

적분식을 이용한 무한배플 사각형 진동체의 자기방사 임피던스 연구 An Investigation of Self-Radiation Impedance of a Square Piston using an Integral Equation in the Rigid Infinite Baffle

이종길*, 서인창*
(Jongkil Lee*, Inchang Seo*)

요약

무한배플에 고정된 사각형 진동체에 대한 자기방사 임피던스를 극좌표를 이용한 적분식으로 표시하고 이를 방사저항과 방사 리액턴스로 분리하여 수치해석 하였다. 해석의 결과를 접근방법이 다른 이론식의 결과와 비교하였다. 수치해석의 결과 다른 방법들은 저주파 영역에서 근사식을 사용하여 보정을 해준 반면 본 논문에서 사용된 적분식은 전 주파수 영역에서 제한조건 없이 잘 맞음을 보였다.

ABSTRACT

Integral equations of self-radiation impedance of a rectangular piston in a rigid infinite baffle are derived using by polar coordinate. The self-radiation impedance is separated by two parts : self-radiation resistance and self-radiation reactance. Derived integral equations are simulated by numerical method. Based on the numerical results, self-radiation impedance can be obtained in the low and high frequency ranges without any limited conditions.

I. 서론

음향센서 진동체의 표면에 작용하는 방사 임피던스(radiation impedance)의 연구는 실제 음향 트랜스듀서의 특성을 해석하는데 꼭 필요하다. 센서 진동체(piston)는 표면의 형상에 따라 원형(circular) 및 사각형(rectangular) 등으로 구분한다. 또한 방사 임피던스는 진동체 단독의 자기방사 임피던스(self-radiation impedance)와 음향센서의 배열에 따라 상호간섭으로 인한 상호방사 임피던스(mutual radiation impedance)로 구분된다.

사각형 진동체에 대한 방사 임피던스의 연구는 해석 방법에 따라 비교적 많은 논문이 발표되어 있으나 결과식은 사용 주파수의 범위에 따라 다소 차이를 보이고 있다. Morse와 Ingard(1968)는 사각형 피스톤의 자기방사 임피던스를 그린함수를 이용한 적분식으로 표현하여 이를 저주파 및 고주파영역으로 분리한 근사식을 제시하였다. Stepanishen(1977)은 충격응답(impulse response)의 푸리에 변환(Fourier transform)을 이용하여 방사임피던스, Z_n 을

$$\begin{aligned} \frac{Z_n}{\rho c A_n} = & 1 - \frac{2(1+n)/n\pi}{jkb} + \frac{2/\pi n}{(jkb)^2} \\ & \left\{ 1 - e^{-jkb} - e^{-jnkb} + e^{-jkh(n^2+1)^{1/2}} \right\} \\ & + \frac{2/\pi}{jkb} \int_0^{\cosh^{-1}\sqrt{n^2+1}} \frac{e^{-jk\cosh\beta}}{\cosh^2\beta} d\beta \\ & + \frac{2/\pi}{jnkb} \int_0^{\cosh^{-1}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} \frac{e^{-jnkc\cosh\beta}}{\cosh^2\beta} d\beta \quad (1) \end{aligned}$$

로 구하여 Burnett(1972)등의 결과표와 비교 하였다. 여기서 종횡비(aspect ratio) $n = a/b$, ρc 는 특성 임피던스(characteristic impedance), k 는 파수(wave number), A_n 은 음향센서 진동체의 단면적, 그리고 a 및 b 는 사각형 진동체의 변의 길이 이다. 정사각형 진동체의 경우 $n=1$ 이 된다. 또한 Stepanishen은 식 (1)을 저주파 및 고주파에 대하여 근사화한 방사 임피던스의 표현식을 제시 하였다. 저주파($kb \ll 1$)의 경우 방사 임피던스는

$$\begin{aligned} Z_n = & \frac{n(kb)^2}{2\pi} + jkb \left\{ \frac{1}{3\pi n} [1 + n^3 - (n^2+1)^{3/2}] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \cosh^{-1}(\sqrt{n^2+1}) + \frac{n}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right) \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

*국방과학연구소 음향센서연구실
접수일자: 1995년 5월 25일

이다. 또한 Levine(1983)은 무한 배플의 사각형 진동체에서 반공간(half-space) 자기방사 임피던스를 다음과 같이 유도 하였다. 즉, 방사 임피던스, Z, 는

$$\begin{aligned} \frac{Z}{\rho c A} = & 1 - \frac{2i}{\pi ab k^2} (k(a+b) - i \\ & + \int_0^{\tan^{-1}(b/a)} (ka \sin \vartheta - kb \cos \vartheta \\ & + 2i \sin \vartheta \cos \vartheta) e^{ikasec \vartheta} d\vartheta \\ & + \int_{\tan^{-1}(b/a)}^{\frac{\pi}{2}} (-ka \sin \vartheta + kb \cos \vartheta \\ & + 2i \sin \vartheta \cos \vartheta) e^{ikb \cos \vartheta} d\vartheta) \end{aligned} \quad (3)$$

로 표시됨을 보였다. Levine은 식 (3)을 단순 점근법(simple asymptotic)을 이용한 근사해를 유도하여 Burnett (1972)의 결과와 비교 하였다. Bank(1990)등은 사각형 피스톤의 종횡비(aspect ratio)에 따른 방사 임피던스를 적분식으로 표시하여 수치해석 하였다. 본 논문에서는 극좌표를 이용한 방사 임피던스의 적분식을 유도하고 수치해석 하여 이를 Levine 및 Stepanishen의 결과와 비교 하여 무차원수 ka의 전 주파수 영역에 걸친 한계성에 관하여 살펴 보았다.

II. 적분식의 표현

자기 방사 임피던스는 그림 1에서와 같이 #1의 미소 요소가 진동을 할때 #2의 미소요소가 받는 힘의 합을 속도로 나눈 값이다. 단순 조화운동(simple harmonic motion)을 하는 사각형 진동체의 표면이 무한 배플(infinite baffle)에 견고하게 고정되어 있는 경우에 대하여 그림 2와 같이 미소면적 dA와 dA'에서 r만큼 떨어진 진동체내의 미소면적을 dA'라 두면, 진동체에 작용하는 힘, F는

$$F = \frac{j\rho ck}{2\pi} V_m e^{j\omega t} \iint_{dA} \iint_{dA'} \frac{e^{-jkr}}{r} dA dA' \quad (4)$$

로 표시된다. 여기서 $V_m e^{j\omega t}$ 는 진동체의 최대속도가 V_m 이고 ω 의 주파수로 진동함을 가정한 것이다. 따라서 방사 임피던스, Z는 식 (4)를 피스톤의 표면속도로 나눈 값이므로

$$Z = \frac{j\rho ck}{2\pi} \int_{u=0}^{u=a} \int_{v=0}^{v=a} \iint_{dA} \frac{e^{-jkr}}{r} dA dudv \quad (5)$$

이다. 사중적분식 (5)를 그림 2에서와 같이 $dA' (= r dr d\theta)$ 의 위치에 따라 (I~VII) 직교좌표 및 극좌표를 이용하여 적분식을 다시 쓰면

$$Z = \sum_{i=1}^{VIII} Z_i = \frac{j\rho ck}{2\pi} \int_0^a \int_0^a \left\{ \sum_{j=1}^4 \sum_{l=1,3} \int_0^{\xi_{i,j}} \int_0^{\xi_{i,j+1}} e^{-jkr} dr d\theta \right\} dudv \quad (6)$$

여기서 $\xi_{i,j}$ 는

$$[\xi_{i,j}] = \begin{pmatrix} \tan^{-1}\left(\frac{a-v}{a-u}\right) \frac{a-u}{\cos\theta} & \tan^{-1}\left(\frac{a-u}{a-v}\right) \frac{a-v}{\cos\theta} \\ \tan^{-1}\left(\frac{u}{a-v}\right) \frac{a-v}{\cos\theta} & \tan^{-1}\left(\frac{a-v}{u}\right) \frac{u}{\cos\theta} \\ \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \frac{u}{\cos\theta} & \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) \frac{v}{\cos\theta} \\ \tan^{-1}\left(\frac{a-u}{v}\right) \frac{v}{\cos\theta} & \tan^{-1}\left(\frac{v}{a-u}\right) \frac{a-u}{\cos\theta} \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (7)$$

이다. 즉 식 (6)에서 $\xi_{i,j}$ 는 각 θ 의 범위를, $\xi_{i,j+1}$ 은 거리 r의 범위를 각각 나타낸다. 만약 dA'의 상대위치를 직교 좌표로 표시하게 되면 적분식 (6)은 매우 복잡하게 표현 되므로 여기서는 극좌표를 이용하는 것이 유리하다. 그림 2에서와 같이 만약 dA'이 I번의 영역에 있다면 dA에서 dA'까지의 거리인 r은 최소거리 0에서 부터 최대거리인 점 (a, a)까지의 길이 이므로 변수영역은 $0 < r (= \xi_{12}) < \frac{a-u}{\cos\theta}$ 이다. 또한 사이각 θ 는 $0 < \theta (= \xi_{11}) < \tan^{-1}\left(\frac{a-v}{a-u}\right)$ 으로 구해진다. 같은 방법으로 정사각형의 8개 분할영역에 대하여 적분구간을 계산하면 (7)식과 같은 $\xi_{i,j}$ 가 구해진다. 따라서 식 (6) 및 (7)을 이용하여 무차원수 ka에 따른 자기 방사 임피던스를 수치해석으로 계산할 수 있다. 또한 식 (6)은 평면 I에서 임피던스의 값의 8배(I~VIII)를 곱해주면 같은 결과 이므로 방사임피던스는

$$Z = 8Z_I = \frac{4j\rho ck}{\pi} \int_0^a \int_0^a \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{a-v}{a-u}\right)} \int_0^{\left(\frac{a-u}{\cos\theta}\right)} e^{-jkr} dr d\theta dudv \quad (8)$$

로 표시 할 수 있다. 식 (6) 및 식 (8)은 동일한 결과를 가지며 수치해석에서는 식 (6)을 이용하여 모의실험 하였다.

III. 모의실험 및 결과

종횡비(n)가 1인(a=b) 정사각형 진동체에 대하여 방사 임피던스의 표현식을 방사저항(radiation resistance)

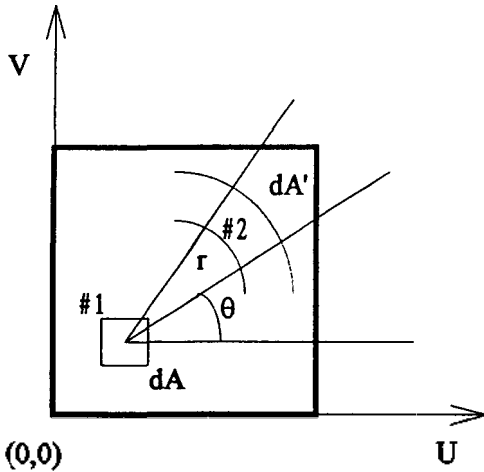


그림 1. 정사각형 피스톤의 미소면적 및 좌표

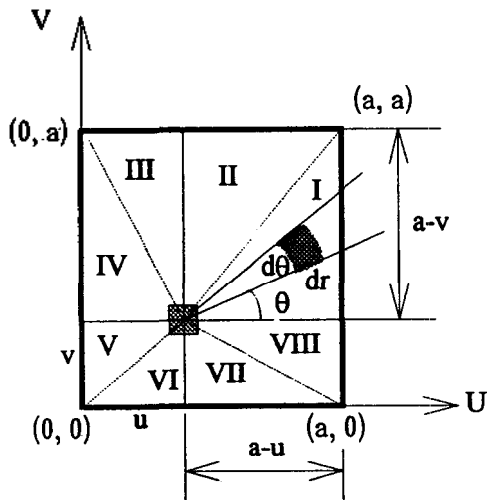


그림 2. 방사 임피던스 적분식의 영역분할

및 방사 리액턴스(radiation reactance)로 분리하여 모의실험 하였다. 그림 3 및 4는 방사 저항 및 방사 리액턴스를 Stepanishen(1977, 식 (1)), Levine(1983, 식 (3)) 및 적분식 (6)을 무차원수인 ka 에 따라 계산한 결과이다. $ka \gg 1$ 의 경우 방사저항은 감쇠진동을 하다가 결국 1로 수렴이 되나 방사 리액턴스는 감쇠진동 후 0으로 수렴한다. 만약 진동체의 변의 길이 $a \rightarrow 0 (ka \sim 0)$ 이면 사실상 진동체가 없는 경우 이므로 방사 임피던스는 존재하지 않는다. 따라서 그림 3 및 4에서 ka 의 범위가 저주파인 경우($ka \ll 1$) Levine 및 Stepanishen의 식은 잘 맞지 않음을 보여준다. 그러나 적분식 (6)의 수치해석 결과는 $a \rightarrow 0$ 일때 방사 저항 및 리액턴스가 0으로 접근한다. 또한 그림 3에서와 같이 방사저항의 결과에서는 세 방법이 서로 약간의 차이를 보이나 그림 4에서와 같이 방사 리액턴스에서는 적분식 (6)이 Levine의 결과와 거의 유사함을 볼 수 있다. 그림 5 및 6은 $0 < ka < 1$ 의 범위에서 방사

저항 및 방사 리액턴스를 Stepanishen의 보정식 (2)와 비교한 것이다. 즉 저주파에서 적분식 (6)의 수치해석 결과는 Stepanishen의 보정식의 결과와 거의 일치함을 알 수 있다. 또한 저주파 영역에서는 Stepanishen 및 적분식 (6)의 결과에 근거하여 방사 리액턴스는 주파수에 따라 거의 선형적인 특성을 가지고 있음을 알 수 있다.

Burnett(1972)등은 무한배플에 사각형 피스톤의 방사 임피던스 함수를 그린 함수(Green function) 및 Bouwkamp(1946)의 식을 이용하여 유도하고 종횡비 n 을 1, 2, 4, 8, 16 및 32로 구분하여 방사저항(R) 및 방사 리액턴

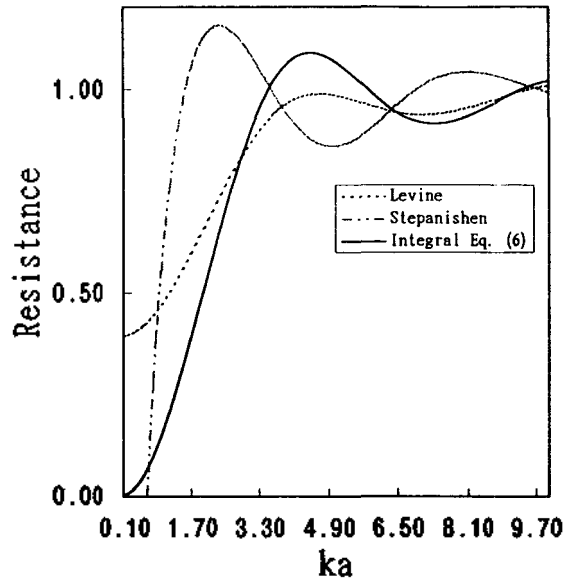


그림 3. 정사각형 진동체의 방사 저항(radiation resistance)

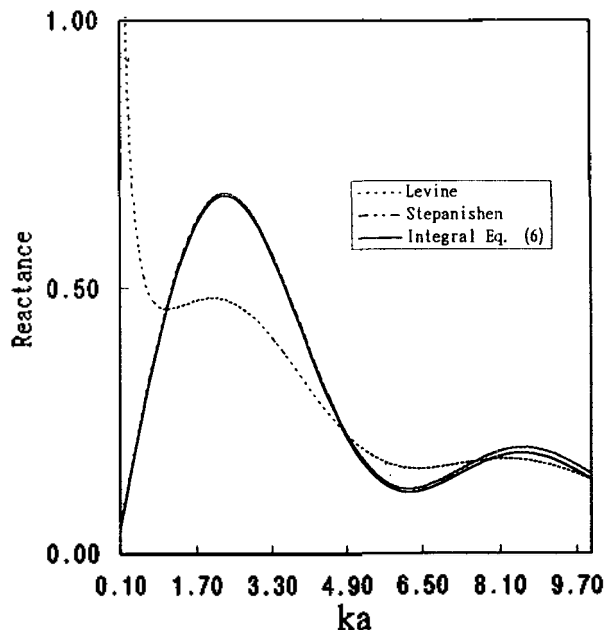


그림 4. 정사각형 진동체의 방사 리액턴스(radiation reactance)

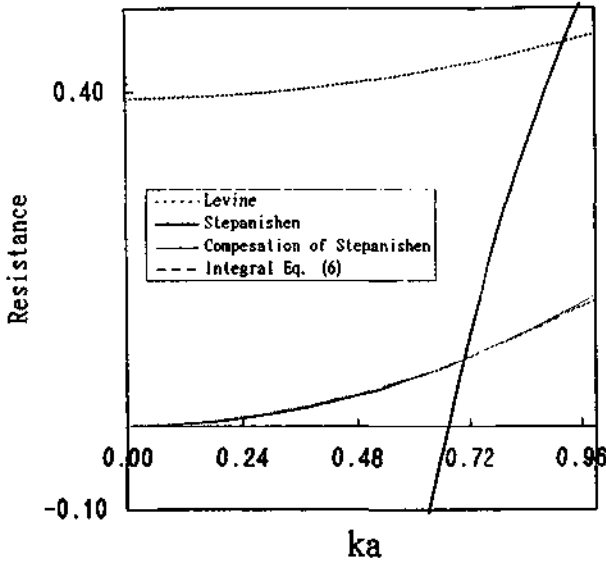


그림 5. $0 < ka < 1$ 의 영역에서 진동체의 방사 저항

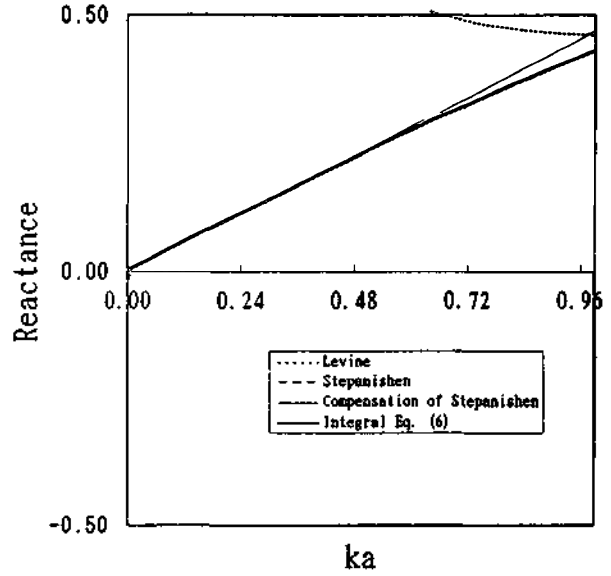


그림 6. $0 < ka < 1$ 영역에서 진동체의 방사 리액턴스

표 1. 종횡비(n)가 1일때 Burnett(1972)의 임피던스 표와 비교

ka	Burnett et al. (1972)		Integral Eq. (6)		Percent Error	
	R	X	R	X	R(%)	X(%)
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	0.000
0.1	0.0015907	0.0472786	0.0015928	0.0472392	-0.132	0.083
0.2	0.0063521	0.0943088	0.0063604	0.0942291	-0.131	0.085
0.3	0.0142525	0.1408439	0.0142710	0.1407225	-0.129	0.086
0.4	0.0252395	0.1866412	0.0252718	0.1864756	-0.127	0.088
0.5	0.0392400	0.2314636	0.0392895	0.2312509	-0.126	0.092
0.6	0.0561615	0.2750815	0.0562310	0.2748180	-0.123	0.096
0.7	0.0758922	0.3172743	0.0759841	0.3169560	-0.121	0.100
0.8	0.0983024	0.3578327	0.0984184	0.3574544	-0.118	0.106
0.9	0.1232456	0.3965593	0.1233867	0.3961161	-0.114	0.112
1.0	0.1505592	0.4332708	0.1507257	0.4332757	-0.110	-0.001
2.0	0.5101172	0.6613308	0.5103748	0.6598090	-0.050	0.230
3.0	0.8730617	0.6199537	0.8726976	0.6172377	0.042	0.438
4.0	1.0709715	0.4124478	1.0693670	0.4091468	0.149	0.800
5.0	1.0769733	0.2104150	1.0743550	0.2073585	0.243	1.439
6.0	0.9887026	0.1232262	0.9859094	0.1206323	0.283	2.105
7.0	0.9252144	0.1426650	0.9222734	0.1398100	0.318	2.001
8.0	0.9363778	0.1884227	0.9337990	0.1845426	0.275	2.059
9.0	0.9912361	0.1932208	0.9877097	0.1882852	0.355	2.554
10	1.0315395	0.1502609	1.0266480	0.1449072	0.474	3.563

스(X)를 수치해석으로 구하였으며 또한 계산된 결과를 표로 만들어 비교적 정확한 임피던스 값을 제시 하였다. Stepanishen(1977)은 그의 논문에서 Burnett(1972)의 결과를 정확한 값들이라고 언급하였다. 표 1은 Burnett 등이 제시한 임피던스 계산값과 적분식 (6)의 결과와 비교하여 백분율 오차를 계산하여 보인것이다. 방사 저항의 백분율 오차는 0.5% 이하로 나타 났으나 방사 리액턴스는 약 3.5% 까지의 오차를 보였다. 그러나 Stepanishen (1977)의 수치해석 결과는 Burnett의 표와 비교해 볼때 방사 임피던스가 최고 40% 까지의 오차를 보였다. 따라서 적분식 (6)의 결과는 Stepanishen의 결과보다 매우 안정된 값이라고 볼 수 있다. 따라서 무차원수인 ka의 전

주파수 영역에서 방사 임피던스는 근사식을 이용하지 않고도 사중 적분식의 직접적인 수치해석으로도 구할 수 있다.

IV. 결 론

본 연구에서는 무한배플에 고정된 사각형 진동체에 대한 자기방사 임피던스를 극좌표를 이용한 적분식으로 표시하고 이를 방사저항과 방사 리액턴스로 분리하여 모의 실험 하였다. 해석 결과는 자기 방사 임피던스의 유도 방법이 다른 Stepanishen(1977) 및 Levine(1983)의 식들의 수치해석 결과와 비교 하였다. 수치해석의 결과 적분

식 이외의 다른 두 방법들은 저주파 영역($ka < 1$)에서 근사식을 사용하여 보정을 해준 반면 본 논문에서 사용된 적분식은 ka 의 전 영역에서 제한조건 없이 잘 맞음을 보였다. 또한 적분식의 결과를 Burnett(1972)등의 임피던스 표와 비교하여 백분율 오차를 계산하여 무차원 수인 ka 의 전 영역에서 비교적 잘 맞음을 보였다.

본 논문에서 언급한 적분 표현식의 유도 방법에 따라 원형 혹은 임의 형상의 진동체에 대하여도 적당한 기하학적 방정식 및 변수영역을 유도하면 방사 임피던스는 또다른 하나의 적분식으로 표현 될 수 있다. 소나 시스템에서 궁극적으로 해결 하여야 할 센서 배열의 문제로 인한 방사 임피던스 상호간섭 문제는 본 논문에서 제시된 적분구간으로 분할하여 모의실험을 하면 상호 방사 임피던스(mutual radiation impedance)의 양을 어느 정도 예측할 수 있다고 본다.

참 고 문 헌

1. Bank, G. and Wright, J. R., "Radiation Impedance Calculations for a Rectangular Piston," *Journal of Audio Engineering Society*, Vol. 38, No. 5, pp. 350-354, 1990.
2. Burnett, D. S., *Radiation Impedance Functions of Rectangular Pistons and Their Application to Sound Transmission through Finite Depth Apertures*, Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1969.
3. Burnett, D. S. and Soroka, W. W., "Tables of Rectangular Piston Radiation Impedance Functions, with Application to Sound Transmission Loss through Deep Apertures," *The Journal of the Acoustical Society of America* 51(5), pp. 1618-1623, 1972.
4. Fujii, Y. and Yamada, K., "Acoustic Response of a Rectangular Receiver to a Rectangular Source," *The Journal of the Acoustical Society of America* 40(1), pp. 249-251, 1966.
5. Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., and Sanders, J. V., *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
6. Levine, H., "On the Radiation Impedance of a Rectangular Piston," *Journal of Sound and Vibration* 89(4), pp. 447-455, 1983.
7. Lindorman, O. A., "Transient Fluid Reaction on a Baffled Plane Piston of Arbitrary Shape," *The Journal of the Acoustical Society of America* 55(4), pp. 708-717, 1974.
8. Lowenthal, S. and Tournois, P., "Radiation Impedance of Membranes and Plates: Their Acoustic Coupling with the Propagating Medium," *The Journal of the Acoustical Society of America* 35(9), pp. 1423-1428, 1963.
9. Morse, P. M. and Ingard, K. U., *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, pp. 392-394, 1968.
10. Rayleigh, J. W. S., *The Theory of Sound*, Volume II, Dover Publications, Inc., New York, 1945.
11. Robey, D. H., "On the Radiation Impedance of an Ar-

ray of Finite Cylinders," *The Journal of the Acoustical Society of America* 27(4), pp. 706-710, 1955.

12. Schenck, H. A., "Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems," *The Journal of the Acoustical Society of America* 44(1), pp. 41-58, 1967.
13. Stepanishen, P. R., "Transient Radiation from Pistons in an Infinite Planar Baffle," *The Journal of the Acoustical Society of America* 49(5), pp. 1629-1638, 1971.
14. Stepanishen, P. R., "The Radiation Impedance of a Rectangular Piston," *Journal of Sound and Vibration* 55(2), pp. 275-288, 1977.

▲李 鍾 吉 (Jongkil Lee)

1962년 2월 23일생

1984년 2월 : 부산대학교 기계설계학과(B.S.)

1990년 12월 : University of Utah, Mechanical Engineering, (M.S.)

1993년 8월 : University of Utah, Mechanical Engineering, (Ph.D.)



1995년 1월 : 소음진동기술사(P.E.)

1984년 3월 ~ 1989년 8월 : 국방과학연구소 연구원

1994년 4월 ~ 1994년 12월 : 현대중공업(주) 진동소음연구실 선임연구원

1995년 1월 ~ 현재 : 국방과학연구소 음향센서연구실 선임연구원

▲徐 寅 彰 (Inchang Seo)

1966년 3월 6일생

1988년 2월 : 한양대학교 물리학과(학사)

1990년 2월 : 한양대학교 물리학과(석사)

1990년 3월 ~ 현재 : 국방과학연구소 음향센서연구실 연구원

