

## 내부점 선형계획법의 통합과 구현

The integration and implementation of interior point methods  
for linear programming

진희채\*, 박순달\*\*

Heui-chaе Jin, Soon-dal Park

### Abstract

The Interior point method in linear programming is classified into two categories - the affine-scaling method and the logarithmic barrier method. In this paper, we integrate those methods and implement them in one shared module.

First, we analyze the procedures of two interior point methods and then find a unified formula in finding directions to improve the current solution and conditions to terminate the procedure. Second, we build the shared modules which can be used in each interior point method. Then these modules are experimented in NETLIB problems

### 1. 서론

Karmarkar법[9] 이후에 많은 연구가 수행된 내부점선형계획법의 유형은 크게 두가지로 분류된다. 하나는 가능해의 단체를 아핀 변환하여 변환된 공간에서 최적방향으로 해를 개선시킨 후 이 해에 대응하는 원문제의 해를 구하는 과정을 반복하는 아핀법(Affine scaling method)이고 또 하나는 선형계획문제

의 비음조건을 대수장벽함수로 처리하여 목적함수에 포함시킨 비선형문제를 풀어가는 장벽법(Logarithmic barrier method)이다[11]. 이 두가지 방법은 서로 다른 이론에서 발전한 해법이기에 때문에 해법의 유도과정은 차이가 있으나 단체의 내부점을 통과하여 최적해를 찾는 공통점이 있어 이를 내부점선형계획법이라 통칭한다.

지금까지 연구된 아핀법과 장벽법의 형태

\* 한국전산원

\*\* 서울대학교 산업공학과

표 1. 내부점 선형계획법의 연구

형태 \ 해법	아핀법		장벽법	
	표준형문제	일반한계문제	표준형문제	일반한계문제
원해법	E.Barnes[3] R.Vanderbei[18]		Gill et al[5]	
쌍대해법	Adler et al[2]	Marsten et al[12]	Renegar[17]	Gill et al[6]
원쌍대해법	Monteiro et al[16]		Megiddo[14] Kojima et al[10] Marsten et al[13]	Lustig et al[11]

는 원문제의 해법, 쌍대문제의 해법, 원쌍대문제의 해법 등으로 구분할 수 있으며 표 1과 같은 주요 연구들이 있다.

위의 연구들에서 일반한계문제는 표준형문제로 변형하여 해법 적용이 가능하므로 별다른 해법개발의 필요성이 없다. 그러나 일반한계변수들에 대하여 Marsten et al[12], Gill[6] 등은 분할역행렬 연산을 이용하여 변수의 한계값을 고려한 안정적인 해법들을 개발하였다.

이 논문에서는 위의 여러 해법의 상호관계를 파악하여 해법 통합화를 수행하고 통합된 해법을 공통 부함수 형태로 구현하고자 한다. 해법의 통합화가 갖는 장점으로서는 여러 해법들의 구현을 쉽게하고 공통된 입출력 자료구조를 이용함으로써 정보의 관리 및 유지, 변경 등을 쉽게 한다. 또한 계산과정의 변화와 부함수의 교환 등에 의한 여러가지 실험 및 평가가 가능하므로 내부점선형계획법을 위한 해법 실험도구(tool)로 이용할 수 있는 장점 등이 있다.

## 2. 해법의 통합화

내부점선형계획법의 통합화가 가능한 이유는 내부점선형계획법이 모두 공통된 해법 절차를 갖는 특징에서 찾아볼 수 있다. 아핀법[3][2][16]과 장벽법[5][6][13]의 수행을 위한 풀이과정은 다음의 그림 1과 같다.

그림 1에서 초기의 내부가능해가 같은 경우 개선방향과 종료조건의 형태를 통합화하면 해법의 수행과정에 대한 통합화가 가능함을 알 수 있다.

이제 각 단계별로 해법의 통합화를 수행하여 보자. 먼저 다음과 같은 선형계획문제와 그의 쌍대문제가 있다고 하자.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P)} \quad \text{Max} & C^T X \\
 \text{st.} & AX = b \\
 & x_j \geq 0, \forall j
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(D)} \quad \text{Min} & b^T Y \\
 \text{st.} & A^T Y - Z = C \\
 & z_j \geq 0, \forall j
 \end{array}$$

### 해의 개선방향의 통합화

이제 주어진 어떤 가능해  $X^k, Y^k, Z^k$ 를 문제(P)와(D)의 내부가능해라고 하자. 즉,  $AX^k = b, A^T Y^k - Z^k = C, X^k \geq 0, Z^k \geq 0$ 이라고 하면 각

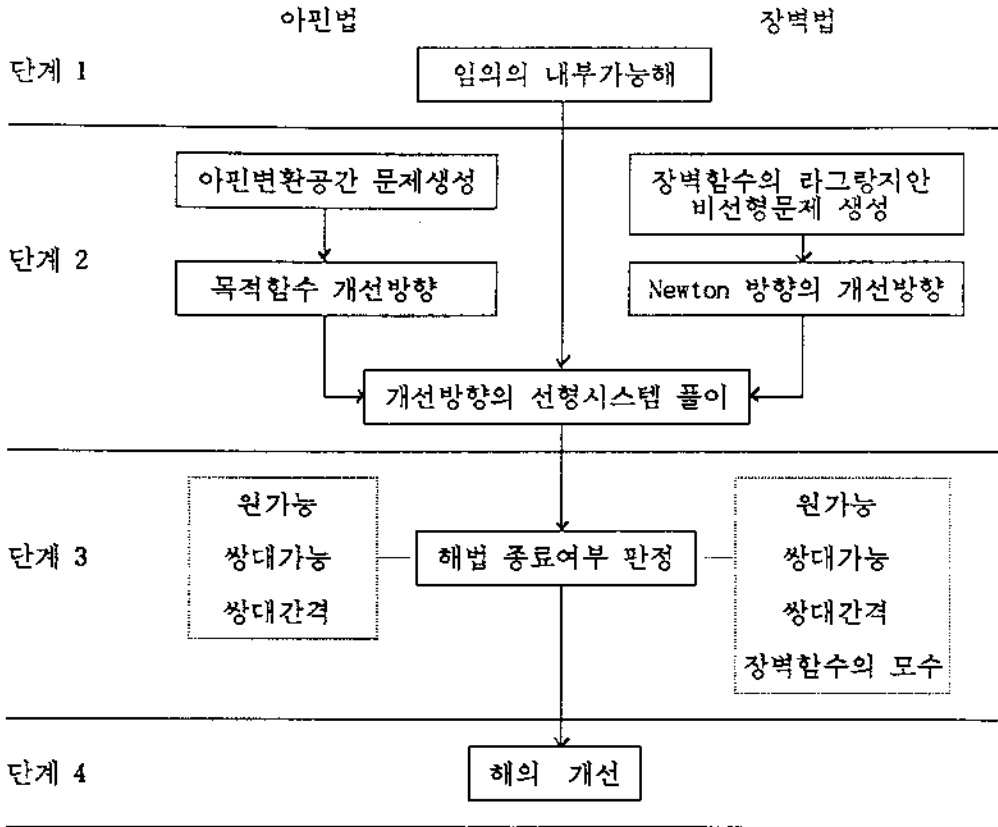


그림 1. 아핀법과 장벽법의 흐름

해법에서 해의 개선방향  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ 을 구하기 위하여 풀게되는 식은 다음의 표 2와 같다. 원아핀법의 경우를 예로들면 E.Barnes[3]가 제안한 해의 개선방향 계산식

$$\begin{aligned} & \text{Min } \| D(C - A^T Y^k) \| \\ & \text{st. } A\Delta X = 0, \\ & \text{단 } D = \text{Diag}(X^k), S = \text{Diag}(Z^k) \end{aligned}$$

은  $Z^k = A^T Y^k - C$ 라고 할때  $DSe = 0$ 를 최소화하기 위하여  $A\Delta X = 0$ 를 만족하는  $\Delta X$ 를 구하는 것을 알 수 있다. 반면, 원장벽법의

경우는 Gill[5]에 의하여 비선형계획법으로부터 뉴튼방향 선형식인  $A^T Y^{k+1} - \mu D^{-1} e = C, A\Delta X = 0$ 의 식을 유도하여 이로부터  $\Delta X$ 를 구하게 된다. 이 방법은 쌍대해법과 원쌍대해법에서도 마찬가지로 적용할 수 있으며 이를 정리하면 다음의 표 2와 같은 개선방향 유도식을 생성할 수 있다.

이제 원해법에 대하여 아핀법과 장벽법의 개선방향을 살펴보자. 만일 원장벽법에서  $\mu D^{-1} e = Z^k$ 라고 하면 이것은 임의의 쌍대해  $Y$ 에 대하여  $A^T Y - Z^k = C$ 의 조건을 만족하고 이것은 원아핀법의  $A^T Y^k - Z^k = C$ 의 조

표 2. 내부점 선형계획법의 개선방향 유도식

형태 \ 해법	아핀법	장벽법
원해법	$\begin{aligned} & \text{Min } \ DSe\  \\ & A^T Y^k - Z^k = C \\ & A\Delta X = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & A^T Y^{k+1} - \mu D^{-1} e = C \\ & A\Delta X = 0 \end{aligned}$
쌍대해법	$\begin{aligned} & \text{Min } \ DSe\  \\ & AX^k = b \\ & A^T \Delta Y - \Delta Z = C \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \mu AS^{-1} = b \\ & A^T \Delta Y - \Delta Z = C \end{aligned}$
원쌍대해법	$\begin{aligned} & \text{Min } \ DSe\  \\ & A^T \Delta Y - \Delta Z = 0 \\ & A\Delta X = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & A^T Y^{k+1} - Z^{k+1} = C \\ & AX^{k+1} = b \\ & DSe = \mu e \end{aligned}$

건을 만족하는 것과 같다. 이때 원아핀법의  $DSe$  값을 구해보면  $DSe = \mu e$ 가 되어 장벽법의 모수  $\mu$ 가 0에 접근한다고 할때,  $\text{Min } \|DSe\| \cong 0$ 의 조건을 만족하게 된다. 이것은 아핀법과 장벽법이 모두 같은 선형시스템을 조건으로 하고 있으나 장벽법의 경우는 모수 설정값에 의하여 개선방향을 구하고 아핀법의 경우는  $\text{Min } \|DSe\|$ 에 의하여 개선방향을 구하고 있음을 의미한다. 이로부터 각 해법이 결정하는 해의 개선방향식을 요약하면 다음의 표 3과 같이 정리할 수 있다.

표 3으로부터 장벽법의 모수  $\mu$ 가 0으로 접근한 경우에 장벽법의 개선방향은 아핀법의 개선방향과 동일하며 그 크기는 서로 다를 수 있다. 또한 원해법과 쌍대해법, 원쌍대해법은  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ 에 대하여 모두 같은 방향식을 사용하고 있음을 알 수 있다.

특히, 원장벽법과 원쌍대장벽법의  $\Delta X$ 가

$$\Delta X = -\left(\frac{1}{\mu^k}\right)DS^{-1} [A^T(ADS^{-1}A^T)^{-1} ADS^{-1}(C + \mu^k D^{-1}e) - (C + \mu^k D^{-1}e)]$$

식을 사용할 수 있다. 즉 원해법, 쌍대해법, 원쌍대해법간에는  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ 를 각각에 대하여 같은 식을 사용할 수 있고 이때 단체를 변형시켜주기 위한 현재의 해를 원해법에서는  $D$ , 쌍대해법에서는  $S$ , 원쌍대해법에서는  $\sqrt{DS^{-1}}$ 를 사용하는 차이가 있다.

종료조건에의 통합화

내부점선형계획법의 종료조건은 해법의 구분에 관계없이 선형계획법의 최적해 조건(원가능, 쌍대가능, 쌍대간격)을 만족하는 경우에 해법을 종료할 수 있다. 따라서 모든 해법이 동일한 종료조건을 적용할 수 있으나, 각 해법에서 가정하고 사용하는 정보가 서로 다른 경우는 해법별로 적용되는 종료조건을 선택적으로 적용한다. 다음의 표 4는 임의의 내부가능해가 최적해 조건(원가능, 쌍대가능, 쌍대간격) 3가지에 대하여 각각의 만족여부를 나타낸 표이다.

따라서 어떤해가 최적해임을 판단하기 위하여는 표 4에 만족되지 않는 조건들을 만족

표 3. 내부점 선형계획법의 개선방향식

형태 \ 해법	아핀법	장벽법
원해법	$\Delta X = -D^2[A^T(AD^2A^T)^{-1}AD^2C - C]$	$Y^{k+1} = (AD^2A^T)^{-1}AD^2(C + \mu^k D^{-1}e)$ $\Delta X = -(\frac{1}{\mu^k})D^2 [A^T Y^{k+1} - (C + \mu^k D^{-1}e)]$
쌍대해법	$\Delta Y = -(AS^{-2}A^T)^{-1}b$ $\Delta Z = A^T \Delta Y$	$\Delta Y = -\frac{1}{\mu^k}(AS^{-2}A^T)^{-1}[b - \mu^k AS^{-1}e]$ $\Delta Z = A^T \Delta Y$
원쌍대해법	$\Delta Y = -(ADS^{-1}A^T)^{-1}b$ $\Delta Z = A^T \Delta Y$ $\Delta X = -X - DS^{-1}\Delta Z$	$\Delta Y = -(ADS^{-1}A^T)^{-1}[b - \mu^k AS^{-1}e]$ $\Delta Z = A^T \Delta Y$ $\Delta X = \mu^k S^{-1}e - X - DS^{-1}\Delta Z$

표 4. 내부점선형계획법의 종료조건

형태 \ 해법	아핀법			장벽법		
	원가능성	쌍대가능성	쌍대간격	원가능성	쌍대가능성	쌍대간격
원해법	만족	불만족	불만족	만족	불만족	불만족
쌍대해법	불만족	만족	불만족	불만족	만족	불만족
원쌍대해법	만족	만족	불만족	만족	만족	불만족

하는지를 이용하게 된다. 종료조건을 통합화에서는 이 조건을 만족하기 위하여 상호 쌍대해의 계산방안과 쌍대간격의 계산방안에 대하여 언급하도록 한다.

먼저 원아핀법의 경우에 해의 개선방향  $\Delta X = D^2C - D^2A^T(AD^2A^T)^{-1}AD^2C$ 로 부터  $Y^k = (AD^2A^T)^{-1}AD^2C$ 라고 하면  $Z^k = -D^{-2}\Delta X$ 를 얻을 수 있고 이것은  $A^T Y^k - Z^k = C$ 을 만족하게 한다. 이때  $Z^k \geq 0$ 의 조건을 만족하는 경우 쌍대가능 조건은 만족되고 쌍대간격  $e^T D S e = -e^T D^{-1} \Delta X = 0$ 인 경우 최적해임을 확인할 수 있다. 원장벽법의 경우는  $Y^k = (AD^2A^T)^{-1}AD^2(C + \mu^k D^{-1}e)$ 라고 하여  $Z^k = -\mu^k (D^{-2}\Delta X - D^{-1}e)$ 를 얻을 수

있다. 쌍대간격은  $e^T D S e = -\mu^k e^T (D^{-1} \Delta X - e) = 0$ 인 경우에 만족하게 된다.

마찬가지로 쌍대아핀법의 경우는  $\Delta Z = -A^T(AS^{-2}A^T)^{-1}b$ 로 부터  $A(S^{-2}\Delta Z) = -AS^{-2}A^T(AS^{-2}A^T)^{-1}b = -b$ 에서  $X^k = -S^{-2}\Delta Z$ 를 얻을 수 있다. 즉,  $X^k \geq 0$ 일때, 쌍대간격  $e^T D S e = -e^T S^{-1} \Delta Z = 0$ 을 만족하게 되면 최적해이다. 쌍대장벽법은  $X^k = -\mu^k (S^{-2} \Delta Z - S^{-1}e)$ 일때, 쌍대간격  $e^T D S e = -\mu^k e^T (S^{-1} \Delta Z - e) = 0$ 을 만족하면 최적해이다.

그러나 원쌍대해법의 경우는 원해법, 쌍대해법의 원가능성, 쌍대가능성 조건은 이미 만족하므로 쌍대간격의 조건만 만족하면 된다.

쌍대간격의 조건은 위에서의 마찬가지로  $e^T DSe = 0$  인 경우에 만족하게 된다.

### 3. 통합모형의 구현 및 실험

내부점선형계획법의 통합화를 수행하여 각 해법의 상호관계로부터 아핀법과 장벽법의 여러 해법이 동일한 수행과정으로 구성될 수 있고 한 형태로 표현이 가능함을 알았다. 이로부터 각 해법의 통합화 절차를 수행하여 보자. 각 해법이 단계별로 통합되는 형태는 그림 2와 같다.

이제 이를 구현하기 위하여 해법을 제어하기 위한 제어변수를 설정하면 다음과 같다.

- IMETH = 1 : 원해법  
 2 : 쌍대해법  
 3 : 원쌍대해법  
 IAFFIN = 0 : 아핀법  
 1 : 장벽법

앞의 통합화 과정을 참고로 해법의 통합 형태는 원해법, 쌍대해법, 원쌍대해법의 구분과 아핀법과 장벽법에 따라서 해법이 파생됨을 고려하여 이를 각각의 제어변수로 설정하였다. 또한 구조화된 부함수를 구현하기 위하여 해법의 수행과정에서 주요연산과정을

추출하고 다음과 같은 연산들을 선정하였다. 이것들은 대부분 단계2의 해의 개선방향을 결정하기 위하여 이용하게 된다.

위의 부함수에서 첫번째 연산형태는 모든 해법의 개선방향 연산에 반드시 사용되는 정치역행렬의 연산과정이다. 각각의 해법에 따라서 대각행렬인  $\theta$ 의 형태는 변화하게 된다. 특히  $(A[\theta]A^T)^{-1}[v1]$ 의 풀이를 위한 과정은 Gauss소거법, 촐레스키분할법, QR연산법등 다양한 방법이 존재할 수 있고 이에 따라서 여러가지 변환 실험 등이 가능하다.

b, c의 연산은 행렬계수  $A$ 의 열방향연산과 행방향연산을 위한 부함수이다. 해의 개선방향을 유도하기 위하여 행렬계수  $A$ 의 접근(access) 방향에 따라서 서로다른 형태의 부함수가 필요하여 선정하였다.

이제 이미 설정된 제어변수와 부함수를 이용하여 각 해법을 통합화한 통합모형을 단계별로 구성하여 보자. Condition<>은 각 단계의 조건, [ ]는 출력값, relate<>는 관련 부함수를 의미한다.

통합된 해법은 제어변수를 변화시켜서 여러 해법의 수행을 실험할 수 있다. 선형계획 문제들의 실험대상으로는 Netlib자료를 이용하고 이중 약 300~1000 정도의 행을 갖는 문제들에 대하여 통합모형을 실험하였다. 수행결과는 다음의 표 5와 같으며 실험문제의

연산형태	부함수 형태	출 령
a. $(A[\theta]A^T)^{-1}[v1]$	INV( $\theta, v1$ )	크기 $m$ 의 벡터
b. $[v2]-A^T[v1]$	C-ATY( $v1, v2$ )	크기 $n$ 의 벡터
c. $[v1]-A[v2]$	B-AX( $v1, v2$ )	크기 $m$ 의 벡터

$\theta$ 은 대각행렬,  $v1, v2$ 는 벡터

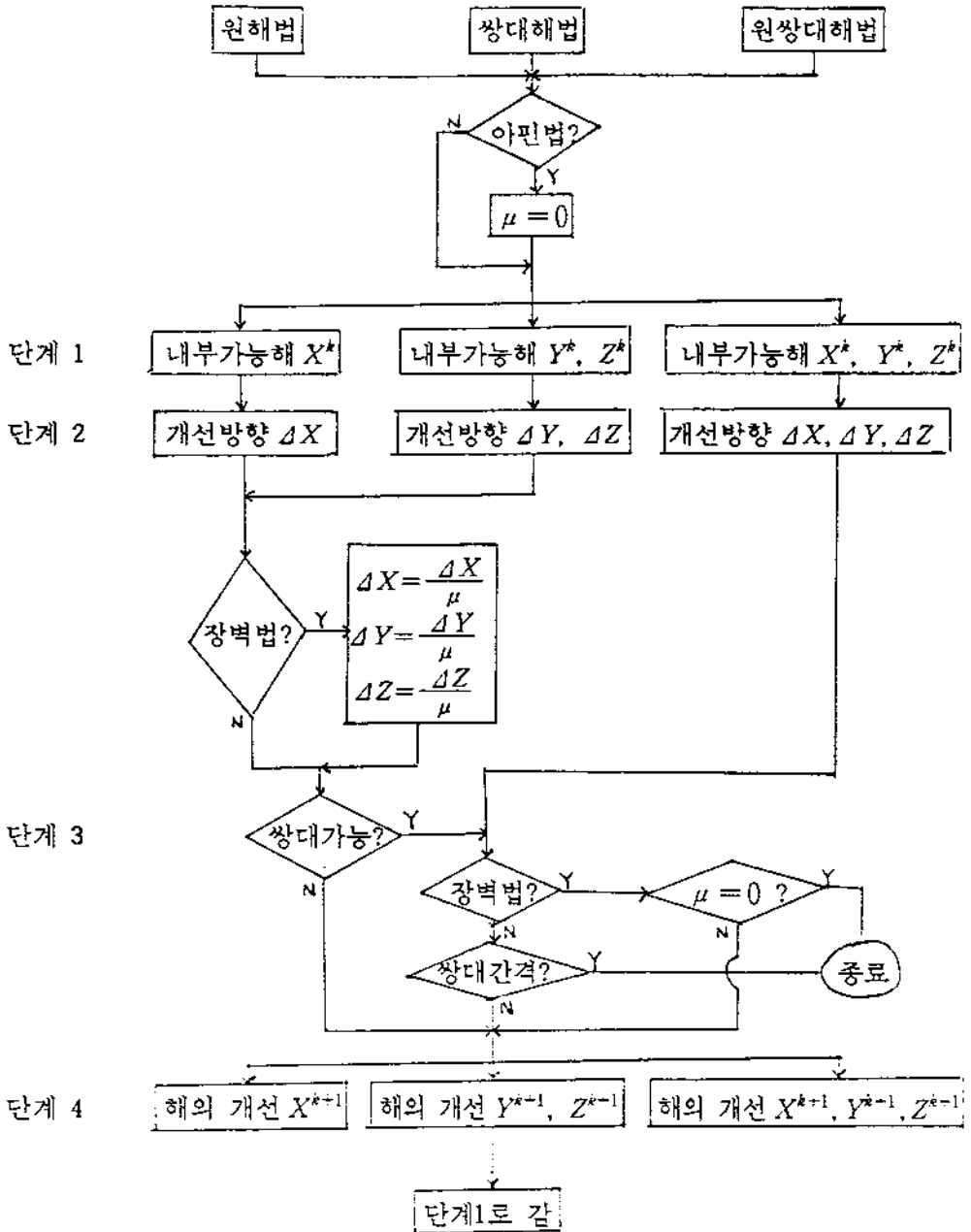


그림 2. 아핀법과 장벽법의 통합 흐름

- 단계 0 Condition <IAFFIN> [ $\mu$ 값의 결정]  
 단계 1 Condition <IMETH> [ $X^k, Y^k, Z^k$ 값의 결정]  
 단계 2 Condition <IMETH> [ $\theta$ 값의 결정]  
           Condition <IMETH> [개선방향  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ 의 결정]  
           relate < INV ( $\theta, v1$ ), C-ATY( $v1, v2$ ), B-AX( $v1, v2$ )  
           Condition <IAFFIN> [장벽법의 개선방향  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ 의 결정]  
 단계 3 Condition <IMETH> [쌍대가능 여부]  
           Condition <IAFFIN=1> [ $\mu = 0$  여부]  
           <IAFFIN=0> [쌍대간격 여부]  
 단계 4 Condition <IMETH> [ $X^{k+1}, Y^{k+1}, Z^{k+1}$ 값의 결정]

최적해 조건을 만족하는 허용오차로는  $10^{-6}$ 으로 한다.

이 실험결과로부터 아핀법과 장벽법을 비교하면 아핀법은 문제에 따른 해법 수행횟수의 변화가 크고 장벽법은 대체로 일정한 횟수안에 해법을 수행을 종료함을 알 수 있다. 이것은 장벽법을 이용할 경우 해의 개선방향을 결정할 때, 적절한 크기의 모수  $\mu$ 값을 계속 감소시켜 얻을 수 있는 장점이기도 하다. 그러나 문제의 단체가 아핀변환에 의하여 몇 회안에 최적해를 찾을 수 있는 경우는 장벽법의 모수값을 적게 감소시키는 효과로 인하여 위의 경우와 반대 현상을 발생시키기도 함을 의미한다.

해법중 원쌍대아핀법의 경우는 원가능성과 쌍대가능성을 유지하면서 쌍대간격을 감소시키는 적절한 개선방향을 찾지 못할 경우에 해법수행이 실패하는 경우가 발생하고, 이것은 원쌍대장벽법과 같이 쌍대간격을 적절히 감소시킬 수 있는 기준을 설정함으로써 방지할 수 있다.

#### 4. 결론

내부점선형계획법은 다양한 해법이 존재하

고 각 해법은 서로 다른 방법과 절차를 이용하여 발전하였다. 그러나 내부점선형계획법은 모두 단체의 내부점을 통과하고 또 해법의 단계가 유사하므로 이들 해법의 통합화가 가능하다. 해법의 통합화는 여러 해법의 구현을 쉽게하고 각 해법의 다양한 실험과 해법 상호간의 수행도 등도 비교가능하게 하는 장점이 있다. 본 연구에서는 내부점선형계획법의 해법과정을 구분하여 각 해법단계에 대한 해법 통합화를 수행하였다. 이중 가장 중요한 해법단계로 여겨지는 해의 개선방향과 종료조건에 대하여는 여러 해법의 상호관계 등을 분석하여 통합화의 이론적 근거를 마련하였다. 또한 이를 근거로 하여 공통 부함수가 이용 가능한 내부점선형계획법의 통합시스템을 구현하고 각 해법의 다양한 실험을 통하여 해법간의 평가가 가능하게 하였다. 이제 기존 해법의 개선을 위한 새로운 해법 개선방안의 도입 및 내부점선형계획법의 실험을 위한 통합 도구(tool)의 사용이 가능하리라 본다.



표 5. 통합모형 해법의 실험(Iteration)

문제			원해법		쌍대해법		원쌍대해법	
문제명	크 기	비영요소수	아핀법	장벽법	아핀법	장벽법	아핀법	장벽법
blend	75*83	521	45	33	24	33	40	24
share1b	118*225	1182	203	77	56	41	*	329
lotti	154*308	1086	177	36	34	47	477	55
beaconfd	174*262	3476	36	41	23	40	50	38
israel	175*142	2358	278	59	49	43	*	304
brandy	221*249	2150	107	251	32	85	*	59
bandm	306*472	2659	119	44	26	41	159	40
scfxm1	331*457	2612	194	47	38	57	159	93
ship04s	403*1458	5810	29	48	208	31	557	343
degen2	445*534	4449	30	41	30	33	28	41
scagr25	472*500	2029	309	30	148	42	329	213
agg2	517*302	4515	86	40	55	42	145	137
ffff800	525*854	6235	175	47	66	48	*	186
bnl1	644*1175	6129	206	49	75	56	*	101
capri	272*353	1786	217	36	45	52	*	84
grow15	301*645	5665	86	49	31	38	*	36
tuff	334*587	4523	113	36	45	56	123	67
stair	357*467	3857	276	27	31	44	250	52
etamacro	401*688	2489	45	37	33	41	71	32
shell	537*1775	4900	186	44	236	43	*	55
sierra	1228*2036	9252	287	42	196	42	199	85
woodw	1099*8405	37478	49	45	48	58	64	52

## 참 고 문 헌

- [1] 박순달, 선형계획법, 제3판, 민음사, 1992  
 [2] I. Adler, M.G.C. Resende, and G. Veiga and N. Karmarkar, "An implementation of Karmarkar's algorithm for Linear program-

ming", *Mathematical Programming* 44, pp.297-335, 1989

- [3] E.R. Barnes, "A variation on Karmarkar's algorithm for solving Linear programming problems", *Mathematical programming* 36, pp.174-182, 1986

- [4] S.C. Fang and S. Puthenpura, *Linear Optimization and extensions : theory and algorithms*, Prentice-Hall, Inc, 1993
- [5] P.E. Gill, W. Murry, M.A. Saunders, J.A. Tomlin and M.H. Wright, "On projected newton barrier methods for Linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method", *Mathematical Programming* 36, pp.183-209, 1986
- [6] P.E. Gill, W. Muarry and M.A. Saunders, "A single-phase dual barrier method for Linear programming", *Technical Report SOL 88-10*, Stanford Univ., 1988
- [7] C.C. Gonzaga, "An algorithm for solving Linear programming problems in  $O(n^3L)$ -operations", in *Progress in Mathematical Programming : interior-point and related methods*, Springer-Verlag, pp.1-28, 1988
- [8] C.C. Gonzaga, "Path-following methods for Linear programming", *SIAM Review* 34, pp.167-224, 1992
- [9] N. Karmarkar, "A new polynomial-time algorithm for Linear programming", *Combinatorica* 4, pp. 373-395, 1984
- [10] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise, "A primal-dual interior point algorithm for Linear programming", in *Progress in Mathematical Programming : interior-point and related methods*, Springer-Verlag, pp.29-48, 1988
- [11] I.J. Lustig, R.E. Marsten and D.F. Shanno, "Interior point methods for Linear programming : Computational state of the art", *ORSA Jour. on comp.* 6, pp.1-14, 1994
- [12] R.E. Marsten, M.J. Saltzman, D.F. Shanno, G.S. Pierce and J.F. Ballintijn, "Implementation of a dual affine interior point algorithm for Linear programming", *ORSA Jour. on. comp* 1, pp.287-297, 1989
- [13] R.E. Marsten, R. Subramanian, and M. Saltzman, "Interior point methods for Linear programming : Just Call Newton, Lagrange, and Fiacco & McCormick", *Interfaces* 20, pp.105-116, 1990
- [14] N. Megiddo, "Pathways to the optimal set in Linear programming", in *Progress in Mathematical Programming*, Springer-Verlag, pp.131-158, 1988
- [15] J.E. Mitchell and M.J. Todd, "On the relationship between the search directions in the affine and projective variants of Karmarkar's linear programming algorithm", *Technical report No. 725*, Cornell Univ., 1986
- [16] R.D.C. Monterior, I. Adler and M.G.C. Resende, "A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension", *Math. of OR.* 15, pp.191-214, 1990
- [17] J. Renegar, "A polynomial time algorithm, based on Newton's method, for Linear programming", *Mathematical programming* 44, pp.59-93, 1988
- [18] R.J. Vanderbei, M.S. Meketon, and B.A. Freedman, "A modification of Karmarkar's

---

s linear programming algorithm", *Algorithmica 1*, pp.395-407, 1986

95년 5월 최초접수, 95년 7월 최종 수정