

$M/M(a, b ; \mu_k)/1$ 배치 서비스 대기모델에 대한 연구*

A Study on $M/M(a, b ; \mu_k)/1$ Batch Service Queueing Model*

이화기**, 정경일**

Hwa Ki Lee**, Kyung IL Chung**

Abstract

The aim of this paper is to analyze the batch service queueing model $M/M(a, b ; \mu_k)/1$ under general bulk service rule with mean service rate μ_k for a batch of k units, where $a \leq k \leq b$.

This queueing model consists of the two-dimensional state space so that it is characterized by two-dimensional state Markov process.

The steady-state solution and performance measure of this process are derived by using Matrix Geometric method. Meanwhile, a new approach is suggested to calculate the two-dimensional traffic density R which is used to obtain the steady-state solution.

In addition, to determine the optimal service initiation threshold a , a decision model of this queueing system is developed evaluating cost of service per batch and cost of waiting per customer.

In a job order production system, the decision-making procedure presented in this paper can be applicable to determining when production should be started.

1. 서론

본 연구는 배치 서비스의 크기에 따라 서비스율이 서로 다른 배치 서비스 모델을 분석하고, 이와 관련하여 서버의 최대 서비

스 가능 크기가 고정되어 있을 때, 최소 서비스 시작 크기에 따라 다르게 발생하는 평균 대기 비용과 시스템의 서비스 비용의 합이 최소가 되는 최적의 서비스 시작 크기를 구하는데 목적을 두고 있다.

* 인하대학교 산업공학과

** 본 연구는 1994년도 인하대학교 산업기술연구소의 지원에 의해 수행되었음.

배치 서비스를 갖는 모델은 한번에 한 고객에 대한 서비스가 제공되는 여타 모델들과는 달리 배치 크기로 서비스가 이루어지는 경우이며, 대부분 k 명의 일괄처리 서비스 시간이 지수분포를 이룬다고 가정되어 다음과 같은 여러 유형의 모델이 다루어졌다.

Bailey[3]는 두가지 유형의 $M/M^{(k)}/1$ 모델을 제시하였다. 첫번째로, 서어버는 한번에 k 명까지 서비스를 할 수 있으며 만약 한번의 서비스가 끝난 시점에 k 명 이하의 고객이 대기열에 대기하고 있다면 서어버는 k 명 이하의 고객들에 대해 서비스를 일괄적으로 행할 수 있는 모델을 분석하였으며, 또한 두번째 유형으로, 서비스는 정확히 k 명의 고객이 모일때까지 기다려야 하는 모델을 다루었다.

한편, Neuts[7]는 $M/M(a, b)/1$ 모델을 분석하였다. 이 모델은 $M/M^{(k)}/1$ 모델의 일반화된 유형으로서, b 명까지 일괄처리능력을 가진 서어버가 서비스를 개시할 수 있는 최소 서비스 시작크기 a 부터 서비스를 일괄적으로 시작할 수 있으며, 서비스가 시작되면 이후에 도착하는 고객들은 서비스가 끝날 때까지 대기열에서 기다려야 한다.

또한, Neuts and Nadarajan[8]와 Sim and Templeton[10]들은 서어버의 수가 c 명인 $M/M(a, b)/c$ 모델로 확장하여 분석하고 있다.

그러나 위에 열거한 모델들은 다른 크기의 배치에 대해서 같은 평균 서비스시간을 갖는 모델들로서 어떤 경우에 적용하기에는 제약이 다르다. 본 논문에서는 위에서 열거한 여러형태의 배치 서비스 모델중에서 일반적 모델인 $M/M(a, b)/1$ 에서 배치 서비스의 크기에 따라 서로 다른 서비스율을 가진 배치 서비스 모델, 즉 $M/M(a, b; \mu_k)/1$ 모델을 분

석하고자 한다. 이런 배치 서비스율이 다른 모델이 적용될 수 있는 상황은 다음과 같이 제시할 수 있다.

주문생산을 하고 있는 공장에서 한번에 4단위까지의 제품을 생산할수 있는 생산라인이 1개 있다. 주문은 한번에 하나씩 이루어지며 평균주문률 λ 를 갖는다. 제품생산률은 제품이 생산되어지는 수에 따라 각기 다른 생산률 μ_k (배치 생산단위가 k 인 생산률)를 갖는다. 이때 경영자는 다음의 제품생산계획에 따르고자 한다. 일단 a 단위 이상의 제품 생산이 시작되면 이후 발생하는 주문은 대기하고 있어야 하며 만약 배치 생산이 완료되는 시점에서 대기하고 있는 주문의 수가 q 단위일때, $0 \leq q < a$ 이면 최소 생산 시작크기 a 가 될때까지 기다리며, $a \leq q \leq b$ 이면 q 단위가 바로 생산에 들어간다. 한편 $q > b$ 이면 최대 생산 가능크기인 4단위까지만 생산에 들어가고 4단위를 초과한 나머지는 대기열에서 기다려야 한다.

이와같은 상황에서 경영자는 서비스 비용과 대기비용을 합한 총비용을 최소화하기 위해서는 주문이 몇단위 이상이 되면 제품 생산을 시작할것인가를 결정해야 한다.

위와같은 문제가 적용될 수있는 $M/M(a, b; \mu_k)/1$ 모델의 특수한 형태인 $M/M^{(k); \mu_k}/1$ 모델에 대한 연구는 Cosmetatos[4]에 의해 수행되어졌으며 앞으로의 과제로서 $M/M(a, b; \mu_k)/c$ 모델에 대한 분석을 제시할 수 있겠다.

2. 모델의 구성과 분석

본 논문에서 다루게 될 대기행렬 모형 $M/M(a, b$

표 1. $MIM(3, 4; \mu_3)$ 의 Block-Partitioned Matrix

여기서 $\otimes_1 = -\lambda$
 $\otimes_2 = -(\lambda + \mu_3)$
 $\otimes_3 = -(\lambda + \mu_4)$

	(0.0)(1.0)(2.0)	(0.3)(0.4)	(1.3)(1.4)	(2.3)(2.4)	(3.3)(3.4)	(4.3)(4.4)	...
(0.0)	\otimes_1	λ					
(1.0)	\otimes_1	λ					
(2.0)	\otimes_1	λ					
(0.3)	μ_3		\otimes_2	λ			
(0.4)	μ_4		\otimes_2	λ			
(1.3)	μ_3		\otimes_2	λ			
(1.4)	μ_4		\otimes_2	λ			
(2.3)	μ_3		\otimes_2	λ			
(2.4)	μ_4		\otimes_2	λ			
(3.3)		μ_3		\otimes_2	λ		
(3.4)		μ_4		\otimes_2	λ		
(4.3)		μ_3		\otimes_2	λ		
(4.4)		μ_4		\otimes_2	λ		
(5.3)			μ_3				
(5.4)			μ_4				
⋮							

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a \times (b - a + 1) \text{ matrix}$$

$F_n = (b - a + 1) \times a$ matrix로서 $n = 1, 2, \dots, a$ 에 따라

column들은 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

각 F_n 의 n th column = $\begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_{a+1} \\ \vdots \\ \mu_b \end{pmatrix}$ 이고 나머지

$$A_a = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu_a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_{a+1}) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & -(\lambda + \mu_b) \end{pmatrix}$$

$(b - a + 1) \times (b - a + 1)$ matrix

column들은 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$C_m = (b - a + 1) \times (b - a + 1)$ matrix로서 $m = a + 1, a + 2, \dots, b + 1$ 에 따라 각 C_m 의

$$E_a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix}$$

$(b - a + 1) \times (b - a + 1)$ matrix

$(m - a)$ th column = $\begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_{a+1} \\ \vdots \\ \mu_b \end{pmatrix}$ 이며 나머지

2.2 안정상태확률의 도출

2.2.1 안정상태 방정식

한편 각 State에 일치하는 안정상태의 확률은 다음과 같이 정의되며

$$\vec{P}_0 = (P(0,0), P(1,0), \dots, P(a-1,0)) \quad (2.1.1.a)$$

$$\vec{P}_i = (P(i,a), P(i,a+1), \dots, P(i,b)) \quad (2.1.1.b)$$

$i=0,1,2,\dots$

이 안정상태 확률을 구하기 위한 안정상태 방정식은 Markov 과정의 특성에 의해, 먼저

$$\vec{P}G = \vec{0}$$

$$\text{여기서 } \vec{P} = (\vec{P}_0, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots)$$

의 식을 통해 다음과 같이 유도된다.

$$\vec{P}A_0 + \sum_{i=0}^{a-1} \vec{P}_i F_{i+1} = \vec{0} \quad (2.2.1)$$

$$\vec{P}E_0 + \vec{P}_0 A_a + \sum_{i=a}^b \vec{P}_i C_{i+1} = \vec{0} \quad (2.2.2)$$

$$\vec{P}_{i-1} E_a + \vec{P}_i A_a + \vec{P}_{i+b} C_{b+1} = \vec{0} \quad (i \geq 1) \quad (2.2.3)$$

여기서 $\vec{0}$ 은 "0"의 요소를 갖는 \vec{P}_i 와 같은 차수의 vector.

위의 식을 이용하여 안정상태 확률을 구하는 과정은 우선 (2.2.3)식을 통해 2차원적 Traffic intensity R 을 구하고, 이어 $i \geq 1$ 인 경우의 안정상태 확률

$$\vec{P}_i = \vec{P}_0 R^i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

여기서 \vec{P}_i 는 (2.2.1)식에서 정의된 확률

vector

으로 정의되는 식을 유도하여, 이식과 위의 (2.2.1), (2.2.2)의 식을 결합하여 구한다.

2.2.2 R값의 계산

R 값의 계산을 위해 (2.2.3)식에 difference equation의 특성 방정식을 도입하면 이식은

$$E_a + RA_a + R^{b+1}C_{b+1} = \vec{0} \quad (2.2.4)$$

의 식이 된다. 이식을 통해 R 값을 구하는 일반적인 방법[Neuts[7]]은 $R = -R^{b+1}C_{b+1}A_a^{-1}E_a A_a^{-1}$ 로 변형하여 수치해석의 반복법을 적용하여 구하는 것이다.

본 논문에서는 R 값의 계산을 위해 이와같은 수치해법의 반복법과는 달리 본 논문의 모델과 같이 특수한 경우 적용할 수 있는 새로운 방법을 이용하여 구하고자 한다. 그러나 이 분석적인 방법은 모든 R matrix를 구할 수 있는 방법은 아닐 수도 있다.

수치적인 몇 번의 반복을 통해 이 모델에서 생성된 일반적인 R matrix는 다음과 같은 유형을 가진다는 것을 알 수 있다.

$$R = \begin{pmatrix} r_{aa} & & & r_{ab} \\ & r_{a+1a+1} & & r_{a+1b} \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & r_{bb} \end{pmatrix}$$

이 R matrix를 difference equation의 특성방정식을 도입하여 변형시킨 (2.2.4)식에 대입하여 R matrix를 구성하고 있는 각 요소들을 구한다.

먼저 R^{b+1} 은 다음과 같이 나타낸다.

$$R^{b+1} = \begin{pmatrix} r_{aa}^{b+1} & & r_{ab}^{(b+1)} \\ & r_{a+1a+1}^{b+1} & r_{a+1b}^{(b+1)} \\ & & \vdots \\ & & r_{bb}^{b+1} \\ & & \vdots \end{pmatrix}$$

여기서, $r_{ib}^{(b+1)} = r_{ib} \sum_{j=0}^{b-1} r_{ii}^{b-1-j} \mu_{bb}^j \quad i = a, \dots, b-1.$

(2.2.4)식

$$R^{b+1}C_{b+1} + RA_a + E_a = \vec{0}$$

에 R matrix를 대입한 식은

$$\begin{pmatrix} r_{aa}^{b+1} & & r_{ab}^{(b+1)} \\ & r_{a+1a+1}^{b+1} & r_{a+1b}^{(b+1)} \\ & & \vdots \\ & & r_{bb}^{b+1} \end{pmatrix} C_{b+1} +$$

$$\begin{pmatrix} r_{aa} & r_{ab} \\ & r_{a+1b} \\ & \vdots \\ & r_{bb} \end{pmatrix} A_a + E_a = \vec{0}$$

으로 변형된다.

이 식으로부터 얻어지는 다음의 식을 이용하여 R matrix를 구성하는 각각의 요소들을 구한다.

$$\left. \begin{aligned} -r_{aa}(\lambda + \mu_a) + \lambda &= 0 \\ -r_{a+1a+1}(\lambda + \mu_{a+1}) + \lambda &= 0 \\ &\vdots \\ -r_{b-1b-1}(\lambda + \mu_{b-1}) + \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

$$\mu_b r_{bb}^{b+1} - r_{bb}(\lambda + \mu_b) + \lambda = 0 \quad (2.2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_a r_{aa}^{b+1} + \mu_b r_{ab} \sum_{j=0}^{b-1} r_{aa}^{b-1-j} r_{bb}^j - r_{ab}(\lambda + \mu_b) &= 0 \\ \mu_{a+1} r_{a+1a+1}^{b+1} + \mu_b r_{a+1b} \sum_{j=0}^{b-1} r_{a+1a+1}^{b-1-j} r_{bb}^j \\ &\quad - r_{a+1b}(\lambda + \mu_b) = 0 \\ &\vdots \\ \mu_{b-1} r_{b-1b-1}^{b+1} + \mu_b r_{b-1b} \sum_{j=0}^{b-1} r_{b-1b-1}^{b-1-j} r_{bb}^j \\ &\quad - r_{b-1b}(\lambda + \mu_b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

위의 (2.2.5)식으로부터 $r_{ii} \quad (a \leq i \leq b-1)$ 를 구하는 일반식을 구하면 다음과 같다.

$$r_{ii} = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu_i)} \quad (a \leq i \leq b-1)$$

한편 (2.2.6)식으로부터 r_{bb} 를 구할수 있다. (2.2.6)식은 Rouché's theorem에 의해 $|r_{bb}| \leq 1$ 에 오직 하나의 실근이 존재함을 알 수 있다. 이 실근은 고차원 방정식의 하나의 해를 구하는 Newton-Raphson method에 의해 구하며 그 절차는 생략한다.

이와같이 얻어진 $r_{aa}, r_{a+1a+1}, \dots, r_{bb}$ 을 사용하여 (2.2.7)식을 통해 $r_{ab}, r_{a+1b}, \dots, r_{b-1b}$ 을 구하며, 일반식은 다음과 같이 구성된다.

$$\mu_i r_{ii}^{b+1} + \mu_b r_{ib} \sum_{j=0}^{b-1} r_{ii}^{b-1-j} r_{bb}^j - r_{ib}(\lambda + \mu_b) = 0 \quad (a \leq i \leq b-1)$$

이 식은

$$r_{ib} = \frac{\mu_i r_{ii}^{b+1}}{\lambda + \mu_b (1 - \sum_{j=0}^b r_{ii}^{b-j} r_{bb}^j)}$$

으로 변형된다.

따라서 얻어지는 R matrix의 각각의 요소들의 일반형은 다음과 같다.

$$r_{ii} = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu_i)}$$

$$r_{bb} = \mu_b r_{bb}^{b+1} - (\lambda + \mu_b) r_{bb} + \lambda = 0 \tag{2.2.12}$$

$$r_{ib} = \frac{\mu_i r_{ii}^{b+1}}{\lambda + \mu_b (1 - \sum_{j=0}^b r_{ii}^{b-j} r_{bb}^j)}$$

R matrix를 수치적인 방법에 의해 구한 것보다 이와같이 해석적인 방법에 의해 구할수 있다면 계산에 필요한 시간뿐만 아니라 컴퓨터 계산시 수치적인 방법보다는 적은 메모리가 요구되어지므로 큰 용량의 계산에 유리하다. 또한 λ와 μ_k가 비슷한 값일 경우 수치해법으로 답이 수렴되지 않을 가능성도 있다.

2.2.3 안정상태 확률값의 계산

(2.2.1), (2.2.2)식에 위에서 구한 R을 적용한 식

$$\vec{P}_i = \vec{P}_0 R^i \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{2.2.8}$$

을 대입하여 만들어지는 방정식은 다음과 같다.

$$\vec{P}_0 A_0 + \sum_{i=0}^{a-1} \vec{P}_0 R^i F_{i+1} = \vec{0} \tag{2.2.9}$$

$$\vec{P}_0 E_0 + \vec{P}_0 A_a + \sum_{i=a}^b \vec{P}_0 R^i C_{i+1} = \vec{0} \tag{2.2.10}$$

한편 안정상태 확률을 구하기 위해서는 다음의 norming equation

$$\vec{P}_0 \cdot \vec{1} + \sum_{i=0}^{\infty} \vec{P}_i \cdot \vec{1} = 1 \tag{2.2.11}$$

이 필요하게 되는데, 이 식은 (2.2.8)식을 대입하여

$$\vec{P}_0 \cdot \vec{1} + \vec{P}_0 \cdot (I - R)^{-1} \cdot \vec{1} = 1$$

으로 변형된다. 결과적으로, \vec{P}_0, \vec{P}_0 등의 안정상태 확률을 구하기위한 연립방정식을 이루는 (2.2.9), (2.2.10) 및 (2.2.12)식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\vec{P}_0 A_0 + \sum_{i=0}^{a-1} \vec{P}_0 R^i F_{i+1} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_0 E_0 + \vec{P}_0 A_a + \sum_{i=a}^b \vec{P}_0 R^i C_{i+1} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_0 \cdot \vec{1} + \vec{P}_0 \cdot (I - R)^{-1} \cdot \vec{1} = 1$$

위의 연립방정식은 위의 두 식들에서 얻어지는 (b+1)개의 방정식과 마지막식에서 얻어지는 1개의 방정식으로서 (b+2)개가 된다. 그러나 구하고자 확률은 (b+1)개이므로 이 방정식은 redundant한 하나의 식을 포함하고 있다.

따라서 위의 두 식에서 얻어진 방정식중에서 임의로 하나의 식을 제거한 다음 이 연립방정식의 해인 \vec{P}_0, \vec{P}_0 의 확률을 구하게 된다. \vec{P}_0, \vec{P}_0 가 구해졌을 때 나머지 확률 $\vec{P}_i, i=1, 2, \dots$ 은 (2.2.8)식을 통해 구하여 진다.

2.3 수행척도(L_q)의 계산

고객의 대기열의 길이에 대한 기대값 L_q는 다음과 같이 계산되어 진다.

$$L_q = \sum_{i=0}^{a-1} i P(i,0) + \sum_{i=0}^{\infty} i \vec{P}_i \vec{1}$$

$$= \sum_{i=0}^{a-1} i P(i,0) + \vec{P}_0 R \sum_{i=1}^{\infty} i R^{i-1} \vec{1}$$

$$= \sum_{i=0}^{a-1} i P(i,0) + \vec{P}_0 R (I-R)^{-2} \vec{1}$$

2.4 의사결정 모델

$M/M(a, b; \mu_k)/1$ 모델에서 고정된 b 에 대해 $a(1 \leq a \leq b)$ 를 변화 시킬 때 고객이 대기열에서 기다림으로서 발생하는 비용과 서버의 서비스비용의 합이 최소가 되는 최소 배치 서비스 시작크기(a)를 결정할 수 있는 의사결정 모델이 구성된다.

본 연구에서 다루고자 하는 비용요소로는 고객이 대기열에서 기다림으로 인해 발생하는 대기열의 수에 비례하는 비용과 서버가 새로운 배치의 고객을 서비스할 때마다 발생하는 서버의 준비비용(setup비용)이 적용된다.

여기서 서버의 준비비용은 하나의 배치에 대한 서비스를 시작할 때마다 발생하는 비용으로 배치의 크기가 크던 작던 동일하게 드는 비용을 말하며 따라서 배치크기가 작은 서비스를 여러번 하는 것은 배치크기를 크게 하여 서비스 횟수를 줄일때 보다 총 서비스 비용이 많아지게 된다. 한편 배치당 필요한 준비시간은 무시되거나 서비스 시간 μ_k 에 포함되어 있는 것으로 가정되며, 서비스 설비의 다른 운영비용은 일정하다고 가정된다. 또한 배치크기를 줄여 서비스를 개시 할 수 있다는 것은 배치크기가 커져야만 서비스를 개시할 때보다 대기중에 있는 고객의 수는 감소될 여지가 많으므로 고객의 기다리는 비용을 감소시키게 될것이다. 따라서 이와같은 상충관계(trade-off)에 있는 두 요소의 비용의 합을 최소화 시키는 최초의 서비스 시작크기를 결정할 수 있을 것이다. 이를 수식화하면 다음과 같다.

$$TC(a) = W_c \cdot L_q(a) + S_c \cdot S_n(a)$$

$$s.t \ 1 \leq a \leq b$$

여기서, $TC(a)$: a 에 따른 총비용

W_c : 고객한명당 대기비용

$L_q(a)$: 고객의 평균 대기수

S_c : 서버의 배치당 준비비용

$S_n(a)$: 단위시간당 서비스되는 배치수(서비스 횟수)

한편, S_n 의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_n(a) &= \sum_{j=a}^b (\mu_j \sum_{i=0}^{\infty} P(i,j)) \\ &= \sum_{j=a}^b [\mu_j \sum_{i=0}^{\infty} \vec{P}_i(j)] \\ &= \sum_{j=a}^b \mu_j \vec{P}_0(I-R)^{-1}(j) \end{aligned}$$

여기서 $\vec{P}_0(I-R)^{-1}(j) = \vec{P}_0(I-R)^{-1}$ vector의 j 번째 요소이며

$$\vec{P}_i(j) = \vec{P}_i \text{의 } j \text{번째 요소}$$

3. 수치예

최대 서비스 가능 크기가 4일 때, $M/M(a, 4; \mu_k)/1$ 각각의 a 에 대한 안정상태 확률과 시스템의 수행척도를 구하고 그때 발생하는 비용을 고려하여 최적의 최소 서비스 시작 크기를 결정하는 수치적인 예를 제시한다.

고객이 도착하는 평균도착율(λ) = 5

$$\begin{aligned} \text{배치 서비스 크기가 1일때의 서비스율 } (\mu_1) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{배치 서비스 크기가 2일때의 서비스율 } (\mu_2) &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{배치 서비스 크기가 3일때의 서비스율 } (\mu_3) &= 3 \end{aligned}$$

r_{ii} 는 다음의 식

$$\mu_i r_{ii}^2 - (\lambda + \mu_i) r_{ii} + \lambda = 0$$

에 대해 Newton-Rapson method으로 해를 구하며 그 해는

$$r_{ii} = 0.74127$$

이다.

r_{ii} ($1 \leq i < 4$)는 다음의 식에 의해 구해진다.

$$r_{ii} = \frac{\mu_i r_{ii}^2}{\lambda + \mu_i (1 - \sum_{j=0}^4 r_{ii}^j r_{jj}^j)}$$

$$r_{11} = 0.02036$$

$$r_{21} = 0.04071$$

$$r_{31} = 0.06038$$

따라서 계산된 R matrix는 다음과 같다.

$$R = \begin{pmatrix} 0.45455 & 0 & 0 & 0.02036 \\ 0 & 0.55556 & 0 & 0.04071 \\ 0 & 0 & 0.62500 & 0.06038 \\ 0 & 0 & 0 & 0.74127 \end{pmatrix}$$

안정상태 확률은

$$\vec{P}_0 A_0 + \vec{P}_1 F_1 = \vec{0}$$

$$\vec{P}_0 E_0 + \vec{P}_1 (A_1 + R C_1 + R^2 C_2 + R^3 C_3 + R^4 C_4) = \vec{0}$$

$$\vec{P}_0 \cdot \vec{1} + \vec{P}_1 \cdot (I - R)^{-1} \cdot \vec{1} = 1$$

에 의해 구하며 그 값은 다음과 같다.

$$P(0,0) = 0.31594$$

$$P(0,1) = 0.21448$$

$$P(0,2) = 0.04402$$

$$P(0,3) = 0.02612$$

$$P(0,4) = 0.01536$$

고객의 대기열의 길이에 대한 기대값 L_q 는 다음과 같이 계산되어 진다.

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{i=0}^{n-1} i P(i,0) + \vec{P}_0 R (I-R)^{-2} \vec{1} \\ &= 1.05268 \end{aligned}$$

이 때 발생하는 서비스비용과 대기비용은 다음과 같다.

$$\text{서비스비용} = \text{준비비용}(S_c) \times \text{서비스횟수}(S_n)$$

$$\text{준비비용}(S_c) : 100\text{만원}$$

$$\begin{aligned} \text{서비스 횟수}(S_n) &= \sum_{j=1}^4 \mu_j \vec{P}_0 (I-R)^{-1}(j) \\ &= 6 \times 0.39321 + 4 \times 0.099045 + 3 \times 0.06965 \\ &\quad + 2.5 \times 0.12215 \\ &= 3.26977 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \text{서비스비용} &= 100 \times 3.26977 \\ &= 326.977 \text{ (만원)} \end{aligned}$$

$$\text{대기비용} = \text{고객1인당 대기비용}(W_c) \times L_q$$

$$\text{고객 1인당 대기비용}(W_c) = 200\text{만원}$$

$$\begin{aligned} \text{대기비용} &= 200 \times 1.05282 \\ &= 210.576 \text{ (만원)} \end{aligned}$$

따라서

$$\text{총비용}(TC) = \text{서비스비용} + \text{대기비용}$$

$$= 326.977 + 210.576$$

$$= 537.553 \text{ (만원)}$$

같은 절차에 의해서 $M/M(2, 4; \mu_k)/1$, $M/M(3, 4; \mu_k)/1$ 및 $M/M(4, 4; \mu_k)/1$ 에 대한 필요한 값들을 구하고 이를 종합하면 다음과 같은 표를 얻을수 있다.

표 2 및 그림 1에서 얻어진 것과 같이 $M/M(2, 4; \mu_k)/1$ 모델일 때 최소의 비용이 든다는 것을 알수 있다.

4. 결론

본 논문은 한명의 서어버에 의한 배치크기

표 2. 대기비용과 서비스비용

(단위 : 만원)

비용 \ 모델	대기비용	서비스비용	총비용	비고
$M / M(1, 4; \mu_k) / 1$	210.576	326.977	537.553	
$M / M(2, 4; \mu_k) / 1$	280.278	207.809	488.087	최소비용
$M / M(3, 4; \mu_k) / 1$	436.948	151.838	589.786	
$M / M(4, 4; \mu_k) / 1$	473.000	124.996	597.996	

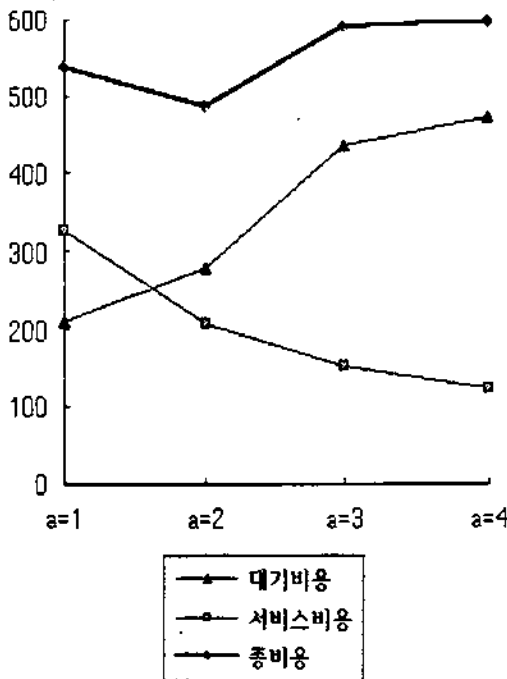


그림 1. 대기비용과 서비스비용곡선

에 따라 서로 다른 서비스율을 가진 배치 서비스 모델, $M/M(a, b; \mu_k)/1$ 에 대해 다루었다. 이 모델은 Matrix Geometric method를 이용하여 분석되어졌으며, 한편 R matrix의 유도에 새로운 시도를 하여, 반복계산에 소요되었던 노력의 절감 및 컴퓨터 계산시 큰 용량의 메모리를 줄여 최대 배치 서비스 크기가 좀더 큰 경우의 컴퓨터 계산도 가능해졌다.

본 연구는 서비스비용과 서비스 받지 못하고 대기함으로써 발생하는 대기비용을 고려한 총 비용이 최소가 되는 최적의 최소 배치 서비스 시작 크기를 구함으로써 이런 유형의 문제의 의사결정에 기여할 수 있으리라 생각된다.

이 연구에 대한 앞으로의 과제로서 $M/M(a, b; \mu_k)/c$ 모델에 대한 분석을 제시할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] 김성식, "A Matrix Method for the Analysis of Two - Dimensional Markovian Queues". 대한 산업공학회지, 제8권, 1982, pp.15-21.
- [2] 이화기, 윤운상, "두 형태의 고객을 갖는 대기행렬 모델에 관한 연구", 대한산업 공학회지, 제14권, 1988, pp.17-30.
- [3] Bailey, N.T.J., On Queueing Processes with Bulk Services, Journal of Assurance Science, B16, 1954, pp.80-97.
- [4] Cosmetatos, G.P., Increasing Productivity in Exponential Queues by Server Sharing, Omega 11, 1983, pp.187-193.
- [5] Hillier, F. S. and G. J. Liberman, *Introduction to Operations Research, Fifth edition*, McGraw-Hill, Inc., 1990.
- [6] Medhi, J., "Waiting time distribution in a Poisson queue with general bulk service rule", *Management Sci.* 21, 1975, pp. 777-782.
- [7] Neuts, M. F., *Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models - An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins university Press Baltimore and London, 1981.
- [8] Neuts, M. F., and R. Nadarajan, "A multiserver queue with threshold for the acceptance of customers into service", *Opns. Res.* 30, 1982, pp. 948-960.
- [9] Powell, W. B. and P. Humblet, "The bulk service queue with a general control strategy : Theoretical analysis and a new computational procedure", *Opns. Res.* 34, 1986, pp.267-275.
- [10] Sim, S. H. and J. G. C. Templeton, "Steady state results for the M/M(a,b)/c batch-service system", *Euro. J. Opns. Res.* 21, 1983, pp. 260-267.
- [11] Zipkin, P. H., "Models for design and control of stochastic, Multi-item batch production systems", *Opns. Res.* 34, 1986, pp. 91-104.