

복수 정현파 입력신호에 대한 최소평균사승 알고리즘의 수렴 특성에 관한 연구

Convergence Behavior of the Least Mean Fourth Algorithm for a Multiple Sinusoidal Input

李 康 昇*, 李 在 天**, 尹 大 熙*

(Kang Seung Lee*, Jae Chon Lee**, Dae Hee Youn*)

* 본 연구는 1992년도 한국과학재단 연구비 지원에 의한 결과임

요 약

본 논문은 입력 신호가 복수 정현파(multiple sinusoids) 신호로 구성되고 측정 잡음이 가우시안일 때 최소평균사승(least mean fourth : LMF) 알고리즘의 수렴 특성을 새로운 해석 기법을 적용하여 이론적으로 분석하였다. LMF 알고리즘은 오차 신호의 4승을 비용 함수(cost function)로 하여 gradient-descent 방법으로 구한 적응 알고리즘인데 기존 Walach 와 Widrow의 수렴 특성 분석에서는 이루어지지 않았던 계수 추정 오차에 대한 2차 모멘트의 과도기 상태 수렴 특성을 본 논문에서 새로이 제시하였다. 결론적으로 가우시안 측정 잡음의 분산과 수렴 상수의 크기에 따라 서로 다른 수렴 특성을 나타낼 수 있었다. 이러한 결과는 기존 Walach 와 Widrow의 분석 기법으로서는 알 수가 없었다^[1].

ABSTRACT

In this paper we study the convergence behavior of the least mean fourth (LMF) algorithm where the error raised to the power of four is minimized for a multiple sinusoidal input and Gaussian measurement noise. Here we newly obtain the convergence equation for the sum of the mean of the squared weight errors, which indicates that the transient behavior can differ depending on the relative sizes of the Gaussian noise and the convergence constant. It should be noted that no similar results can be expected from the previous analysis by Walach and Widrow^[1].

1. 서 론

디지털 통신, 제어, 그리고 신호처리 등 많은 분야

에서 최적 필터를 설계하여 잡음을 동반한 데이터로부터 유용한 정보를 추출하였다. 필터 최적화 문제를 푸는 해결책 중 하나가 1949에 발표된 Wiener 필터^[2] 설계 방법이다. 그러나, Wiener 필터 설계는 처리될 신호들이 스테이션너리(stationary)해야 하고 또한 이들 신호들의 통계적 특성을 이용한다. 더욱이 최적 필터 계수를 구하기 위해 일명 Wiener-Hoff 방정식

*연세대학교 전자공학과 신호처리 연구센터
Dept. of Electronic Engineering, Yonsei University
**아주대학교 시스템공학과 및 고등기술연구원
Dept. of Systems Engineering, Ajou University and
Institute for Advanced Engineering
접수일자: 1994년 10월 10일

이라고 불리는 선형 행렬 방정식을 풀어야 했다.

그러나 적응 필터는 신호의 통계적 특성을 완전하게 알지 못하더라도 최적의 필터 계수를 구할 수 있다. 즉, 적절하게 선택된 통계적 기준에 따라 계속해서 최적 필터 계수가 조정되고 입력 신호들의 정해진 상관관계로 점차적으로 학습되는 적응 필터링 방법 연구에 많은 관심이 집중되었다. 적응 알고리즘은 시스템 동일화(system identification)^[3,4,5], 잡음 제거^[6,7], 에코 상쇄^[8,9], 채널 등화^[10] 등 다양한 분야에 응용되고 있다. 적응 디지털 필터는 그림 1과 같이 묘사된 형태로 나타낼 수 있다. 즉 필터 출력은 입력신호 $x(n)$ 을 이용하여 희망신호 $d(n)$ 을 적응적으로 추정하는 문제로 생각할 수 있다. 먼저 그림 1의 신호 표시를 참조하면 오차 신호 $e(n)$ 은 다음과 같다.

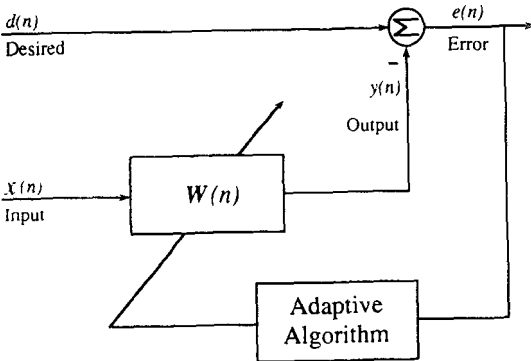


그림 1. 적응 디지털 필터 구성도.

Fig. 1. Configuration diagram of adaptive digital filter.

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n), \quad (1)$$

여기에서 $\mathbf{X}(n)$ 은 입력신호 $x(n)$ 의 현재 및 과거 $N-1$ 개 샘플을 사용한 벡터이고

$$\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N+1)]^T, \quad (2)$$

$\mathbf{W}(n)$ 은 차수가 N 인 적응 디지털 필터 계수 벡터이며

$$\mathbf{W}(n) = [w_0(n), w_1(n), w_2(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T, \quad (3)$$

T 는 전치 행렬(transpose)을 나타낸다.

(1), (2) 그리고 (3)으로부터 gradient-decent 방법^[3]을 이용하여 임의의 양의 정수 $k=1, 2, \dots$ 에 대하여 $e^{2k}(n)$ 을 최소화하는 계수 갱신 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{1}{2} \mu \{-\nabla[e^{2k}(n)]\}, \quad (4)$$

여기에서

$$\nabla[e^{2k}(n)] = -2ke^{2k-1}(n) \mathbf{X}(n),$$

μ : 수렴 상수이다.

순시 기울기 $\nabla[e^{2k}(n)]$ 는 (1)로 주어진 순차 오차 신호의 $2k$ 승에 대하여 계수 벡터 $\mathbf{W}(n)$ 으로 미분하면 얻을 수 있다. 또한, 상기의 알고리즘이 수렴하여 정상 상태에 도달하면 오차 신호의 $(2k-1)$ 승인 $e^{2k-1}(n)$ 과 입력 신호 $x(n)$ 사이의 통계적 특성은 최고성이 성립하여 다음 방정식을 만족해야 한다.

$$E[e^{2k-1}(n) \mathbf{X}(n)] = 0. \quad (5)$$

(1)을 (5)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$E[\{d(n) - \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)\}^{2k-1} \mathbf{X}(n)] = 0. \quad (6)$$

(4)에서 $k=1$ 일 때 계수 갱신 방정식을 최소평균사승(LMS), $k=2$ 일 때 최소평균사승(Least Mean Fourth: LMF) 알고리즘^[11]이라고 한다. LMS 일 때 (6)을 만족하는 선형 계수 벡터 $\mathbf{W}(n)$ 은 오직 한개이다. 뿐만 아니라 $k=2$ 이상일 경우에도 오차 신호의 $2k$ 승 평균은 계수 벡터의 볼록 함수이므로 local minima가 생기지 않는다. 실제로 예리의 $2k$ 승 함수의 Hessian 행렬은 positive-definite거나 positive-semidefinite 임을 알 수 있다^[11].

본 논문에서는 입력 신호가 복소 정현파 신호로 구성되고 추정 잡음이 가우시안 확률 밀도 함수를 갖을 때 LMS 및 LMF 알고리즘의 계수 추정 오차의 평균 및 합분산 수렴 특성을 새로운 해석 기법을 적용하여 이론적으로 분석하였다. 또한, LMF 알고리즘의 경우 기존 Walach와 Widrow의 수렴 특성 분석에서는 이루어지지 않았던 오차 신호에 대한 2차 모멘트의

과도기 상태 수렴 특성을 본 논문에서 새로이 제시하였다. Walach와 Widrow^[1]는 LMF 알고리즘을 적응 플랜트 모델링 문제에 적용하여 계수 추정 오차 벡터의 평균 및 분산에 대하여 해석하였다. 먼저 계수 추정 오차 벡터의 평균에 대해 계수 추정 오차 벡터의 고차항을 무시하여 근사화하였고, 계수 추정 오차 벡터의 분산에 대해서는 근사화된 계수 추정 오차의 1차 모멘트로부터 수렴 상수 μ 가 작을 때 입력 신호, 계수 추정 오차의 분산, 측정 잡음 그리고 수렴 상수 간의 곱셈항을 무시하여 간략한 후 정상 상태 값만 해석하였는데, 측정 잡음이 가우시안 분포를 가질 경우를 제외하고는 LMF 알고리즘이 LMS 보다 성능이 우수하다고 주장하였다.

서론에 이어 II장은 입력 신호가 복수 정현파로 구성될 때 적응 디지털 필터에 대해 설명하였고, III장과 IV장은 각각 LMF 알고리즘에 대한 수렴 분석 및 컴퓨터 모의 실험 결과를 나타냈다. 그리고 V장에서 결론을 맺었다.

II. 입력 신호가 복수 정현파로 구성된 적응 디지털 필터

단일 정현파 입력신호에 대한 TDL(Tap-Delayed-Line) 구조를 갖는 적응 디지털 필터의 형태는 단지 두개의 탭(tap)만이 필요하다^[3,6]. 즉 단일 정현파 신호의 위상 및 크기 추정에 필요한 적응 계수 차수는 2이다. 이 중에서도 입력 신호에 대한 첫번째와 두번째 적응 계수 사이의 지연(delay)의 위상이 90°일 때 자기 상관 행렬(auto correlation matrix)의 고유치 분포율(eigenvalue spread ratio)이 1이 되어 수렴 속도가 가장 빠르다^[2]. 따라서, 입력 신호가 복수 정현파 신호일 때 그림 2와 같이 적응 필터 시스템을 모델할 수 있다.

입력 신호가 M 개의 복합 정현파로 구성될 때 입력 신호와 희망 신호 사이의 경로를 그림 2의 상부와 같이 동상(inphase : I) 및 직교 위상(quadrature : Q) 계수로 표현할 수 있다. m 번째 정현파 입력 신호에서 적응 필터 구조는 각각의 입력 신호 $x_{I,m}(n)$ 과 $x_{Q,m}(n)$ 에 대하여 두개의 적응 계수 $w_{I,m}(n)$, $w_{Q,m}(n)$ 을 갖는다.

따라서 m 번째 필터 출력 $y_m(n)$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

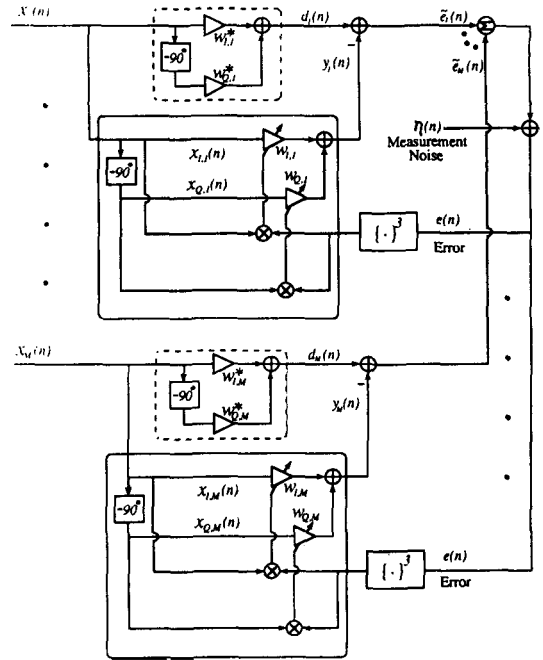


그림 2. 입력신호가 복수 정현파로 구성된 적응 디지털 필터.
Fig. 2. Adaptive digital filter for a multiple sinusoidal input under study

$$y_m(n) = w_{I,m}(n)x_{I,m}(n) + w_{Q,m}(n)x_{Q,m}(n) \quad (7)$$

여기에서

$$x_{I,m}(n) = A_m \cos(\omega_m n + \phi_m) \triangleq A_m \cos \Psi_m(n),$$

$$x_{Q,m}(n) = A_m \sin(\omega_m n + \phi_m) \triangleq A_m \sin \Psi_m(n),$$

m : 가지 지수(branch index) = 1, 2, 3, ..., M ,

n : 이산 시간 지수,

A : 진폭,

ω_m : 정규화된 주파수,

ϕ_m : 랜덤 위상이다.

또한, 그림 3의 신호 표시를 참조하면 오차 신호 $e(n)$ 은 다음과 같다.

$$e(n) = \sum_{m=1}^M [d_m(n) - y_m(n)] + \eta(n) \\ = - \sum_{m=1}^M A_m [(w_I(n) - w_I^*) \cos \Psi_m(n)$$

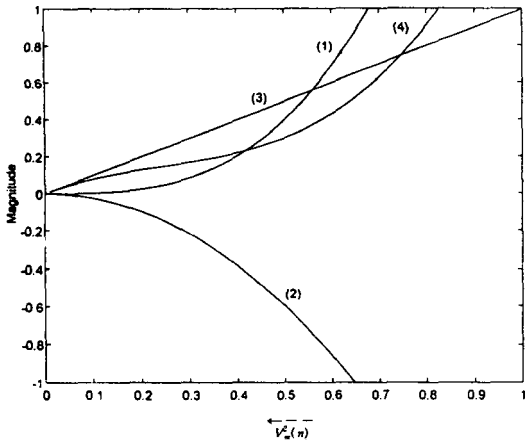


그림 3. 과도기 상태에서 LMF 알고리즘의 계수 추정 오차 합분산에 대한 수렴 곡선.

(1) $V_m^6(n)$ 항. (2) $V_m^4(n)$ 항. (3) $V_m^2(n)$ 항. (4) 총합.

Fig. 3. Learning curves for the LMF algorithm of the summed variance of weight errors at the transient state.

(1) $V_m^6(n)$ term. (2) $V_m^4(n)$ term.
(3) $V_m^2(n)$ term. (4) total.

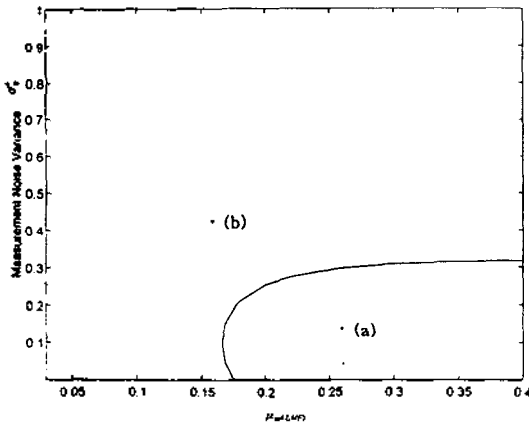


그림 4. 과도기 상태에서 LMF 알고리즘의 계수 추정 오차 합분산에 대한 지배항 판정도.

Fig. 4. Dominant term decision diagram for the LMF algorithm of the summed variance of weight errors at the transient-state.

$$+ \{w_q(n) - w_q^*\} \sin \Psi_m(n) \} + \eta(n) \quad (8)$$

따라서 (4)로부터 m 번째 정현파 입력 신호에 대한 필터 계수 갱신 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$w_{l,m}(n+1) = w_{l,m}(n) + \mu_m k e^{2k-1}(n) x_{l,m}(n),$$

그리고

$$w_{q,m}(n+1) = w_{q,m}(n) + \mu_m k e^{2k-1}(n) x_{q,m}(n). \quad (9)$$

(9)에서 $k=2$ 일 때, 즉 $e^4(n)$ 을 최소화하는 계수 방정식을 다음과 같이 얻는다.

LMF 알고리즘

$$w_{l,m}(n+1) = w_{l,m}(n) + 2\mu_m e^3(n) x_{l,m}(n),$$

그리고

$$w_{q,m}(n+1) = w_{q,m}(n) + 2\mu_m e^3(n) x_{q,m}(n). \quad (10)$$

다음에는 LMF 알고리즘의 추정 오차 평균 및 합분산에 대한 수렴 특성을 새로운 해석기법을 이용하여 과도기 상태와 정상 상태로 구분하여 분석한 후 고찰한다.

III. 수렴 분석

1. 계수 추정 오차(weight error)의 평균

(10)과 같이 유도한 LMF 알고리즘이 어떻게 수렴하는지를 보기 위해 먼저 적응 필터 계수들의 평균값에 대한 수렴 특성을 조사한다. 그림 2의 신호 모델로부터 $E[w_{l,m}(n)]$ 와 $E[w_{q,m}(n)]$ 은 수렴하는 조건을 만족하는 경우 정상 상태에 이르면 각각 $w_{l,m}^*$ 와 $w_{q,m}^*$ 에 도달한다. 따라서 수렴 방정식을 간단히 하기 위해 다음과 같이 계수 추정 오차 $v_{l,m}(n)$ 및 $v_{q,m}(n)$ 정의한다.

$$v_{l,m}(n) \triangleq w_{l,m}(n) - w_{l,m}^* \quad \text{그리고} \quad v_{q,m}(n) \triangleq w_{q,m}(n) - w_{q,m}^*. \quad (11)$$

한편, (11)을 (10)에 대입하면 계수 추정 오차 $v_{l,m}(n)$, $v_{q,m}(n)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$v_{l,m}(n+1) = v_{l,m}(n) + 2\mu_m e^3(n) x_{l,m}(n),$$

그리고

$$v_{Q, m}(n+1) = v_{Q, m}(n) + 2\mu_m e^3(n) x_{Q, m}(n). \quad (10)$$

또한, (7)과 (8)을 (12)에 대입하여 정리한 후, 입력 신호 $x_m(n)$, 측정 잡음 $\eta(n)$, 그리고 계수 추정 오차 $v_{i, m}(n)$ 과 $v_{Q, m}(n)$ 사이의 관계가 서로 독립적이라고 가정한 후 양변에 통계적 평균을 취하면 다음과 같은 계수 추정 오차 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} E[v_{i, m}(n+1)] &= (1-3\mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2) E[v_{i, m}(n)] \\ &\quad - \frac{3}{4} \mu_m A_m^4 E[v_{i, m}^3(n)] \\ &\quad - \frac{3}{4} \mu_m A_m^4 E[v_{i, m}(n)] E[v_{Q, m}^2(n)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[v_{Q, m}(n+1)] &= (1-3\mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2) E[v_{Q, m}(n)] \\ &\quad - \frac{3}{4} \mu_m A_m^4 E[v_{Q, m}^3(n)] \\ &\quad - \frac{3}{4} \mu_m A_m^4 E[v_{i, m}^2(n)] E[v_{Q, m}(n)]. \end{aligned} \quad (13)$$

(13)에서 $E[v_{i, m}(n)]$ 과 $E[v_{Q, m}(n)]$ 의 2차 이상의 고차 모멘트항은 1차 모멘트항에 비하여 급격히 감소한다. 따라서 2차 이상 고차항을 무시하면 다음을 얻는다.

$$E[v_{i, m}(n+1)] \cong (1-3\mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2) E[v_{i, m}(n)] \quad (14)$$

여기에서 $i = I$ 그리고 Q 이다.

(14)에서 볼 수 있듯이, 계수 추정 오차의 평균은 아래의 조건하에서 단조 감소하여 결국 0으로 수렴한다.

$$\begin{aligned} &|1-3\mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2| < 1, \\ 0 < \mu_m < \frac{2}{3 A_m^2 \sigma_\eta^2} \quad \text{또는} \quad 0 < x_{m, f} < 1. \end{aligned} \quad (15)$$

여기에서 $x_{m, f} \cong \frac{3}{2} \mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2$ 으로 정의한다.

지수적 수렴(exponential sequence)의 시정수 τ 는 충분히 큰 시정수 τ 영역에서 다음과 같이 단순화되어 유도된다^[3].

$$\begin{aligned} e^{-1/\tau_{m, f}} &\cong 1 - \frac{1}{\tau_{m, f}} \\ &= |1 - \frac{1}{2} \mu_m A_m^2| \end{aligned} \quad (16)$$

(16)으로 부터 다음과 같이 시정수를 얻는다.

$$\begin{aligned} \tau_{m, f} &= \frac{1}{\mu_m A_m^2} \\ &= \frac{1}{2 x_{m, f}} \end{aligned} \quad (17)$$

2. 계수 추정 오차의 합분산(summed variance of weight errors)

다음은 평균 제곱 에러(mean-square-error : MSE) $E[e^2(n)]$ 를 조사한다. (8)과 (11)을 이용하면 MSE는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= \sum_{m=1}^M e_m^2(n) + \sigma_\eta^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M A_m^2 \xi_m(n) + \sigma_\eta^2 \end{aligned} \quad (18)$$

여기에서

$$\xi_m(n) \cong E[v_{i, m}^2(n)] + E[v_{Q, m}^2(n)],$$

$$\sigma_\eta^2 \cong E[\eta^2(n)] \quad \text{이다.}$$

평균 제곱 에러 $E[e^2(n)]$ 의 수렴 연구는 자승 계수 추정 오차의 합 $\xi_m(n)$ 을 연구하는 것과 직결되어 있음을 (18)에서 알 수 있다.

한편, (7)과 (8)을 (12)에 대입하여 제곱하여, 입력 신호 $x_m(n)$, 측정 잡음 $\eta(n)$, 그리고 계수 추정 오차 $v_{i, m}(n)$ 과 $v_{Q, m}(n)$ 사이의 관계가 서로 독립적이라고 가정한 후 양변에 통계적 평균을 취하면 두개의 방정식 $E[v_i^2(n+1)]$, $E[v_Q^2(n+1)]$ 을 얻을 수 있다. 상기 두 방정식이 서로 대칭이므로 더한 후 $E[v_{i, m}^2(n+1)] \cong E[v_{Q, m}^2(n+1)]$ 이라고 근사화 하자. 따라서 계수 추정 오차의 2차 모멘트 방정식을 간단하게 하기 위하여 아래 첨자 I, Q 를 제거한 후 정리하면 다음을 얻는다.

$$E[v_m^2(n+1)] = \frac{5}{4} \mu_m^2 A_m^8 (E[v_m^6(n)])$$

$$\begin{aligned}
& + 3E[v_m^2(n)]E[v_m^4(n)] \\
& - \frac{3}{2}\mu_m A_m^4 \{E[v_m^4(n)] + (E[v_m^2(n)])^2\} \\
& - \frac{45}{2}\mu_m^2 A_m^6 E[\eta^2(n)] \{E[v_m^4(n)] + (E[v_m^2(n)])^2\} \\
& + \{1 - 6\mu_m A_m^2 E[\eta^2(n)] + 30\mu_m^2 A_m^4 E[\eta^4(n)]\} E[v_m^2(n)] \\
& + 2\mu_m^2 A_m^2 E[\eta^6(n)]. \tag{19}
\end{aligned}$$

$\eta(n)$ 은 평균이 0인 가우시안이고, 적응계수 $w_{l, m}(n)$, $w_{0, m}(n)$ 이 가우시안 랜덤 변수이라고 가정하면 계수 추정 오차 $v_m(n)$ 은 또한 가우시안 랜덤 변수이다. 따라서 (19)는 $E[v_m^{2k}(n)]$ 을 $E[v_m^2(n)]$ 항으로 표현하여 간략화 시킬 수 있다. 여기에서 K 는 양의 정수이다. $E[v_m(n)]$ 은 비록 급격히 감소하지만 처음부터 0이 아니므로 평균이 0인 가우시안 랜덤 변수 $\Delta w_m(n)$ 과 이것의 분산을 다음과 같이 도입한다.

$$\Delta w_m(n) \triangleq v_m(n) - V_m(n),$$

$$\text{그리고 } E[v_m^2(n)] = V_m^2(n) + \rho_m^2(n) \tag{20}$$

여기에서 $V_m(n) \triangleq E[v_m(n)]$ 이고 $\rho_m^2(n) \triangleq E[\Delta^2 w_m(n)]$ 이다.

(20)으로 부터 $E[v_m^2(n)]$ 는 처음부터 정상 상태에 도달 이전까지 즉, 과도기 상태에서는 $\rho_m^2(n)$ 은 $V_m^2(n)$ 보다 상대적으로 매우 작아 무시되므로 $V_m^2(n)$ 만 고려되고, 정상 상태에서는 반대로 $V_m^2(n)$ 이 $\rho_m^2(n)$ 보다 상대적으로 매우 작아 무시되므로 $\rho_m^2(n)$ 만 고려될 수 있다. 한편, (20)을 (19)에 대입하여 가우시안 랜덤 변수의 $E[v_m^{2k}(n)]$ 과 $E[v_m^2(n)]$ 사이의 관계^[12]를 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
V_m^2(n+1) + \rho_m^2(n+1) &= 6\mu_m^2 A_m^8 \{V_m^6(n) + 9\rho_m^2(n)V_m^4(n) \\
&+ 18\rho_m^4(n)V_m^2(n) + 6\rho_m^6(n)\} \\
&- (3\mu_m A_m^4 - 45\mu_m^2 A_m^6 \sigma_\eta^2) \{V_m^4(n) + 4\rho_m^2(n)V_m^2(n) \\
&+ 2\rho_m^4(n)\} + (1 - 6\mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2 + 90\mu_m^2 A_m^4 \sigma_\eta^4) \\
&\{V_m^2(n) + \rho_m^2(n)\} + 30\mu_m^2 A_m^2 \sigma_\eta^6. \tag{21}
\end{aligned}$$

(1) 과도기 상태 수렴

수렴 방정식 (21)은 두가지 경우에 대하여 연구할 수 있다. 먼저 과도기 상태에서는 $\rho_m^{2k}(n)$ 과 (21)의 마지막 항은 무시할 수 있다. 그러므로 다음과 같은 과도기 수렴 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
V_m^2(n+1) &\cong 5\mu_m^2 A_m^8 V_m^6(n) - (3\mu_m A_m^4 - 45\mu_m^2 A_m^6 \sigma_\eta^2) \\
V_m^4(n) &+ (1 - 6\mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2 + 90\mu_m^2 A_m^4 \sigma_\eta^4) V_m^2(n). \tag{22}
\end{aligned}$$

수렴 상수 μ_m 이 0.2, 입력 신호의 크기 A_m 은 $\sqrt{2}$ 이고 그리고 측정 잡음 신호의 분산 σ_η^2 이 0.001 일 때 계수 추정 오차 합분산의 과도기 상태 수렴 곡선 (22)를 그림 3에 나타냈다. 구체적으로 (22)의 우변을 각 항별로 분리하여 고찰하면 첫번째 $V_m^6(n)$ 항과 마지막 $V_m^2(n)$ 항은 양수값을 가지고 출발하여 0으로 감소한다. 그러나 두번째 $V_m^4(n)$ 항은 음수값을 가지고 출발하여 0으로 감소한다. 따라서 (22)의 우변은 극단적인 경우에 있어서 $V_m^6(n)$ 항 또는 $V_m^2(n)$ 항중 어느 한 항이 지배적이다. 이 두항 값이 같을 때, 이 때의 $V_m^2(n)$ 값을 $V_{m, th}^2$ 한다면 $V_{m, th}^2$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_{m, th}^2 = \sqrt{\frac{1 - 6\mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2 + 90\mu_m^2 A_m^4 \sigma_\eta^4}{5\mu_m^2 A_m^8}} \tag{23}$$

(22)는 $V_m^2(n)$ 이 $V_{m, th}^2$ 보다 클 때는 처음 $V_m^6(n)$ 항이 지배적으로 작용하며, $V_{m, th}^2$ 보다 작을 때는 마지막 $V_m^2(n)$ 항이 지배적으로 작용한다. 그림 4는 일례로 $V_{m, th}^2 = 0.8$ 일 때 처음 $V_m^6(n)$ 항과 마지막 $V_m^2(n)$ 항 중 어느 항이 지배적인가를 보기위해 수렴 상수 μ_m 과 측정 잡음의 분산 σ_η^2 을 영역으로 하여 나타냈다. 점 (a)는 처음 $V_m^6(n)$ 항이, 그리고 점 (b)는 마지막 $V_m^2(n)$ 항이 지배적으로 작용하는 영역이다. 그러므로 과도기 수렴 방정식 (22)는 다음과 같이 고려될 수 있다.

$$V_m^2(n+1) \cong \begin{cases} 5\mu_m^2 A_m^8 V_m^6(n), \\ V_m^2(n) \gg V_{m, th}^2 & \tag{24a} \\ (1 - 6\mu_m A_m^2 \sigma_\eta^2 + 90\mu_m^2 A_m^4 \sigma_\eta^4) V_m^2(n), \\ V_m^2(n) \ll V_{m, th}^2. & \tag{24b} \end{cases}$$

한편, (24)로부터 안정 조건 및 시정수를 구할 수 있다. (24a)는 수열의 일반항 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$V_m^2(n) = \{5 \mu_m^2 A_m^4\}^{(3^n-1)/2} \{V_m^2(0)\}^{3^n} \\ = \frac{1}{\sqrt{5} \mu_m A_m^4} \{\sqrt{5} \mu_m A_m^4 V_m^2(0)\}^{3^n} \quad (25)$$

따라서 (25)는 다음 조건하에서 안정된다.

$$|\sqrt{5} \mu_m A_m^4 V_m^2(0)| < 1, \\ 0 < \mu_m < \frac{1}{\sqrt{5} A_m^4 V_m^2(0)} \quad (26)$$

(26)의 안정 조건에서 특기할 사항으로 입력신호의 크기뿐만 아니라 계수 추정 오차의 초기값에 의해 제한됨을 알 수 있다. 그리고 과도기 수렴 방정식 (24a)는 등비수열이 아님으로 시정수를 정의할 수 없다^[3].

또한, (24b)는 다음 조건을 만족하면 안정된다.

$$|1 - 6 \mu_m A_m^2 \sigma_n^2 + 90 \mu_m^2 A_m^4 \sigma_n^4| < 1, \\ 0 < \mu_m < \frac{1}{15 A_m^2 \sigma_n^2} \quad \text{또는} \quad 0 < x_{m,s} < 1. \quad (27)$$

여기에서 $x_{m,s} \triangleq 15 \mu_m A_m^2 \sigma_n^2$ 로 정의한다.

(16)과 (24b)로부터 시정수는 다음과 같이 얻는다.

$$\tau_{m,s} = \frac{1}{6 \mu_m A_m^2 \sigma_n^2 \{1 - 15 \mu_m A_m^2 \sigma_n^2\}} \\ = \frac{5}{2 x_{m,s} (1 - x_{m,s})} \quad (28)$$

(2) 정상 상태 수렴

수렴 방정식 (21)은 정상 상태에서는 $V_m^2(n)$ 는 아주 작아지고 $\rho_m^4(n)$ 과 $\rho_m^6(n)$ 을 포함하는 항은 제거할 수 있으므로 다음과 같이 근사화 된다.

$$\rho_m^2(n+1) \approx (1 - 6 \mu_m A_m^2 \sigma_n^2 + 90 \mu_m^2 A_m^4 \sigma_n^4) \rho_m^2(n) \\ + 30 \mu_m^2 A_m^2 \sigma_n^4. \quad (29)$$

따라서 계수 추정 오차 합분산의 정상상태 값 $\xi_m(\infty)$ 는 $2\rho_m(\infty)$ 이므로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\xi_m(\infty) = 2\rho_m(\infty) = \frac{10 \mu_m \sigma_n^4}{1 - 15 \mu_m A_m^2 \sigma_n^2}$$

$$= \frac{2 x_{m,s} \sigma_n^2}{3 A_m^2 (1 - x_{m,s})} \quad (30)$$

(3) LMF 및 LMS 알고리즘간 성능 비교

적용 알고리즘간의 성능 비교 평가 방법에는 통상 두가지 방법이 주로 이용되는데 첫번째는 알고리즘의 정상 상태의 값을 동일하게 놓은 후 수렴 속도를 비교 평가하는 방법과 나머지 한 방법은 알고리즘의 수렴 속도(통상적으로 시정수를 도입)를 동일하게 놓은 후 정상상태의 값을 비교하는 평가 방법이 사용된다. LMS 알고리즘의 계수 추정 오차 합분산의 수렴 방정식은 등비 수열로 시정수를 정의할 수 있는 반면 LMF 알고리즘의 계수 추정 오차 합분산은 일반적으로 등비 수열이 아님으로 시정수를 정의할 수 없다. 따라서 LMS 알고리즘의 계수 추정 오차에 대한 정상 상태값을 LMF 경우처럼 분석하여 얻은후 두 적용 알고리즘의 정상 상태 값을 아래와 같이 동일하게 놓은 후 수렴 속도를 비교 평가한다.

$$\xi_{m(LMF)}(\infty) = \xi_{m(LMS)}(\infty) \\ \frac{10 \mu_{m(LMF)} \sigma_n^2}{1 - 15 \mu_{m(LMF)} A_m^2 \sigma_n^2} = \frac{\mu_{m(LMS)} \sigma_n^2}{1 - \frac{1}{2} \mu_{m(LMS)} A_m^2} \quad (31)$$

수렴 방정식의 안정조건을 만족시키는 수렴 상수 $\mu_{m(LMF)}$, $\mu_{m(LMS)}$ 를 갖을때 양변 분모의 각각 두번째 항은 첫번째항에 비하여 상대적으로 무시할 정도로 값이 작으므로 (31)은 다음과 같이 근사화된다.

$$\mu_{m(LMF)} = \frac{\mu_{m(LMS)}}{10 \sigma_n^2} \quad (32)$$

IV. 모의 실험 결과

본 절은 III절의 LMF 알고리즘에 대한 이론 분석에 덧붙여서 컴퓨터 모의 실험 결과를 나타냈다. 두개의 정현파로 구성된 복수 정현파인 경우를 생각한다. 첫번째, 두번째 정현파 신호의 주파수는 각각 120 Hz, 240 Hz 이고 표본화 주파수는 2 KHz 로 선택하였고 입력 신호 $x(n)$ 및 회망 신호 $d(n)$ 는 다음과 같다.

$$x(n) = \sum_{m=1}^2 A_m \cos(\omega_m n + \phi_m) \\ = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{240\pi n}{2000} + \phi_1\right) + \cos\left(\frac{480\pi n}{2000} + \phi_2\right) \right\},$$

$$d(n) = \sum_{m=1}^2 \{w_{i,m} x_{i,m} + w_{0,m} x_{0,m}\}$$

$$= 0.6 x_{i,1}(n) - 0.1 x_{0,1}(n) + 0.3 x_{i,2}(n) - 0.3 x_{0,2}(n).$$
(33)

평균이 0인 측정 잡음 $\eta(n)$ 의 분산은 0.001과 1로 시뮬레이션을 하였다. 또한 초기 적응 웨이트 값은 모두 0으로 하였다. 컴퓨터 모의 실험 결과 양상불 평균은 1,000번씩 독립적으로 실행하여 얻었다.

그림 5는 $\mu_{(LMF)} = 0.2$ 이고 $\sigma_{\eta}^2 = 0.001$ 일 때 LMF 알고리즘에 대한 계수 추정 오차 합분산의 수렴 곡선을 $V_{i,1}^2(n) + V_{0,1}^2(n)$ 과 $\rho_{i,1}^2(n) + \rho_{0,1}^2(n)$ 으로 구분하여 모의 실험을 통해 얻은 결과를 나타냈다. 과도기 상태에서는 $V^2(n)$ 이 지배적이며 정상 상태에서는 $\rho^2(n)$ 이 지배적임을 알 수 있었다.

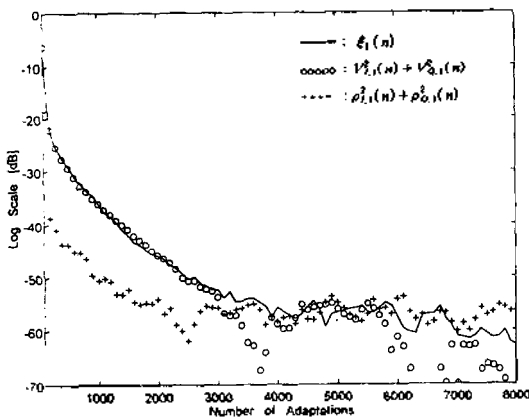


그림 5. $V^2(n)$ 과 $\rho^2(n)$ 으로 구분한 LMF 알고리즘의 계수 추정 오차 합분산 수렴곡선.

Fig. 5. Learning curves for the LMF algorithm of the summed variance of weight errors when the convergence behaviors are divided between $V^2(n)$ and $\rho^2(n)$.

LMF 및 LMS 알고리즘의 수렴 특성에 대해 모의 실험을 통해 비교 평가했다. 두 알고리즘의 정상 상태 값을 동일하게 놓은 후 수렴 속도를 비교하였다. 즉 주어진 측정신호의 분산에 대하여 (32)를 만족하는 LMF 및 LMS 알고리즘의 수렴 상수를 선택하였다. 구체적으로 σ_{η}^2 가 각각 0.001 및 1이고 $\mu_{(LMS)}$ 가 0.002일 때 두 알고리즘의 정상 상태 값이 같도록 $\mu_{(LMF)}$ 를

0.2와 0.0002로 선택하였다. 그림 6은 위의 파라미터 값을 갖을 때 모의 실험을 통해 얻은 LMF 및 LMS의 계수 추정 오차 합분산의 수렴 특성 곡선을 비교하여 나타냈다. V_{th}^2 가 1보다 충분히 작을 경우는 LMF 알고리즘의 초기 수렴은 LMS 알고리즘에 비해 매우 빨랐으며 곧이어 LMS 처럼 logarithm scale 상에서 거의 선형적으로 수렴한 반면, V_{th}^2 가 매우 클 경우는 LMF 알고리즘은 LMS 보다 약간 느리면서 선형적으로 수렴했다.

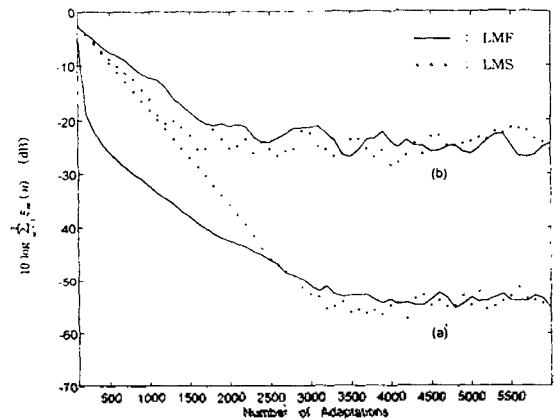


그림 6. LMF 및 LMS 알고리즘의 계수 추정 오차 합분산 수렴 특성 비교.

- (a) $\mu_{(LMS)} = 0.002$, $\mu_{(LMF)} = 0.2$, $\sigma_{\eta}^2 = 0.001$
그리고 $V_{th}^2 = 0.558$.
- (b) $\mu_{(LMS)} = 0.002$, $\mu_{(LMF)} = 0.0002$, $\sigma_{\eta}^2 = 1$
그리고 $V_{th}^2 = 558$.

Fig. 6. Comparison of the LMF and LMS algorithm learning curves of the summed variance of weight errors.

- (a) $\mu_{(LMS)} = 0.002$, $\mu_{(LMF)} = 0.2$, $\sigma_{\eta}^2 = 0.001$
and $V_{th}^2 = 0.558$.
- (b) $\mu_{(LMS)} = 0.002$, $\mu_{(LMF)} = 0.0002$, $\sigma_{\eta}^2 = 1$
and $V_{th}^2 = 558$.

V. 결 론

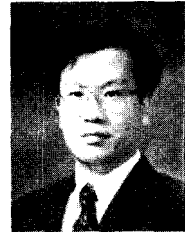
입력 신호가 복수 정현파 신호로 구성되고 측정 잡음이 가우시안일 때 계수 추정 오차의 합분산에 대한 수렴 특성을 과도기 상태와 정상 상태로 분리하여 새롭게 해석한 결과 과도기 상태에서는 $V^2(n)$ 이, 정상 상태에서는 $\rho^2(n)$ 이 지배적으로 작용하였다. 또한,

LMF 알고리즘의 과도기 수렴 특성은 가우시안 측정 잡음의 분산과 수렴 상수의 크기에 따라 다음 두가지 경우로 특징지어졌다: (1) LMF 알고리즘의 초기 수렴은 LMS에 비해 매우 빨랐으며 곧이어 LMS처럼 logarithm scale 상에서 거의 선형적으로 수렴한다: (2) LMF 알고리즘의 수렴은 LMS보다 약간 느리면서 선형적으로 수렴한다. 결론적으로 가우시안 측정 잡음의 분산과 수렴 상수의 크기에 따라 서로 다른 수렴 특성을 나타낼 수 있었다. 이러한 결과는 기존 Walach와 Widrow의 분석 기법으로서는 알 수가 없었다.

참 고 문 헌

1. E. Walach and B. Widrow, "The Least Mean Fourth (LMF) Adaptive Algorithm and Its Family," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 30, No. 2, pp. 275-283, March 1984.
2. N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing Time Series with Engineering Application: The MIT Press*, 1949.
3. B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing: Prentice-Hall*, 1985.
4. C. P. Kwong, "Dual Sign Algorithm for Adaptive Filtering," *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 34, No. 12, pp. 1272-1275, Dec. 1986.
5. S. Dasgupta and C. R. Jhonson, "Some Comments on the Behavior of Sign-sign Adaptive Identifiers," *System and Letters*, Vol. 7, pp. 75-82, April 1986.
6. B. Widrow, J. R. Glover, J. M. McCool et al., "Adaptive Noise Cancelling Principles and Applications," *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 1692-1716, Dec. 1975.
7. W. A. Harrison et al., "A New Application of Adaptive Noise Cancellation," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 34, No. 1, pp. 21-27, 1986.
3. D. D. Falconer, "Adaptive Reference Echo Cancellation," *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 30, No. 9, pp. 2083-2094, Sept. 1982.
9. A. Kanemasa and K. Niwa, "An Adaptive-step Sign Algorithm for Fast Convergence of a Data Echo Canceller," *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 35, No. 10, pp. 1102-1108, October 1987.
10. P. F. Adam, "Adaptive Filtering in Communications," Chap. 8. *Adaptive Filters*, edited by C. F. N. Cowan and P. M. Grant, Prentice Hall, 1985.
11. A. Gersho, "Some Aspects of Linear Estimation with Non-Mean-Square Error Criteria," *Proc. Asilomar Ckts. and System Conf.*, 1969.
12. J. S. Bendat, *Nonlinear System Analysis and Identification from Random Data: Jhon Wiley & Sons*, 1990.

▲李 康 昇(Kang Seung Lee) 1963年 9月 28日生



1985年 2月: 연세대학교 전자공학과 졸업

1991年 2月: 연세대학교 전자공학과 석사 학위 취득

1991年 3月~현재: 연세대학교 전자공학과 박사과정 재학 중

※주관심분야: 능동 소음 제어 및 적응 신호 처리 등임

▲李 在 天(Jae Chon Lee)

第 7卷 4號 參照

현재: 아주대학교 시스템공학과 교수

▲尹 大 熙(Dae Hee Youn)

第 13卷 1號 參照

현재: 연세대학교 전자공학과 교수