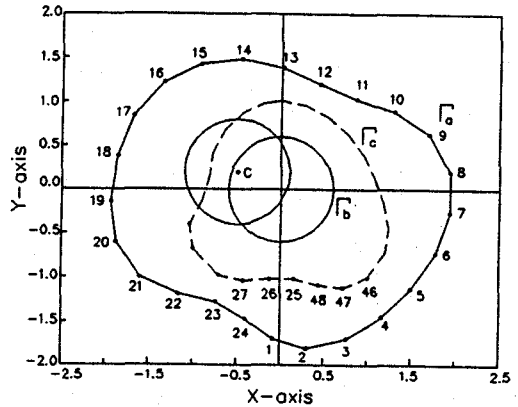


Fig. 2. Geometry of the test body with two choices of Γ_b positions.

7. 결과 및 고찰

본 연구에서는 두가지 경우에 대한 수치적 실험을 수행하였다. 첫번째 경우는 반경 0.6의 작은 원이 경계 Γ_b 로서 사용되었고, 이 원의 중심을 Fig. 2와 같이 원점에 위치시켰다. 그리고 공동의 위치를 구하기 위하여 보조문제를 풀었다. 두번째 경우는

Fig. 2의 점 C에 원의 중심을 임의로 정하여 원을 위치시키고, 역시 공동의 위치를 구하기 위해 보조 문제를 풀었다. 분명한 것은 첫번째 경우에는 원 전체가 공동 영역(cavity region)에 포함되는 반면에 두번째 경우는 원이 공동 벽(cavity wall)을 가로지른다는 것이다. 이것들은 원형의 경계 Γ_b 가 위치할 수 있는 두가지의 가능성들이다.

Fig. 3에서 Fig. 8까지는 두가지 경우에 대한 해석결과를 나타낸다. Fig. 3과 Fig. 6에서 (+)로 표시된 면은 구해진 동일온도 즉 $T_c = 100^\circ\text{C}$ 의 위치를 표시하며, Fig. 4, Fig. 5, Fig. 7과 Fig. 8에서 X-axis는 24개의 경계요소로 나뉘어진 경계 Γ_b 의 절점번호를 나타낸다.

첫번째 경우에 대해, 네개의 서로 다른 값의 정규화 계수 $\mu = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ 그리고 10^{-4} 을 사용하여 탐지된 공동의 위치들을 Fig. 3(a), (b), (c) 그리고 (d)에 나타내었다. 큰 정규화 계수 $\mu = 10^{-1}$ 가 사용될

때 탐지된 공동은 실제 공동에 근접하여 완만히 변화하는 원의 형태로 나타난다. μ 값이 작아짐에 따라 탐지된 공동의 위치는 실제 공동의 위치로 수렴한다. 여기서 $\mu = 10^{-4}$ 인 경우 탐지된 공동의 위치는 실제 공동위치와 잘 일치한다. 그러나 Fig. 4에서 보는 바와 같이 식(27)로부터 구한 경계 Γ_b 에서의 온도분포는 μ 값이 작아짐에 따라 불규칙해지며, 이로 인하여 경계 Γ_b 에 인접한 확장 영역(extended domain) $\Omega - \Omega$ 에서 계산된 온도들도 μ 가 작아짐에 따라 불규칙해지는 경향이 있다. 이러한 특징은 안정된 해가 어느정도 정확도를 감소시킴으로서 얻어질 수 있는 반면에, 탐지 정확도가 증가되면 해가 불안정해진다는 것을 나타낸다. Table 2는 해가 구해지는 계수행렬(coefficient matrix)의 condition number를 제시해 주며, 행렬식을 푸는데 있어 정규화 효과를 보여주고 있다. 정규화하지 않았을 때는 Fig. 5와 Table 2에 각각 나타낸 바와 같이 심한 온

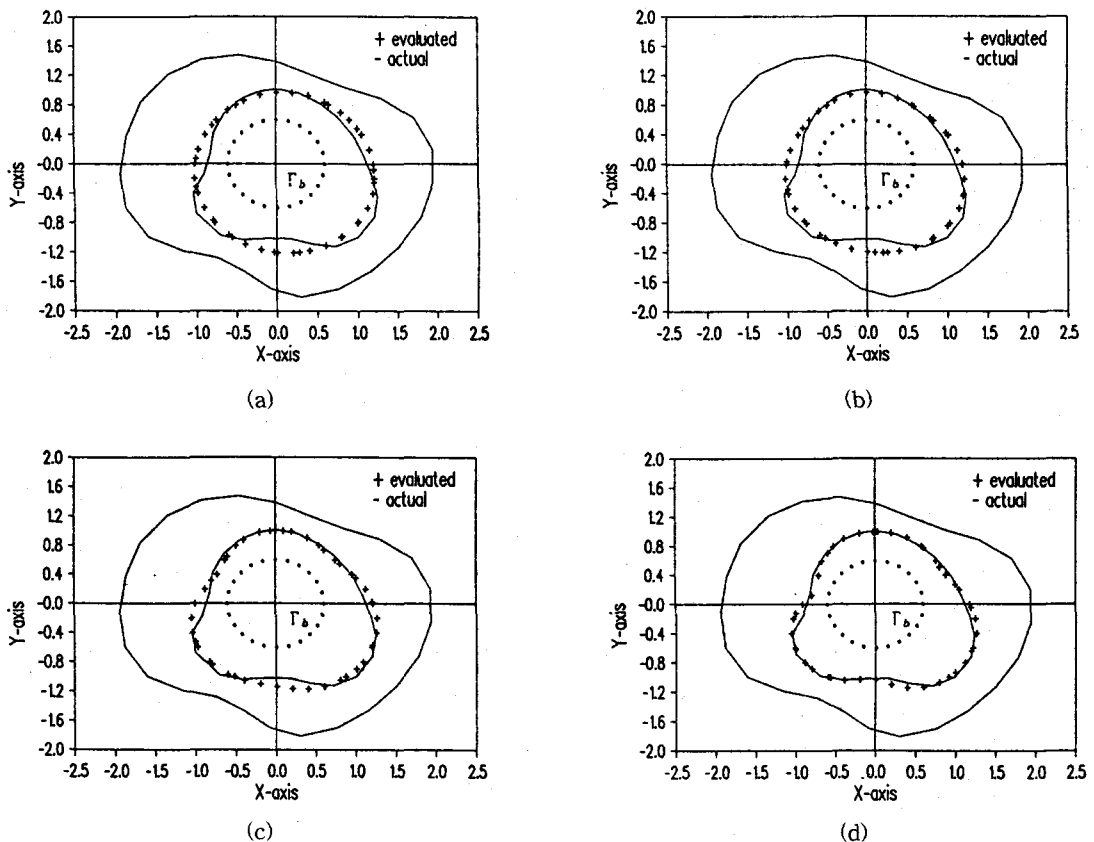


Fig. 3. Detected cavity positions for the first test case with $\mu =$ (a) 10^{-1} , (b) 10^{-2} , (c) 10^{-3} , (d) 10^{-4}

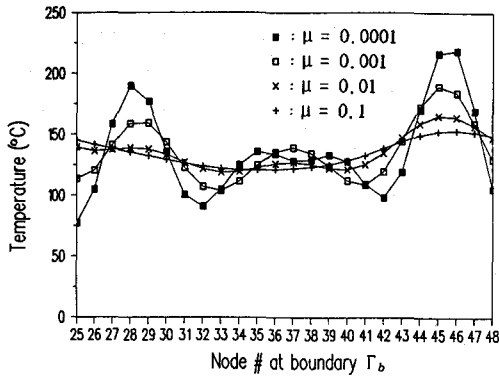


Fig. 4. Temperature distribution at the boundary Γ_b for the first test case.

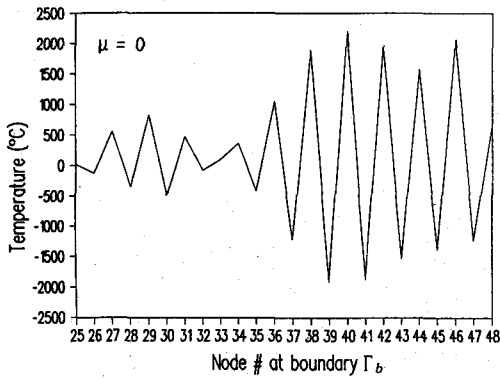


Fig. 5. Temperature distribution at the boundary Γ_b for the first test case without regularization.

Table 2. 2-norm condition number of matrix $(A^T A + \mu R^T R)$ of equation (27).

Regularization Coefficient	Test Case 1	Test Case 2
$\mu = 10^{-1}$	43.72×10^1	43.81×10^1
$\mu = 10^{-2}$	43.63×10^2	43.72×10^2
$\mu = 10^{-3}$	43.63×10^3	43.71×10^3
$\mu = 10^{-4}$	43.63×10^4	43.71×10^4
$\mu = 0$	43.63×10^{14}	43.71×10^{16}

도분포의 불규칙성과 huge matrix condition number가 발생한다.

두번째 경우, 잘못 위치한 원 Γ_b 는 공동의 위치 탐지에 대한 중요한 결과를 제공한다. Fig. 6(a)에서

(d)까지는 4개의 서로 다른 μ 에 따른 결과를 보여준다. 이들은 원 Γ_b 가 실제 공동을 가로질러 위치해 있음을 명백히 보여주고 있다. 또한 이러한 결과로부터 공동의 위치에 대한 만족할 만한 해를 구하기 위하여 원을 어느 방향으로 움직일 것인가에 대한 명확한 실마리를 얻을 수 있다. Fig. 7은 경계 Γ_b 에서의 온도분포가 μ 가 감소함에 따라 완만한 상태에서 불규칙상태로 변화됨을 보여 주고 있다. 정규화하지 않았을 경우 Fig. 8과 Table 2에서 처럼 온도분포의 불규칙성은 더욱 심하고 condition number는 첫번째 경우의 값보다 더욱 나빠진다.

마지막으로 경계 Γ_b 와 보조문제의 전체영역 Ω 에서 규칙적이고 안정된 해는 비록 공동의 탐지 정확도가 약간 떨어지지만 $\mu=10^{-1}$ 과 10^{-2} 를 사용했을 때 얻을 수 있음을 알 수 있다. 따라서 이러한 결과는 정규화 방법을 사용하는 이론적 개념을 입증하고 나아가서 IR CAT Scan 개발을 위한 기하학적 인 역 열전도 문제의 정확하고 안정된 해법 개발을 위한 기초가 될 것이다.

8. 결론

본 논문에서는 IR CAT Scan 개발을 위한 기하학적 역 열전도 문제를 경계요소 식에 정규화 과정을 도입함으로써 미지의 공동 위치에 대해 풀었다. 두가지 경우의 가상된 경계 위치에 대한 결과로부터 다음의 결론을 얻을 수 있다.

- 1) 경계요소법에 정규화 과정을 적용하여 해의 불규칙성을 안정시키고 불규칙 형상의 공동을 성공적으로 탐지하였다.
- 2) 정규화 계수값이 작아짐에 따라 탐지된 공동 위치는 실제 공동 위치에 수렴하며, 정규화 계수 $\mu=10^{-4}$ 인 경우 탐지된 공동 위치는 실제 위치와 잘 일치한다. 반면에 가상된 경계에서의 온도 분포는 μ 값이 작아짐에 따라 불규칙해지며, 이로 인하여 가상경계에 인접한 영역의 해가 불안정해지는 경향이 있다.
- 3) 가상경계의 위치가 부적절하게 선정된 경우에 대해서도, 항상 가상경계의 위치를 적절히 예측할 수 있는 명확한 결과를 얻을 수 있다.
- 4) 전체 영역 및 경계에서 규칙적이고 안정된 해는

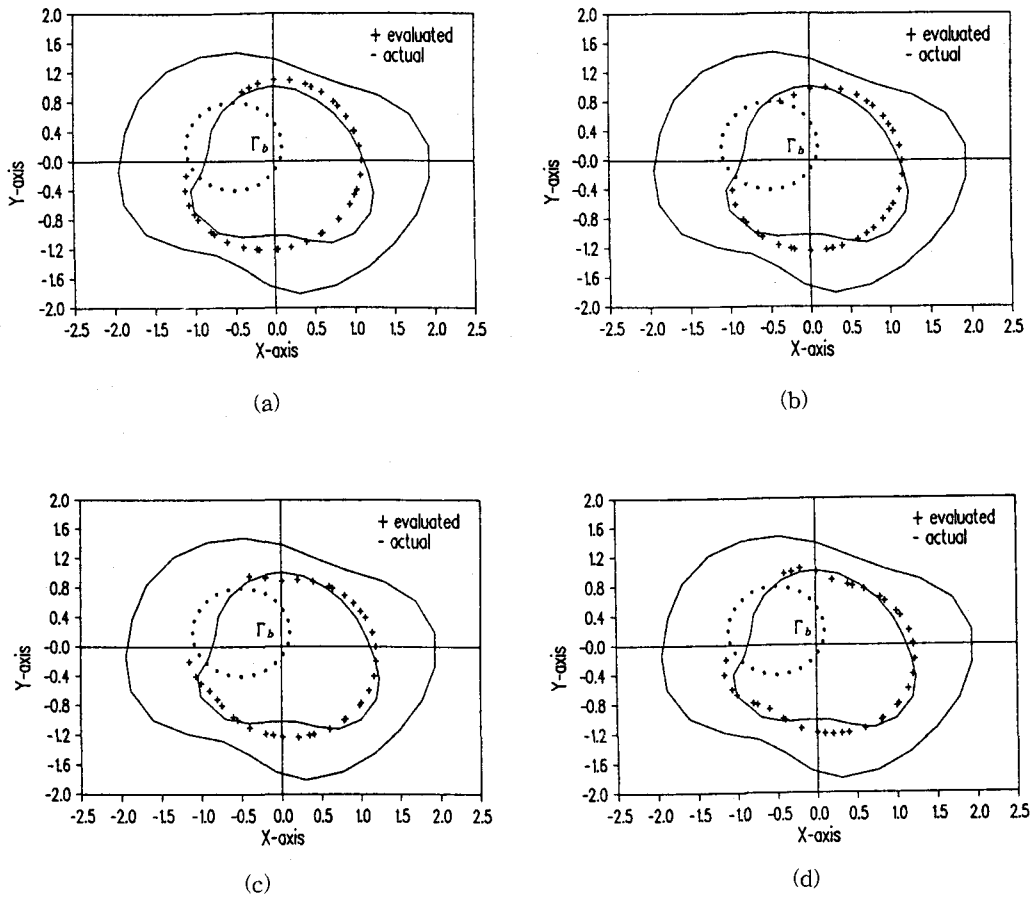


Fig. 6. Detected cavity positions for the second test case with $\mu =$ (a) 10^{-1} , (b) 10^{-2} , (c) 10^{-3} , (d) 10^{-4}

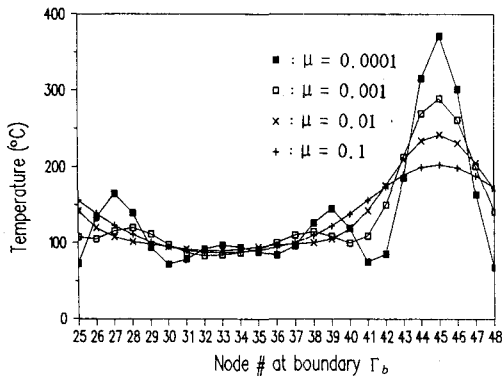


Fig. 7. Temperature distribution at the boundary Γ_b for the second test case.

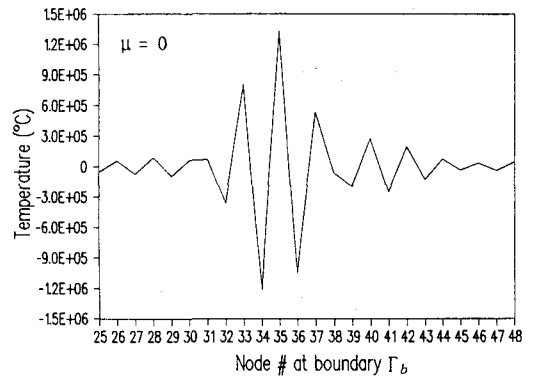


Fig. 8. Temperature distribution at the boundary Γ_b for the second test case without regularization.

정규화 계수 $\mu=10^{-1}$ 과 $\mu=10^{-2}$ 를 사용했을 때 얻을 수 있으며, 이 결과는 IR CAT Scan의 정확하고 안정된 탐지 해법을 개발하기 위한 이론적 초석이 될 것이다.

참고 문헌

- 1) C. K. Hsieh, W. A. Ellingson and K. C. Su, "A Model Study for Quantitative Flaw Detection Using Infrared Scanning," Brit. J. Nondestruct. Evaluation, 1979, pp. 185~192
- 2) C. K. Hsieh and K. C. Su, "A Methodology of Predicting Cavity Geometry Hased on the Scanned Surface Temperature Data-Prescribed Surface Temperature at the Cavity Side," J. Heat Transfer, Vol. 102(1980), pp. 324~329
- 3) C. K. Hsieh and K. C. Su, "A Methodology of Predicting Cavity Geometry Hased on the Scanned Surface Temperature Data-Prescribed Heat Flux at the Cavity Side," J. Heat Transfer, Vol. 103(1981), pp. 42~46
- 4) C. K. Hsieh and A. J. Kassab, "A General Method for the Solution of Inverse Heat Conduction Problems with Partially Unknown System Geometries," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 29(1986), pp. 47~58
- 5) C. K. Hsieh, Z. Z. Lin and S. L. Yang, "An Inverse Problem Technique for Detecting Irregular Pavities in Circular Cylinders by Infrared Scanning," J. Nondestruct. Evaluation, Vol. 4(1985), pp. 131~138
- 6) A. J. Kassab and C. K. Hsieh, "Application of Infrared Scanners and Inverse Heat Conduction Methods to Infrared Computerized Axial Tomography," Rev. Sci. Instrum., Vol. 58(1987), pp. 89~95
- 7) C. K. Hsieh, C. -Y. Choi and K. M. Liu, "Domain-Extension Method for Quantitative Detection of Cavities by Infrared Scanning," J. Nondestruct. Evaluation, Vol. 8(1989), pp. 195~211
- 8) A. J. Kassab and J. E. Pollard, "Automated Algorithms for the Nondestructive Detection of Subsurface Cavities by the IR-CAT Method," J. Nondestruct. Evaluation, Vol. 12(1993), pp. 175~187
- 9) C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, Boundary Element Techniques, 1984, Springer-Verlag, New-York
- 10) A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, 1977, V. H. Winston & Sons, Washington, DC
- 11) M. M. Lavrent'ev, V. G. Romanov and S. P. Shishatskii, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, 1986, American Mathematical Society
- 12) C. K. Hsieh and H. Shang, "Solution of Boundary Value Heat Conduction Problems with Variable Convective Coefficients by a Boundary Condition Dissection Method," Nuclear Eng. Design, Vol.110(1988), pp. 17~31

Boundary Element Solution of Geometrical Inverse Heat Conduction Problems for Development of IR CAT Scan

C. Y. Choi, C. T. Park, T. H. Kim, K. N. Han and S. H. Choe
Korea Atomic Energy Research Institute

Abstract A geometrical inverse heat conduction problem is solved for the development of Infrared Computerized-Axial-Tomography (IR CAT) Scan by using a boundary element method in conjunction with regularization procedure. In this problem, an overspecified temperature condition by infrared scanning is provided on the surface, and is used together with other conditions to solve the position of an unknown boundary (cavity). An auxiliary problem is introduced in the solution of this problem. By defining a hypothetical inner boundary for the auxiliary problem domain, the cavity is located interior to the domain and its position is determined by solving a potential problem. Boundary element method with regularization procedure is used to solve this problem, and the effects of regularization on the inverse solution method are investigated by means of numerical analysis.

(Received: December 29, 1994)