▩ 연구논문

다중 반응표면분석에서의 최적화 문제에 관한 연구[†]

유정빈
서원대학교 응용통계학과

A Study on Simultaneous Optimization of Multiple Response Surfaces

Jeong-Bin Yoo
Dept. of Applied Statistics, Seowon University

Abstract

A method is proposed for the simultaneous optimization of several response fuctions that depend on the same set of controllable variables and are adequately represented by a response surface model (polynomial regression model) with the same degree and with constraint that the individual responses have the target values. First, the multiple responses data are checked for linear dependencies among the responses by eigenvalue analysis. Thus a set of responses with no linear functional relationships is used in developing a function that measures the distance estimated responses from the target values.

We choose the optimal condition that minimizes this measure. Also, under the different degree of importance two step procedures are proposed.

1. 서론

산업현장이나 과학적 실험을 필요로 하는 많은 분야의 실험에서 일단의 조정변수들 (controllable variables)에 의한 반응치(response)가 하나 이상인 경우가 종종 발생한다.

† 이 논문은 1993년도 한국 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

이러한 경우에 각각의 반응변수를 독립적으로 다룬 후 공통 최적 조건을 찾을 경우 상당한 문제가 발생하게 된다. 이것은 각 반응치들 간에 발생하는 종속관계 때문으로 이러한 종속관계에 대한 적절한 조치가 반드시 필요하다.

다반응(multiple responses)이 존재할 때 최적조건을 찾는 문제에 대해서는 많은 연구가 수행되었다. Lind등(1960)은 반응 등고선을 이용한 방법을 사용하였고, Harrington(1965)과 Derringer와 Suich(1980)는 다반응 문제에서의 성능측도로서 호감도 함수(desirability function)를 제안하였다. 또 다른 방법은 Khuri와 Conlon(1981)에 의하여 제시되었다. 그들은 반응변수들간의 상관관계를 Box, Hunter, MacGregor와 Erjavec(1973)에서 제안한 고유치 분석(eigenvalue analysis)으로 조사하여 반응변수들 간의 선형 종속관계가 존재한다면, 종속관계를 발생시키는 변수를 제거한 후 계수 추정을 하여 각 반응변수의 추정치 $\hat{y}_i(\underline{x})$와 그 추정치의 이상치 ϕ_i와의 거리 측도(distance measure)를 최소화 시키는 동시 최적화(simultaneous optimization)방법을 제안하였다. 이 방법에서 주목할 것은 이상치 ϕ_i들이 모두 확률 벡터(random vector)라는 사실이다. 따라서 이 논문에서는 ϕ_i들의 임의성을 고려하여 거리측도의 상한을 최소화하는 방법을 제안 하였다. 그런데 이 거리측도를 사용한 동시 최적화 방법의 단점은 Fichtali, Voort와 Khuri(1990)의 논문에 발표된 것과 같이 반응변수들에 제한조건이 있는 경우에는 적절하지 못할 수 있으며 이 경우 조정변수들의 구간을 단계적으로 변화시켜 가면서 SAS에서 PROC RSREG를 이용하여 최적조건을 찾는 것이 바람직함을 보였다.

본 연구는 제한 조건으로 확률 벡터가 아닌 목표치(target value)가 정해진 경우에 Fichtai등(1990)에서 사용한 방법인 단계적으로 조정변수들의 구간을 달리하여 최적 반응조건을 찾지 않고 Khuri등(1981)의 거리측도를 직접 사용하여 동시 최적 반응조건을 구하는 방법을 제안하였고, 각 반응들의 중요도(선호도)가 다른 상황에서의 최적화 방법을 고찰 하였다.

2. 다반응 모형과 추정

2.1 다반응 모형(Multiple Responses Model)

k개의 적절히 선형변환된 조정 변수들(coded variables) $\underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$의 각 집합에서 얻어진 r개의 반응함수 $Y' = (Y_1' : Y_2' : \cdots Y_r')_{nr \times 1}$이 있고, n번의 실험이 시행되었을 때 i번째 반응 Y_i의 모형을 다음과 같이 설정하자.

$$Y_i = F_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{2-1}$$

여기서 $Y_i' = (y_{1i}, y_{2i}, \cdots, y_{ni})$의 관측 벡터이고, F_i는 p개의 미지의 계수 $\underline{\beta}_i$와 $n \times p$ 완전 열계수 행렬(full column rank matrix)인 X에 대한 선형모형(linear model)인 $X\underline{\beta}_i$이다. 특히 F_i는 크기가 $n \times 1$인 완전 열계수 행렬이며 주로 반응 표면 분석에서 사용되는 다항회귀 모형이다. 예를 들어 2차모형이라면 다음과 같은 모형이 된다.

$$F_i = \beta_{0(i)} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{j(i)} x_{j(i)} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj(i)} x_{j(i)}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=2}^{k} \beta_{jl(i)} x_{j(i)} x_{l(i)}.$$

덧붙여서 $\underline{\varepsilon}_i$에 대해 일반적으로 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} &E(\underline{\varepsilon}_i) = 0, \\ &Var(\underline{\varepsilon}_i) = \sigma_{ii} I_n, \quad i = 1, 2, \cdots, r \\ &Cov(\underline{\varepsilon}_i, \underline{\varepsilon}_j) = \sigma_{ij} I_n, \quad i, j = 1, 2, \cdots, r\,;\, i \neq j. \end{aligned} \tag{2-2}$$

(2-1)식과 같은 r개의 함수는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$Y = F + \underline{\varepsilon}. \tag{2-3}$$

여기서 $F = Z\beta$ 이며 $Z = diag(X,\ X,\ \cdots,\ X)$인 블럭-대각 행렬(block-diagonal matrix)이며 $\underline{\beta}' = (\underline{\beta}_1' : \underline{\beta}_2' : \cdots : \underline{\beta}_r')_{q\times 1}$, $q = pr$ 이다. 또한 $\underline{\varepsilon}' = (\underline{\varepsilon}_1' : \underline{\varepsilon}_2' : \cdots : \underline{\varepsilon}_r')_{nr\times 1}$ 이며, 역시 (2-2)의 확장으로 $\underline{\varepsilon}$에 대한 분산-공분산 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$Var(\underline{\varepsilon}) = \Sigma \otimes I_n.$$

여기서 $\Sigma = (\sigma_{ij})_{r\times r}$ 이고 $\otimes$는 행렬들의 직적(direct product 혹은 Kronecker product)이다. $Var(\underline{\varepsilon}) = (\sigma_{ij} I_n) = \Omega_{m\times m}$으로 나타내자.

2.2 추정(Estimation)

(2-3)의 모형에서 $\underline{\beta}$의 BLUE와 $\Sigma = (\sigma_{ij})$의 불편추정량은

$$\hat{\underline{\beta}} = (Z'\Omega^{-1}Z)^{-1} Z'\Omega^{-1} Y, \tag{2-4}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = Y_i'[I_n - X(X'X)^{-1}X']Y_j / n, \quad i, j = 1, 2, \cdots, r. \tag{2-5}$$

로 알려져 있다. (Khuri와 Conlon(1987))

(2-4)의 $\hat{\underline{\beta}}$는 직적의 연산방법을 이용하여 다음과 같은 형태로 변형된다.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\beta}} &= (Z'\Omega^{-1}Z)^{-1} Z'\Omega^{-1} Y \\ &= [Z'(\Sigma^{-1} \otimes I)Z]^{-1} [Z'(\Sigma^{-1} \otimes I)Y] \\ &= [\Sigma \otimes (Z'Z)^{-1}](\Sigma^{-1} \otimes Z'Y) \\ &= I \otimes (Z'Z)^{-1} Z'Y \\ &= (Z'Z)^{-1} Z'Y \end{aligned} \tag{2-6}$$

따라서 i번째 반응에 대한 추정된 계수 $\hat{\underline{\beta}}_i = (X'X)^{-1}X'Y_i$ 임을 알 수 있다.

3. 다반응 동시 최적화 (Simultaneous Optimization of Multiple Responses)

3.1 목표치가 존재할 때의 동시 최적화

서론에서 언급 했듯이 반응변수들 사이에 종속관계를 Box등(1973)이 제안한 고유치 분석을 이용하여 검토한 후 종속관계를 유발시키는 반응변수들을 제거하여 r개의 서로 독립적인 반응변수들 만이 존재하고, 각 반응들의목표치 $\underline{\tau}' = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_r)$이 존재한다는 제한 조건하에서 동시 최적화 방법을 살펴 보겠다.

i번째 반응의 추정식은 s차 다항 회귀식으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{y}_i(\underline{x}) = z'(\underline{x})\hat{\underline{\beta}}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{3-1}$$

여기서 $z'(\underline{x})$는 크기가 p인 행벡터로서 첫번째 원소는 1이고 나머지 $(p-1)$개는 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$의 적(power)이나 교차적(cross-power)의 형태인 다항 모형이다.

(3-1)의 추정식으로부터

$$Var[\hat{y}_i(\underline{x})] = z'(\underline{x})(X'X)^{-1}z(\underline{x})\sigma_{ii}, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$
$$Cov[\hat{y}_i(\underline{x}), \hat{y}_j(\underline{x})] = z'(\underline{x})(X'X)^{-1}z(\underline{x})\sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, r\,;\, i \neq j$$

임을 알 수 있고, r개의 추정식

$\hat{\underline{y}}(\underline{x}) = (\hat{y}_1(\underline{x}), \hat{y}_2(\underline{x}), \cdots, \hat{y}_r(\underline{x}))'$ 에 대하여

$\hat{y}_i(\underline{x}) = z'(x)\hat{\underline{\beta}}_i$ 이고,

$Var(\hat{\underline{\beta}}) = (\sigma_{ij}(X'X)^{-1})$ 이므로,

$$\widehat{Var}[\hat{\underline{y}}(\underline{x})] = z'(\underline{x})(X'X)^{-1}z(\underline{x})\hat{\Sigma} \text{ 이다.} \tag{3-2}$$

위와 같은 사실로부터 Khuri와 Conlon(1981)이 제안한 거리측도를 이용한 새로운 측도는 다음과 같다.

$$D(\underline{x}) = [\hat{\underline{y}}(\underline{x}) - \underline{\tau}]'\{\widehat{Var}[\hat{\underline{y}}(\underline{x})]\}^{-1}[\hat{\underline{y}}(\underline{x}) - \underline{\tau}]. \tag{3-3}$$

다반응에 대한 동시 최적화를 시키기 위해 (3-3)식을 최소로하는 $\underline{x}$를 찾는 것이 목적이다. (3-3)은 (3-2)를 사용하여 다음과 같이 변형된다.

$$D(\underline{x}) = [\hat{\underline{y}}(\underline{x}) - \underline{\tau}]'\hat{\Sigma}^{-1}[\hat{\underline{y}}(\underline{x}) - \underline{\tau}]/z'(\underline{x})(X'X)^{-1}z(\underline{x}). \tag{3-4}$$

따라서 홍미영역 R에서 목표치가 정해졌을 때의 다반응 동시 최적화 기준은 (3-4)식을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Min}_{x \in R}\, D(\underline{x}). \tag{3-5}$$

3.2 중요도가 다를 때 동시 최적화

r개의 반응변수에 대해 각각의 반응변수의 중요도가 다른 상황이 종종 발생한다. 예를 들어 실험자의 판단에 y_1 반응이 y_2 반응보다 중요하다고 생각되는 경우에 다반응 동시 최적화를 시키고자 할 때가 있다. 이러한 경우 위에서 제시한 (3-5)의 기준을 이용한 두가지 방법을 생각해 볼 수 있다. 첫번째로 생각할 수 있는 방법은 가중치를 각 반응마다 다르게 주어서 동시 최적화 시키는 것이다. 이때 (3-5)의 기준은 크기 r인 가중치 행렬(대각행렬) $W = diag(w_1, w_2, \cdots, w_r)$를 사용하면 다음과 같은 동시 최적화 기준으로 바뀐다.

$$\text{Min}_{x \in R}\, WD(\underline{x}), \tag{3-6}$$

여기서 $WD(\underline{x}) = [\,\hat{\underline{y}}(\underline{x}) - \underline{\tau}\,]' W' \hat{\Sigma}^{-1} W [\,\hat{\underline{y}}(\underline{x}) - \underline{\tau}\,] / z'(\underline{x})(X'X)^{-1} z(\underline{x})$ 이고,

$$\sum_{i=1}^{r} w_i = 1.$$

두번째 방법으로 각 반응의 중요도 차이를 $d_i(\underline{x}) = \hat{y}_i(\underline{x}) - \tau_i$의 차이로 해석할 수 있으므로 중요도 차이에 대한 $d_i(\underline{x})$들 간의 차이를 만족하는 새로운 홍미영역 (R^*)을 설정하여, 그 영역에서 (3-4)식을 최소화 시키는 방법을 생각할 수 있다. 예를들어 두 반응 중에서 y_1 반응이 y_2 반응보다 약 두배 가량 중요하다면 $d_1(\underline{x})$가 $d_2(\underline{x})$ 보다 두배 정도 적은 값을 갖도록 해야 할 것이다. 따라서 다음과 같은 식을 만족하는 새로운 홍미영역 (R^*)을 사용하여 동시 최적조건을 구할수 있다.

$$\text{Min}_{x \in R^*}\, D(\underline{x})$$

여기서 $R^* = \{\, \underline{x} : d_1(\underline{x}) < d_2(\underline{x}) \ \text{ and } \ x \in R \,\}$.

따라서 r개의 반응의 중요도가 연구자에 의해 결정되면 $d_i(\underline{x})$들의 적절한 대소 관계로 중요도를 나타내고, 그에 따라 새로운 홍미영역 R^*가 결정될 수 있다. 이 홍미영역에서 (3-5)의 기준을 적용하여 동시 최적화 조건을 찾는다. 즉,

$$\text{Min}_{x \in R^*}\, D(\underline{x}) \tag{3-7}$$

위의 두가지 방법 중에서 (3-7)은 Fichtali(1990)등이, 제한조건이 있을 때 동시 최적화 방법으로 $\underline{x}$를 단계적으로 변화 시켜서 최적조건을 찾는 방법과 유사하다. 또한 다음 4절

의 예에서 볼 수 있듯이 (3-6)의 기준은 가중치의 변화에 민감하게 반응하지 못함을 알 수 있다. 즉, (3-6)의 기준과 비교하여 (3-7)의 기준이 중요도의 민감한 차이에도 잘 반응함을 알 수 있다.

4. 기존 자료에의 적용

3절에서 소개된 동시 최적조건을 찾는 예로서 Khuri(1981)등에서 인용한 Schmidt (1979)등의 자료를 사용하겠다. 그들은 두개의 조정변수 x_1(cysteine)와 x_2(calcium chloride)가 네개의 반응변수 y_1(hardness), y_2(cohesiveness), y_3(springiness), y_4 (compressible water)에 미치는 영향을 조사한 자료로 네개의 반응들을 동시 최대로 하는 공정조건을 찾고자 하였다.

다음 〈표 1〉은 각각의 자료표로서 조정변수는 선형변환된 것이다.

〈 표 1 〉 실험계획과 반응치 자료

x_1	x_2	$y_1(kg)$	y_2	$y_3(mm)$	$y_4(g)$
−1	−1	2.48	0.55	1.95	0.22
1	−1	0.91	0.52	1.37	0.67
−1	1	0.71	0.67	1.74	0.57
1	1	0.41	0.36	1.20	0.69
−1.414	0	2.28	0.59	1.75	0.33
1.414	0	0.35	0.31	1.13	0.67
0	−1.414	2.14	0.54	1.68	0.42
0	1.414	0.78	0.51	1.51	0.57
0	0	1.50	0.66	1.80	0.44
0	0	1.66	0.66	1.79	0.50
0	0	1.48	0.66	1.79	0.50
0	0	1.41	0.66	1.77	0.43
0	0	1.58	0.66	1.73	0.47

먼저 이 자료의 고유치 분석 결과 (Khuri등 (1981)) 반응 변수들간에 선형 종속성이 없는 것으로 분석되어서 네개의 반응 변수를 모두 사용 하였고, 2차 다항 회귀 모형에 대한 계수 추정을 (2-6)식에 의해 실시한 결과 다음 〈표 2〉를 얻었다. 또한 (2-5)식의 $\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})$를 이용하여 다음 결과를 얻었다.

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.0399 & -0.0019 & -0.0066 & -0.0014 \\ & 0.0005 & 0.0003 & 0.0005 \\ (\text{대칭}) & & 0.0025 & -0.0002 \\ & & & 0.0017 \end{bmatrix}.$$

3절에서 제안된 거리 측도를 이용하여 동시 최적조건을 찾기 위해서 먼저 목표치를 $\underline{\tau}=(2.30, 0.50, 1.80, 0.30)'$로 정하였다. 또한 흥미영역으로 R을 다음과 같이 $R=\{\underline{x} : x_1^2+x_2^2 \le 2\}$로 정하고, 이때 (3-5)를 기준으로 한 동시 최적기준은 $\underline{x}=(-0.2422, -1.3932)'$이며, 이때의 반응값 $\hat{y}(x)=(2.3024, 0.5544, 1.7861, 0.3547)$ 이다.

〈 표 2 〉 2차 다항 회귀 모형에서 추정된 계수

	y_1	y_2	y_3	y_4
β_0	1.526(0.069)	0.660(0.007)	1.776(0.017)	0.468(0.014)
β_1	−0.575(0.071)	−0.092(0.008)	−0.250(0.018)	0.131(0.014)
β_2	−0.524(0.071)	−0.010(0.008)	−0.078(0.018)	0.073(0.014)
β_{11}	−0.171(0.076)	−0.096(0.008)	−0.156(0.019)	0.026(0.015)
β_{22}	−0.098(0.076)	−0.058(0.008)	−0.079(0.019)	0.024(0.015)
β_{12}	0.318(0.100)	−0.070(0.011)	0.010(0.025)	−0.083(0.020)

(   )는 표준오차(Standard error)임

위의 예에서 첫번째 반응인 y_1이 다른 반응들 보다 중요하다고 하자. 이런 조건에서 (3-6)과 (3-7)의 기준을 적용하여 보면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다. 먼저 (3-6)을 적용하기 위해 w_1을 0.4, 0.5, 0.6, 0.7로 변화를 주고 w_2, w_3, w_4는 동일한 중요도를 갖게 하였다. 그 결과 w_1이 0.4와 0.7에서는 최적조건이 각각 $(-0.2242, -1.3962)$, $(-0.2302, -1.3952)$ 이고, 이때의 반응값은 각각 (2.2865, 0.5548, 1.7822, 0.3588), (2.2918, 0.5547, 1.7835, 0.3574)이다. 그러나 $w_1=0.5$, 0.6에서는 최적조건이 0.4일때와 거의 동일하게 나왔다. 그리고 $w_1=0.4$, 0.7인 경우 y_2, y_3, y_4 반응치보다 y_1 반응치가 2배, 7배의 중요도를 갖지만 목표치와 추정 반응치의 차이는 그 중요도 차이를 충분히 반영하지 못하고 있다. 따라서 이러한 차이를 제거하기 위해 기준 (3-7)을 적용하여 보았다. 기준 (3-6)에서 $w_1=0.4$, 0.5, 0.6, 0.7 각각에 대하여 대응되도록 새로운 흥미영역 R^*를 다음과 같이 설정할 수 있다.

(i) $2d_1(\underline{x}) < d_i(\underline{x})$, (ii) $3d_1(\underline{x}) < d_i(\underline{x})$, (iii) $(9/2)d_1(\underline{x}) < d_i(\underline{x})$와
(iv) $7d_1(\underline{x}) < d_i(\underline{x})$, $i = 2, 3, 4.$

이 R^*에서 기준 (3-7)을 적용한 결과 〈표 3〉을 얻었다.

〈 표 3 〉 기준 (3-7)에 의한 결과

	x_1	x_2	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	$\hat{y}_4$
(i)	−0.2921	−1.3952	2.2908	0.5547	1.7833	0.3577
(ii)	−0.2302	−1.3952	2.2918	0.5547	1.7835	0.3574
(iii)	−0.2302	−1.3952	2.2918	0.5547	1.7835	0.3574
(iv)	−0.2362	−1.3942	2.2971	0.5545	1.7848	0.3577

〈표 3〉에 의하면 (ii)와 (iii)의 결과는 동일하지만, 기준 (3-6)에서의 w_1 =0.4, 0.5, 0.6의 결과가 동일한 것에 비해 약간의 차이를 보이고 있다. 또한 (i)와 (iv)의 결과와 w =0.4, 0.7의 결과를 비교해 볼 때 모든 반응값과 목표값의 차이가 (3-7) 기준에 의한 결과가 적게 나타났다. 결국 이 예에서는 기준 (3-7)이 기준 (3-6)보다 약간 효율적임을 알 수 있다. 또한 부수적인 결과로 중요도의 정도변화에 따른 최적조건의 변화를 살펴 볼 때 x_1이 x_2보다 변화가 심함을 알 수 있다. 따라서 이 자료 구조에서는 x_1이 x_2보다 반응들에 큰 영향을 끼친다는 사실을 알 수 있다.

5. 결론

일반적으로 다반응 변수가 존재하는 경우 동시 최적조건을 찾는 문제는 1장에서 소개한 바와 같이 많은 학자들이 다루어 왔다. 본 논문은 그 중 Khuri등(1981)이 제안한 거리척도의 단점에 주목하였다. 즉, 그들이 제안한 거리 척도는 각각의 반응에 제한 조건이 있는 경우 적절한 최적값을 제시하지 못할 수 있다는 단점이 있다 (Fichtali등 (1990)). 따라서 제한 조건으로 적절한 목표치가 정해졌을 때의 동시 최적조건을 찾아 보았다.

이러한 상황에서 (3-4)식을 제안 하였고, 이 식을 최소로 하는 $\underline{x}$를 주어진 흥미영역에서 구하는 (3-5)의 기준을 제안 하였다. 또한 각각의 반응의 중요도가 다른 경우에 대하여 두가지 방법을 고려해 보았다. 먼저 기준 (3-6)에 나타난 듯이 가중치 행렬을 이용하여 $\underline{x}$의 다반응 동시 최적조건을 찾아 보았다.

그런데 4절의 예를 통하여 알 수 있듯이 각 반응들의 중요도 차이 만큼이 반응치와 목표치의 차이로 반영되지 않았다. 따라서 다른 기준으로 (3-7)을 생각해 보았고, 이것은 중요도의 차이를 반응치와 목표치의 거리 차이로 생각할 수 있기 때문에, 이 거리 차이를 만족하는 새로운 흥미영역에서 (3-4)식을 최소로 하는 방법이다. 4절에서는 중심합성계획(central composite design)에 의한 2차 다항 회귀 모형의 반응표면 분석에서 기준 (3-5), (3-6), (3-7)을 적용하여 보았다.

그 결과 기준 (3-7)이 (3-6)보다 약간 더 민감하게 반응함을 알 수 있고, 중요도의 차이가 더 잘 반영 되었음을 알 수 있다. 따라서 직관적으로 생각하기 쉽고, 다루기 편리한 기준 (3-7)을 사용하는 것이 바람직하다고 생각된다. 이것은 Fichtali등(1990)이 각 반응에

제한조건이 있을 때 $\underline{x}$들의 조건을 단계적으로 변화 시키면서 최적조건을 찾는 방법과 유사하다.

앞으로 다른 형태의 제한조건이 각 반응들에 주어진 경우의 동시 최적화 조건을 찾는 문제에 대한 연구가 필요하다고 생각된다.

참고문헌

[1] Box, G. E. P., Hunter, W. G., MacGregor, J. F. and Erjavec, J. (1973), "Some Problems Associated with the Analysis of Mutiresponse Data," *Technometrics*, Vol. 15, pp. 35-51.

[2] Derringer, G. and Suich, R. (1980), "Simultaneous Optimization of Several Response Variables," *J. Qual. Tech.*, Vol. 12, pp. 214-219.

[3] Fichtali, J., Van De Voort, F. R. and Khuri, A. I. (1990), "Multiresponse Optimization of Acid Casein Production," *Journal of Food Process Engineering*, Vol. 12, pp. 247-258.

[4] Harrington, E. E. (1965), "The Desirability Function," *Ind. Qual. Cont.*, Vol. 21, pp. 494-498.

[5] Khuri, A. I. and Conlon, M. (1981), "Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions," *Technometrics*, Vol. 23, pp. 363-375.

[6] Khuri, A. I. and Conlon, M. (1987), *Response Surfaces ; Designs and Analyses*, Marcel Dekker, Inc., New York.

[7] Lind, E. E., Goldin, J. and Hickman, J. B. (1960), "Fitting Yield and Cost Response Surfaces," *Chem. Eng. Prog.*, Vol. 56, pp. 62-68.

[8] Schmidt, R. H., Illingworth, B. L., Deng, J. C. and Coynell, J. A. (1979), "Multple Regression and Response Surface Analysis of the Effect of Calcium Chloride and Cysteine on Heat-Induced Whey Protein Gelation," *J. Agric. Food Chem*, Vol. 27, pp. 529-532.