財務管理論叢 第3卷 第1號 (1996.5)

確率的 變動性下의 通貨옵션價格決定 模型의 實證分析

朴 柄 銖*

요 약

본 논문은 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형에 대하여 실증적으로 검증하였다. 연구결과 OTM, ATM, ITM에서 일정한 변동성을 가정하는 모형가격은 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형에 비교하여 일치적으로 높게 나타나고 있으며 OTM옵션에 가격결정오차의 크기는 ATM 옵션보다 크게 나타나고 있다. 또한 옵션의 만기가 길수록 가격결정오차의 크기는 커진다는 것을 보여주고 있다. 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형이 일정한 변동성을 가정하는 통화옵션가격결정모형보다 행사가격과 만기편의를 감소시키며 특히 단기의 만기를 가진 범위에서는 매우 큰 오차감소효과가 나타났다. 따라서 통화옵션가격결정모형을 이용하여 옵션가격을 예측함에 있어 환율변동성이 일정하다는 가정하에서 변동성을 모형에 투입하는 것보다는 환율변동성의 이분산성을 고려하여 추정된 변동성을 모형에 투입하는 것이 통화옵션가격의 예측력을 개선시킬 수 있다고 할 수 있다. 그리고 회귀분석결과 설명력을 나타내는 R^2 값이 높게 나타나고 있으며, 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 R^2 값이 일정한 변동성을 가정하는 모형의 R^2 보다는 높게 나타나고 있다.

---

* 慶北大學校 大學院 經營學科 博士課程

본 논문은 韓國金融先物協會의 지원으로 작성된 논문임.

Ⅰ. 序 論

최근들어 금리와 환율이 자유화됨에 따라 기업이나 금융기관은 높은 금융자산의 가격변동성 위험에 직면하게 되었다. 우리나라의 금융기관이나 기업들도 이러한 환경변화에 따라 적절하게 위험을 관리할 수 있는 대책이 필요하게 되었다. 이와같은 위험관리를 위하여 1995년 중 국내 파생금융상품의 거래규모는 184억달러이며 동 기간동안 증가율은 35%에 이르렀다. 그 중에서 환위험관리를 위한 통화옵션의 거래량은 1995년중에 65억달러로서 전년 대비 증가율은 491%의 괄목할 만한 증가율을 이룩하였다. 이와같이 국내기업과 금융기관들이 환위험관리를 목적으로 통화옵션시장을 성공적으로 이용하려면 통화옵션가격을 효율적으로 평가하여야 한다. 통화옵션가격은 헤지거래자에게는 직접적으로 헤지 비용문제와 관련되고 투기거래자에게는 투기적 이익을 획득할 수 있는 기준이 되기 때문에 통화옵션가격의 평가는 실무적으로 이론적으로 매우 중요하다. 이러한 통화옵션가격을 평가하는 통화옵션가격결정모형은 주식옵션을 평가하는 Black과 Scholes모형을 확장하여 다양하게 개발되었다.

최근에 Melino와 Turnbull(1990)은 기존의 통화옵션가격결정모형의 예측력이 낮은 중요한 이유로써 통화옵션의 기초자산인 현물환율의 확률분포가 실제분포와 다른 대수정규분포를 따른다고 가정하고 있기 때문이라고 주장하였다. 그들의 연구결과는 일별 또는 주별 환율의 확률분포가 대수정규분포보다는 꼬리모양이 두텁고, 변동성이 시계열적으로 종속적이고 이분산성이 존재한다는 연구결과를 제시하였다.[1] 위와 같은 환율의 확률분포를 가장 잘 기술하는 것이 Engle(1982)이 제시한 ARCH 모형이다. 최근에 몇몇 연구자들이 옵션을 평가하기 위하여 ARCH 모형을 이용하기 시작하였다.[2] Duan(1995a)은 ARCH의 프레임웍에서 옵션의 균형가격결정이론을 개발하였다. 그리고 Kallsen와 Taqqu(1994)은 연속적인 무재정거래 상황에서 모형을 개발하였다. Chaudhury와 Wei(1995a)는 Duan의 GARCH 옵션가격결정모형과 Black과 Scholes 모형과 비교하여 GARCH 옵션가격결정모형이 단기 OTM의 가격결정에 매우 유용하

1) Westerfield(1977), McFarland, Pettit와 Sung(1982), Boothe와 Glassman(1987), Hsieh(1989a)
2) Day와 Lewis(1990), Engle, Hong, Kane과 Noh(1993), Engle과 Mustafa(1992)

다는 것을 발견하였다. 그리고 Cao(1992)는 Nelson(1991)의 EGARCH(Exponetial Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasiticity) 모형을 이용하여 통화옵션에 적용하였으며, 주식옵션에 대한 Amin과 Ng(1993), 상품옵션을 다룬 Myers와 Hanson(1993) 등의 연구가 있다. 연구결과에서 ARCH에 기초 옵션가격결정모형들이 Black과 Scholes의 모형가격의 오차를 수정하는 능력을 가지는 것으로 나타났다. 그러나 시계열자료로부터 추정된 확률적 변동성과 ARCH/GARCH옵션가격결정모형은 아직 초기 단계에 있다고 할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 기존에 제시되어 있는 GARCH모형을 기초한 보통주 옵션평가모형을 검토하고 이것을 통화옵션에 일반화하여 일정한 변동성을 가정하는 통화옵션가격결정모형과 비교하여 모형의 유효성을 실증적으로 검증하고자 한다.

II. 確率的 變動性下의 通貨옵션價格決定模型

본 절에서, GARCH 모형을 이용하여 환율변동성을 추정하는 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형을 제시하고자 한다.

모형을 전개하기 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

① 거래비용, 세금, 차입과 대출의 제한이 없다.

② 거래는 이산적 구간에서 발생한다.

③ 무위험이자율은 일정하다. 1기간 무위험이자율과 연속적인 복리무위험 이자율은 각각 R과 r(=ln(1+R))로 각각 표현된다.(자국 및 외국무위험이자율은 일정하다.)

④ I는 Ω에 대한 분산공간이다. A는 I에 대한 위험중립확률측정치이고, (Ω, I, A)는 확률공간이다. 정보집합 I_t의 수열은 증가하는 분산공간 $I_{t_{0\le K\infty}}$에 있다. 즉, 만약, $t \le t^*$이면 $I_t \le I_{t*}$이다.(I_t는 t기에 이용가능한 정보집합이다.)

⑤ S_t는 t기에 주식가격(또는 환율)이며, 연속복리 수익률 ($\ln S_t / S_{t-1}$)은 GARCH(p,q)과정을 따르고, 오차항은 확률측정치 A하에서 조건부 대수정규분포를 따른다고 가정한다. 즉,

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu_t^* + \varepsilon_t \tag{1}$$

$$\varepsilon_t \mid \phi_{t-1} \sim N(0, h_t^*)$$

$$h_t^* = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(\varepsilon_{t-i} - \lambda \sqrt{h_{t-i}} \right)^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}$$

단, ε_t : 확률측정치 A하에서 평균이 0이고 h_t^*의 조건부분산을 가짐

λ : 단위위험 프레미엄

⑥ 한계대체율은 조건부 대수정규분포를 따른다.

이산(discrete time)경제를 고려하고 S_t를 t시점의 가격이라고 하자. 1기간수익률은 확률 A하에서 조건부대수정규분포를 갖는 것으로 가정한다.

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r_t + \lambda_t \sqrt{h_t} \left(- \frac{1}{2} h_t \right) + \varepsilon_t \tag{2}$$

단, ε_t : 확률 P하에서 평균이 0이고 h_t의 조건부분산을 가짐

r_t : t-1기에서 t기에 연속복리 무위험이자율

λ_t : 환율의 단위위험 프레미엄[3]

ε_t가 A의 확률하에서 Bollerslev(1986)의 GARCH(p,q)과정을 따른다고 가정한다면 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t | I_{t-1} &\sim N(0, h_t) \quad A\text{의 확률하에서} \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \end{aligned} \tag{3}$$

단, I_t : t기까지의 모든 정보를 포함하는 정보역

$p \geq 0,\ q \geq 0,\ \alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0$

조건부분산은 과거잔차자승과 과거조건부분산의 선형함수이다. GARCH(p,q)과정의 공분산 정상성을 보장하기 위하여, $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$으로 가정한다. (2)과 (3)에서

설정된 GARCH과정은 p=0이고 q=0이면 Black과 Scholes 모형과 같은 등분산대수정규과정의 모형으로 축소된다. 따라서 Black과 Scholes 모형이 일반적인 옵션가격결정모형에 비하여 특수한 형태라는 것을 의미한다. 주식옵션에 대한 옵션가격 결정식이 통화옵션에 대한 수식과 매우 비슷하기 때문에 먼저 주식옵션에 대한 옵션가격결정모형을 제시한다.

이산적 틀에서 Black과 Scholes모형을 유도하는 가장 중요한 요소는 위험중립평가관계이다.[4] 확률적 변동성이 존재하는 경우에 옵션가격결정모형을 얻기 위하여 다음과 같은 위험중립평가관계를 이용한다.

<정의 1> A와 B는 두개의 확률측정치로 두자. 위험중립평가관계는 만약 아래와 같은 조건이라면, 측정치 B에 대하여 적용된다.

---

3) Melino와 Turnbull(1990)이 가정한 것과 같이 λ=0로 둔다.

4) Brennan(1979), Rubinstein(1976) 참조.

(a) 측정치 B는 측정치 A에 대하여 절대적으로 연속적이다.

(b) I_{t-1}정보하에서 $\ln\frac{S_t}{S_{t-1}}$은 측정치 B하에서 대수정규분포를 따른다.

(c) $E^B(\frac{S_t}{S_{t-1}} \mid I_{t-1}) = e^r$

(d) 측정치 A에 대하여 $Var^B(\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} \mid I_{t-1}) = Var^A(\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} \mid I_{t-1})$

<명제 1> ① ~ ⑥ 가정하면, 위험중립평가관계가 적용된다.

<명제 2> ① ~ ⑥ 가정하고, <부록>에서와 같이 측정치 B를 정의한다. 그러면 B 측정치하에서 다음과 같다.

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2}h_t + \xi_t \tag{4}$$

$$\xi_t \mid \phi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i(\xi_{t-i} - \lambda\sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}$$

<명제 2>를 이용하여 측정치 B하에서 현재가격와 종가사이의 관계를 구성할 수 있다. 현재의 주식가격 S_t라고 하면, 옵션의 만기는 T이다. 그러면 아래와 같이 전개된다.

$$\ln\frac{S_T}{S_t} = (T-t)r - \frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T}h_l + \sum_{l=t+1}^{T}\eta_l \tag{5}$$

B 측정치하에서 T기의 주식종가는 다음과 같다.

$$S_T = S_t e^{(T-t)r - \frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T}h_l + \sum_{l=t+1}^{T}\eta_l} \tag{6}$$

<명제 3> $c_t(S_t, \sigma_t, K, T)$는 만기 T와 행사가격 K를 가진 유럽형 콜옵션(c)의 t기의 가치이다. 만약 ①~⑥의 가정이 유지된다면 콜옵션의 가격을 다음과 같다.

$$c_t(S_t, \sigma_t, K, T) = e^{-(T-t)r}E^B[\ \max(S_T-K,\ 0) \mid I_t]$$

$$= e^{-(T-t)r}E^B[\ \max(S_t e^{-(T-t)r-\frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T} h_l+\sum_{l=t+1}^{T}\eta_l}-K,\ 0) \mid I_t] \qquad (7)$$

<보조정리 1> 연속적인 배당율 q를 지불하는 유럽형 콜옵션을 가정하자. 만약 가정 ①~⑥이 유지된다면, 콜옵션가격은 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$c_t(S_t, \sigma_t, K, T)$$

$$= e^{-(T-t)(r-q)}E^B[\ \max(S_t e^{-(T-t)(r-q)-\frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T} h_l+\sum_{l=t+1}^{T}\eta_l}-K,\ 0) \mid I_t] \qquad (8)$$

<보조정리 2> 유럽형 옵션이 환율에 대하여 발행되었다고 가정하자. 국내 이자율과 외국이자율이 각각 r_D와 r_F 이다. 만약 가정 ①~⑥이 유지된다면, 통화콜옵션(c_t)의 가격은 다음과 같다.

$$c_t(S_t, \sigma_t, K, T) =$$

$$e^{-(T-t)(r_D-r_F)}E^B[\ \max(S_t e^{-(T-t)(r_D-r_F)-\frac{1}{2}\sum_{l=t+1}^{T} h_l+\sum_{l=t+1}^{T}\eta_l}-K,\ 0) \mid I_t] \qquad (9)$$

<명제 4> 가격평가측정치 A하에서 $|\lambda| < \sqrt{(1-\alpha_1-\beta_1)/\alpha_1}$ 라면,

① ξ_t 의 정상적 분산은 $\alpha_0[\ 1-(1+\lambda^2)\alpha_1-\beta_1]^{-1}$ 와 같다.

② ξ_t는 leptokurtic

③ $Cov^B(\xi_t/\sqrt{h_t}, h_{t+1}) = -2\lambda a_0 a_1[\ 1-(1+\lambda^2)a_1-\beta_1]^{-1}$

그리고 무위험이자율로 할인되는 자산가격은 마팅게일(matingale) 과정을 따른다. 조건부청구권의 가격결정이론에 대한 중요한 마팅게일속성은 Harrison과 Kreps(1979)에 의해 처음으로 설정되고 후에 Harrison과 Pliska(1981)에 의해서 정교화되었다. GARCH 통화옵션가격은 식(4), (6), (9)에 따라서 몬테칼로 시뮬레이션에 의하여 계산된다.

기초자산의 확률적 과정이 GARCH 과정을 따를 때 일정한 변동성을 가정하는 Garman과 Kohlhagen모형을 이용한다는 것은 Garman과 Kohlhagen모형에 GARCH 과정의 정상적 분산을 적용함으로써 이분산성과 leptokurtic 수익률분산 때문에 옵션가격에서 어떠한 차이를 나타내는지를 검토하기 위해서이다.

$$C_t^{GK} = S_t^{-(T-t)r_D} N(d_t) - e^{-(T-t)r_F} X N(d_t - \sigma\sqrt{T-t}) \tag{10}$$

$$\text{단,}\quad d_t = \frac{\ln(S_t/X) + (r_D - r_F + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\sigma^2 = a_0(1-a_1-\beta_1)^{-1}$$

III. 實證分析

1. 分析資料

통화옵션가격결정모형에 투입될 변수는 현물환율, 자국무위험이자율, 외국무위험이자율, 현물환율의 변동성, 옵션의 잔여만기, 옵션의 행사가격, 옵션의 시장가격이다. 이들

변수중 현물환율의 변동성을 제외한 모든 변수들은 관찰이 가능한 변수들이다. 이러한 관찰이 가능한 변수에 대해서는 1993년 7월 1일부터 1995년 12월 31일까지의 기간동안 PHLX에서 거래되는 4개 통화(파운드화, 마르크화, 프랑스 프랑화, 엔화)에 대한 일별거래 자료에서 유럽형 통화옵션가격을 수집하였다. 관찰이 불가능한 현물환율의 변동성은 GARCH과정을 통하여 추정될 것이다.

4개의 통화에 대한 달러화 표시 현물환율을 1990년 1월 4일에서 1995년 12월 31일까지의 기간에 걸쳐 일별자료를 The Asian Wall Street Journal에서 발췌·수집하였다. 본 검증에 이용될 이자율 자료는 1993년 1월 4일부터 1995년 12월 31일까지의 기간동안 The Asian Wall Street Journal의 Interest rate란에서 자국이자율(U.S. Dollar), Deutschmark 이자율, Sterling 이자율, France Franc 이자율은 Frankfurt Euro Deposits 이자율을 이용하고, Yen 이자율은 Euro Yen Deposits 이자율을 이용한다. 이러한 이자율에 대해 1년 만기 이자율을 수집하여 검증에 이용된다. 여기에서 이자율만기와 옵션의 만기가 불일치하는 문제가 발생될 수 있지만, 만기에 관계없이 모두 연율로 표시되며 만기에 따라 연율이 큰 차이를 보이지 않고 있으므로 본 검증에서 이를 무시하기로 한다.

2. 換率變動性에 대한 基本的 分析

환율변동의 시계열에 대하여 ARCH류 모형의 적용가능성을 검토하기 위하여 환율변화에 대한 자기상관과 잔차시계열에 대한 자기상관을 조사하였다. 본 연구에서는 Akgiray(1989)가 사용한 방법을 이용하여 환율변동성의 원자료(raw data), 절대값, 자승값에 대하여 분석하고, 또한 AR(1) 시계열에 대한 잔차, 절대잔차, 자승잔차에 대하여 분석하였다. 그리고 환율의 일별변동성이 정규분포를 따르는지를 Kolmogorov와 Smirnov 검증통계량을 사용하여 검증하였다.

<표 1>은 각각의 통화에 대한 기초통계를 나타내고 있다. <표 1>의 K-S 통계량에 따르면 5%의 유의수준에서 모든 통화에 대한 정규성을 기각하고 있다. 그리고 첨도의 경우 JY이 가장 높게 나타나고 있으며 4개의 통화가 정규분포보다 높은 leptokurtic현상을 보여주고 있어 기존의 연구결과와 일치한다.

<표 1> 환율변화에 대한 기초통계량

	FF	DM	BP	JY
평균	0.000069	0.000077	0.000025	0.000030
t 값(평균=0)[a]	0.35581	0.38363	0.12900	1.7389
분산	4.7341e-5	5.1805e-5	4.9116e-5	4.266082e-5
왜도	-0.10037	-0.10668	0.31796	0.46264
첨도[b]	1.44389	1.47525	2.04585	2.81967
K-S 통계량[c]	1.6603*	1.6589*	2.1961*	2.2791*

주) a : t 통계량(5% 유의수순의 임계치는 1.96)
b : 첨도는 3을 [illegible] 수치임
c : Kolmogorov-Simmov D 통계량임
* 표시는 5% 유의수준에서 유의적인 것을 나타내고 있음

또한 환율변동성의 시계열에서 ARCH 형태의 모형이 적합한지를 살펴보기 위하여 환율변동성 및 잔차시계열의 자기상관을 조사하였다. 시계열 자료의 자기상관에 대한 검증통계량으로 Ljung-Box Q통계량을 이용하여 검증하였다.

<표 2>에서 환율변동성의 원자료와 절대값, 자승값에 대한 시계열 자기상관 분석에서 절대값과 자승값에 대한 검증에서는 1차에서 15차까지 전 차수에 걸쳐서 5% 유의수준에서 모든 통화에 대하여 자기상관이 존재하는 것으로 나타났다. 이러한 연구결과는 Mandelbrot(1963)의 연구에서 "부호에 상관없이 큰 가격변화는 큰 가격변화를 따르고 작은 가격변화는 작은 가격변화를 따르는 경향이 있다"는 것과 일치된다. 따라서 환율의 변화형태를 설명하는 모형으로 ARCH형태의 모형이 적절함을 간접적으로 알 수 있다. <표 3>에서는 환율변동성에서 AR(1)으로 변형된 시계열 잔차, 절대잔차, 자승잔차에 대한 자기상관계수를 보여주고 있다. 4개의 통화에 대하여 AR(1)으로 변형된 수익률 잔차의 시계열 상관은 존재하지 않는 것을 볼 수 있다. 즉 잔차시계열에 대한 Ljung-Box Q통계량을 살펴보면 AR(1)의 잔차시계열은 거의 백색잡음화하였다. 그러나 AR(1)의 자승잔차시계열 및 절대잔차시계열은 4개의 통화에 대하여 5% 유의수준에서 유의한 자기상관이 존재함을 볼 수 있다. 이것은 더욱 더 ARCH 형태의 모형이 적절하다는 것을 보여주며, 또한 조건부 분산에 있어서 지속성이 내포된 모형의 필요성이 강조된다고 할 수 있다.

<표 2> 환율변동성에 대한 자기상관계수

통화 시차	환율의 변화				환율변화의 절대치				환율변화의 자승치			
	FF	DM	BP*	JY	FF*	DM*	BP*	JY*	FF*	DM*	BP*	JY*
1	0.061*	0.051**	0.101	0.039	0.159	0.160	0.178	0.077	0.132	0.160	0.159	0.062
2	-0.033*	-0.046*	-0.015	-0.023	0.101	0.089	0.134	0.067	0.128	0.126	0.149	0.060
3	0.005	-0.004	0.028	-0.024	0.118	0.128	0.130	0.089	0.121	0.135	0.145	0.063
4	0.037**	0.028	0.047	-0.009	0.091	0.098	0.139	0.086	0.067	0.088	0.080	0.052
5	0.030	0.028	0.044	-0.033	0.141	0.134	0.167	0.069	0.115	0.109	0.132	0.048
6	-0.048**	-0.043	-0.029	-0.039	0.093	0.091	0.108	0.057	0.067	0.062	0.060	0.048
7	-0.010**	-0.005	-0.047	0.060	0.054	0.061	0.097	0.051	0.101	0.111	0.100	0.023
8	-0.031**	-0.014	0.012	0.004	0.126	0.112	0.093	0.033	0.123	0.086	0.059	0.026
9	0.027	0.032	0.062	-0.015	0.094	0.096	0.123	0.049	0.066	0.068	0.116	0.144
10	0.030	0.040	0.055	0.056	0.122	0.124	0.156	0.034	0.106	0.097	0.136	0.033
11	-0.015	-0.028	-0.014	0.030	0.118	0.114	0.171	0.081	0.115	0.107	0.167	0.081
12	0.001	-0.003	0.016	0.008	0.077	0.083	0.098	0.041	0.069	0.076	0.090	0.042
13	-0.015	-0.023	-0.002	0.013	0.099	0.089	0.096	0.085	0.134	0.127	0.092	0.071
14	-0.012	-0.027	-0.021	0.037	0.098	0.103	0.133	0.031	0.093	0.107	0.106	0.029
15	0.003	-0.003	0.022	0.017	0.083	0.080	0.085	0.036	0.088	0.076	0.060	0.010
$Q^a(5)$	9.1	8.2	19.7	4.9	96.5	98.2	143.9	43.1	84.0	100.6	117.7	23.1
Q(10)	15.5	14.1	32.7	15.7	161.8	160.6	232.3	57.8	142.2	148.4	180.0	29.9
Q(15)	16.3	16.8	34.6	19.3	221.0	218.1	325.6	83.0	209.3	213.1	256.0	50.1

<표 3> 환율변동성의 AR(1) 변형잔차에 대한 대한 자기상관계수

통화 시차	잔차				잔차값의 절대치				잔차값의 자승			
	FF	DM	BP	JY	FF*	DM*	BP*	JY*	FF*	DM*	BP*	JY*
1	0.005	0.005	0.002	-0.004	0.146	0.167	0.160	0.078	0.115	0.151	0.116	0.058
2	-0.038	-0.049	-0.029	-0.001	0.107	0.094	0.132	0.071	0.133	0.132	0.134	0.059
3	0.006	-0.003	0.026	-0.060	0.123	0.131	0.129	0.09	0.123	0.135	0.136	0.065
4	0.034	0.026	0.041	0.019	0.095	0.089	0.137	0.088	0.073	0.094	0.073	0.053
5	0.031	0.029	0.043	-0.030	0.150	0.135	0.164	0.069	0.126	0.119	0.135	0.048
6	-0.050	-0.044	-0.029	-0.013	0.089	0.096	0.100	0.053	0.063	0.065	0.049	0.047
7	-0.005	-0.002	-0.046	0.048	0.060	0.087	0.095	0.053	0.105	0.061	0.097	0.024
8	-0.033	-0.016	0.011	0.008	0.094	0.115	0.094	0.034	0.123	0.116	0.059	0.025
9	0.028	0.032	0.057	-0.016	0.121	0.102	0.125	0.050	0.069	0.085	0.111	0.015
10	0.027	0.039	0.051	0.050	0.116	0.126	0.145	0.034	0.102	0.072	0.121	0.032
11	-0.017	-0.031	-0.022	0.026	0.077	0.125	0.164	0.081	0.117	0.094	0.160	0.083
12	0.002	-0.002	0.018	0.020	0.102	0.091	0.096	0.038	0.067	0.107	0.087	0.039
13	-0.012	-0.002	-0.002	0.007	0.099	0.078	0.088	0.084	0.136	0.073	0.081	0.069
14	-0.011	-0.025	-0.023	0.036	0.087	0.110	0.136	0.035	0.088	0.131	0.118	0.032
15	0.005	-0.001	0.024	0.011	0.045	0.088	0.087	0.038	0.095	0.103	0.057	0.012
$Q^a(5)$	4.6	5.1	6.4	6.8	101.1	111.3	133.0	44.6	85.3	102.6	93.0	22.9
Q(10)	11.3	11.1	17.9	14.3	167.4	189.8	215.5	59.4	142.9	151.4	146.9	29.6
Q(15)	12.1	13.6	20.4	18.0	227.7	259.9	304.7	84.4	211.5	216.7	219.5	49.8

주) a : Ljung-Box Q 통계량을 나타냄

* : 5% 유의수준에서 자기상관계수가 유의적인 것을 나타냄

** : 10% 유의수준에서 자기상관계수가 유의적인 것을 나타냄

3. GARCH 模型을 이용한 換率變動性의 推定

(1) 推定方法

앞 절에서 기술통계 및 환율의 시계열자기상관 분석결과, 환율변화에 대하여 ARCH 형태 모형으로의 적용이 필요하다는 것이 간접적으로 확인되었다. 본 절에서 환율과 이자율, 주식수익률을 모형화할때, 성공적으로 이용되는 GARCH모형을 이용하고자 한다. 추정방법은 최우추정(maximun likelihood estimation:MLE)으로 수행되며, 다음과 같은 대수우도함수를 고려한다.

$$L_t(\theta) = \sum_{t=1}^{T} l_t(\theta)$$

$$l_t(\theta) = \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log h_t - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{h_t}$$

단, l_t는 t번째 관찰치에 대한 대수 우도함수이며,

θ 는 추정할 모수이다.

MLE는 비선형 추정이므로 다음과 같은 반복과정을 통하여 추정될 것이다. 반목 추정의 알고리즘으로는 본 연구에서는 Berndt, Hall, Hall & Hauseman(1974)이 제안한 BHHH 알고리즘으로 수행할 것이다. 그리고 모형의 검증방법은 최우추정치에 대한 검정방법으로 본 연구에서는 라그랑지 승수(Lagrange Multiplier:LM) 검증을 한다. Engle(1982)에 의하면, LM 통계량은 점근적으로 조건부 분산방정식의 OLS 추정시 얻어지는 결정계수(R^2)에 관찰치(T)를 곱한 값과 같다고 하였다. 또한 분석모형에 대한 정규잔차($\varepsilon / \sqrt{h_t}$)가 시계열상관되어 있는지를 검정하기 위하여 Ljung & Box(1978)의 퍼트멘토우 검정통계량 Q로 검증한다.

(2) GARCH 모형의 추정

GARCH(1,1)모형의 최우추정치(maximan likelihood estimator)는 <표 4>에 주어져 있

다. 환율변동성의 파악은 통화옵션가격결정모형에서 가장 중요한 투입변수로서 옵션가격결정에 중요한 정보를 제공하기 때문에 기존의 일정한 변동성을 가정한 모형보다는 시간에 따라서 변화하는 조건부 분산을 고려한 모형이 더 정확한 정보를 제공한다는 점에서 그 중요성이 있다고 할 수 있다. GARCH 모수인 α_0, α_1, β_1는 5%의 유의수준에서 유의적임을 보여주고 있다. 그리고 시간변동성을 나타내는 α_1, β_1이 통계적으로 유의적인 것으로 나타나, 환율에서의 시간변동성이 강하게 나타남을 알 수 있다. 또한 모든 4개의 통화에 대하여 $\alpha_1 + \beta_1$는 0.95~0.98로 1에 가까운 값으로 나타나 모든 통화는 IGARCH 형태를 나타내고 있어 환율에 있어서 변동성의 지속성이 강하게 나타나고 있어 기존의 연구결과와 일치하고 있다.[5] GARCH(1,1)과정의 잔차에 대한 Ljung-Box Q 검증 통계량을 보면 자기상관분석에서 모든 통화에 대하여 자기상관이 없는 것으로 나타났으며, LM 검증을 통하여 모든 통화에 대하여 잔차에 대한 이분산성이 존재하지 않는 것으로 나타났다. 따라서 환율에 대한 변동성의 적용에 GARCH(1,1)모형이 적합하다고 할 수 있다.[6]

5) Engle과 Bollerslev(1986), Bollerslev(1987), McCurdy와 Morgan(1988), Baillie와 Bollerslev(1989), Hsieh(1989a), Taylor(1990a)

6) Taylor(1986), McCurdy와 Morgan(1988), Hsieh(1989a), 그리고 Hsieh(1989b)는 환율변동성이 GARCH(1,1)과정을 따른다는 것을 실증적으로 검증하였다.

<표 4> GARCH(1,1) 모형의 추정결과

모형 및 통화 / 추정 모수	GARCH(1,1) 모형 $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$			
	FF	DM	BP	JY
α_0	7.944e-7 (2.47)*	1.108e-6 (2.51)*	6.507e-7 (3.48)*	1.839e-6 (2.95)*
α_1	0.0566 (5.18)*	0.0590 (4.90)*	0.0659 (6.81)*	0.0383 (4.11)*
β_1	0.9264 (60.6)*	0.9191 (52.1)*	0.9220 (82.2)*	0.9143 (39.0)*
$Q(10)^b$	15.87	14.73	16.9	15.47
$LM(10)^c$	14.19	13.16	16.92	13.97
Log L^d	5685.4	5625.49	5693.88	5767.14

주) * : t 통계량(5% 유의수준)
a : 대수우도함수 값을 나타냄
b : 정규화된 잔차($\varepsilon_t/\sqrt{h_t}$)에 대한 10차수 Ljung과 Box의 검증통계량을 나타냄 (5% 유의수준)
c : 라그랑지 승수 검증통계량(5% 유의수준)
d : 대수우도함수 값을 나타냄

4. 分析結果

재정거래가 존재하지 않는 경제(arbitrage free economy)에서 파생금융상품의 가격은 확률적 성과(random payoffs)의 할인평균으로 표현할 수 있다. 이 평균을 계산하는 유용한 도구가 몬테칼로 시뮬레이션이다. 통화옵션가격결정에 일반적으로 사용되는 몬테칼로 시뮬레이션의 일반적인 절차는 다음과 같다. 첫째, 기초자산가격의 표본경로를 시뮬레이트하고, 둘째, 각 표본경로에 대한 옵션의 성과를 계산하고, 마지막으로 시뮬레이트된 성과를 평균하고, 통화옵션의 몬테칼로 시뮬레이션가격을 얻기 위하여 평균값을 할인한다. 그러나 통화옵션가격을 결정하기 위하여 몬테칼로 시뮬레이션을 사용하는 경우 발생하는 가장 어려운 문제는 시뮬레이션 가격이 합리적 통화옵션가격 경계를 위반하는 경우 통화옵션가격 추정치는 무의미한(non-sensible) 가격추정치가

된다는 것이다.

따라서 본 논문에서 시뮬레이션을 위하여 기초자산가격에 대한 모의실험 표본경로가 대부분 마팅게일속성을 가지지 않기 때문에 나타나는 문제점을 제거하기 위하여 시뮬레이트 표본경로가 실증적 의미에서도 마팅게일이도록 보장하기 위하여 표준적인 절차에 수정하여 통화옵션가격을 평가하였다. 그리고 이와같은 시뮬레이션 방법을 GARCH 모형을 이용한 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형에 적용하여 옵션가격을 평가한다.7)

시뮬레이션의 유효성에 대한 판단의 근거로서 RMSE(root mean squared error), RMSPE(root mean squared percent error), MAE를 이용하였다. 옵션가격(c_t)에 대한 RMSE와 RMSPE는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(c_t^s - c_t^a)^2} \qquad \text{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{c_t^s - c_t^a}{c_t^a}\right)^2}$$

c_t^s : c_t 의 시뮬레이트된 통화옵션가격

c_t^a : 실제 통화옵션가격

T : 시뮬레이션 기간의 수

또한 모형가격과 실제가격의 평균크기를 비교함으로써 평가될 수 있는 통계치인 평균오차와 평균 %오차를 이용하였다.

$$\text{평균오차 (mean error)} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(c_t^s - c_t^a)$$

7) Duan과 Simonato(1995)

$$\text{평균 \%오차} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{(c_t^s - c_t^a)}{c_t^a}$$

평균오차가 가지고 있는 문제점은 만약 커다란 정(+)의 오차는 큰 부(-)의 오차를 상쇄시킨다면 "0"에 가깝다. 이와같은 문제를 회피하기 위하여 MAE(mean absolute error)를 이용할 수 있다. 그리고 시뮬레이트 된 통화옵션가격(c_t^s)이 실제 통화옵션가격(c_t^a)을 어느정도 설명하고 있는가를 알아 보기 위하여 다음과 같은 회귀분석을 실시하였다.

$$c_t^a = \alpha_0 + \alpha_1 c_t^s + \bar{e}$$

단, $\bar{e}$: 오차항

① OTM, ATM. ITM별 시뮬레이션 분석결과

<표 5>는 OTM옵션에서 실제가격과 일정한 변동성을 가정하는 모형가격, 확률적 변동성 모형가격을 제시하고 있다. 일정한 변동성을 가정하는 모형가격은 JY을 제외한 3개의 통화에 대하여 확률적 변동성 모형가격보다 높게 나타나고 있으며 확률적 변동성 모형가격이 평균가격오차, RMSE, RMSPE, MAE에서 일정한 변동성을 가정하는 모형가격보다는 낮게 나타나고 있다. 4개의 통화중에서 BP의 경우 % 기준 평균가격오차가 가장 높게 나타나고 있으며 FF과 JY이 가장 낮게 나타나고 있다. 또한 RMSE은 DM가 가장 낮게 나타나고 있다. 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 RMSE 감소비율은 BP, FF, JY에서 각각, 35%, 42%, 45%로 나타나고 있어 Melino와 Turnbull(1990)의 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형이 예측오차를 감소시킨다는 연구결과와 일치하고 있다. 전반적으로 OTM옵션에서 시장가격을 과소평가하는 것으로 나타났다. 그리고 회귀분석결과 확률적 변동성하의 통화옵션가결결정모형의 설명력이 일정한 변동성을 가정하는 모형보다는 설명력이 높은 것으로 나타

나고 있다. 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 경우 OTM 옵션에서 4개 통화 가운데 DM 모형설명력이 88.6%로 가장 높으며, BP가 57.6%로 가장 낮게 나타나고 있다. 일정한 변동성을 가정하는 모형에서는 JY의 R^2 값이 47.7%로 매우 낮게 나타나고 있어 모형의 유효성에 문제점을 제시한다고 할 수 있다. 이와같은 결과가 나타나는 이유는 OTM 옵션의 경우 옵션시장의 유동성에서 ATM 옵션시장보다는 떨어지기 때문에 나타나는 원인이라고 할 수도 있다.

<표 5> OTM 통화옵션가격의 요약통계량

S/X ≤ 0.97	BP	DM	FF	JY
실 제 가 격				
평균	0.66	0.19	0.75	0.76
표준편차	0.37	0.22	0.53	0.59
일정한 변동성을 가정한 모형				
평균	1.33	0.28	1.25	0.36
표준편차	0.78	0.29	0.81	0.31
평균가격오차(달러기준)	0.67	0.12	0.36	-0.12
평균가격오차(%기준)	1.01	0.11	0.07	-0.04
RMSE	0.86	0.15	0.72	0.61
RMSPE	1.41	0.99	1.28	0.57
MAE	0.61	0.08	0.52	0.39
회귀분석	α_0 = 0.177 α_1 = 0.395 R^2 = 0.517	α_0 = -0.014 α_1 = 0.787 R^2 = 0.857	α_0 = 0.060 α_1 = 0.552 R^2 = 0.703	α_0 = 0.272 α_1 = 1.279 R^2 = 0.477
확률적 변동성 모형				
평균	1.02	0.26	0.91	0.60
표준편차	0.62	0.30	0.63	0.55
평균가격오차(달러기준)	0.36	0.09	0.16	-0.16
평균가격오차(% 기준)	0.54	0.36	0.21	-0.21
RMSE	0.56	0.15	0.41	0.34
RMSPE	0.89	0.82	0.82	0.44
MAE	0.31	0.05	0.22	0.22
회귀분석	α_0 = 0.158 α_1 = 0.554 R^2 = 0.576	α_0 = -0.002 α_1 = 0.802 R^2 = 0.886	α_0 = 0.065 α_1 = 0.771 R^2 = 0.757	α_0 = 0.182 α_1 = 0.927 R^2 = 0.787

<표 6>은 ATM옵션에서 실제가격과 모형가격을 제시하고 있다. 확률적 변동성 모형가격은 JY를 제외하고 모든 통화에 대하여 시장가격보다 높게 나타나고 있으며, 일정한 변동성을 가정하는 모형가격보다는 각각의 통화에 대하여 예측정확도가 높게 나타나고 있다. 또한 확률적 변동성 모형가격은 모든 통화에 대하여 일정한 변동성을 가정하는 모형의 예측오차를 감소시키는 것으로 나타났다. 회귀분석결과 ATM 옵션에서 일정한 변동성을 가정하는 모형의 경우 64.3% ~ 86.4%로 나타나고 있으며 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 경우 88.5% ~ 89.5%로 나타나고 있어 확률적 변동성 모형의 설명력이 전체적으로 높게 나타나고 있는 것을 알 수 있다.

<표 6> ATM 통화옵션가격의 요약통계량

$0.98 \leq S/X \leq 1.02$	BP	DM	FF	JY
실 제 가 격				
평균	1.64	0.68	2.16	1.61
표준편차	1.15	0.38	1.56	1.08
일정한 변동성을 가정한 모형				
평균	2.43	0.87	2.92	1.19
표준편차	1.42	0.41	1.83	0.68
평균가격오차(달러기준)	0.79	0.19	0.76	-0.42
평균가격오차(%기준)	0.48	0.27	0.35	-0.26
RMSE	1.02	0.28	1.11	0.79
RMSPE	0.93	0.62	0.91	0.43
MAE	0.76	0.21	0.84	0.48
회귀분석	α_0 = -0.199 α_1 = 0.779 R^2 = 0.845	α_0 = 0.003 α_1 = 0.786 R^2 = 0.864	α_0 = -0.068 α_1 = 0.775 R^2 = 0.818	α_0 = 0.115 α_1 = 1.228 R^2 = 0.643
확률적 변동성 모형				
평균	2.08	0.80	2.58	1.45
표준편차	1.26	0.39	1.67	0.93
평균가격오차(달러기준)	0.44	0.12	0.42	-0.16
평균가격오차(% 기준)	0.26	0.17	0.19	-0.09
RMSE	0.67	0.22	0.76	0.41
RMSPE	0.66	0.51	0.69	0.34
MAE	0.43	0.15	0.51	0.26
회귀분석	α_0 = -0.165 α_1 = 0.896 R^2 = 0.885	α_0 = -0.013 α_1 = 0.867 R^2 = 0.895	α_0 = -0.091 α_1 = 0.885 R^2 = 0.889	α_0 = 0.025 α_1 = 1.083 R^2 = 0.891

<표 7>는 ITM 옵션에서 평균, 표준편차, RMSE, RMSPE, MAE, 회귀분석결과를 보여주고 있다. MAE의 관점에서 ITM 옵션의 경우 시장평균가격의 4 ~ 7%로써 낮게 나타나고 있다. RMSPE에서 JY의 예측의 정확성이 매우 높게 나타나고 있으며 BP의 정확성이 가장 낮게 나타나고 있다. 전반적으로 JY의 예측의 정확성이 가장 높은 것으로 나타났으나 BP의 경우 전반적으로 예측력이 떨어지는 것으로 나타나고 있다. 전체적으로 확률적 변동성 모형가격을 과대평가하는 결과를 나타내고 있어 Chesney와 Scott의 랜덤분산모형의 연구결과와 동일한 결과가 제시되고 있다. 그리고 회귀분석결과 OTM, ATM 옵션에 비교하여 모형의 설명력을 나타내는 R^2가 매우 높게 나타나고 있음을 알 수 있다. 특히 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 경우 FF와 JY의 경우 R^2값이 각각 98.6%, 98.2%로 나타나고 있어 모형의 설명력이 매우 높음을 알 수 있다.

OTM, ATM, ITM별로 확률적 변동성하의 통화옵션가격을 분석한 결과, ATM옵션의 경우에 모형이 시장가격을 가장 잘 반영한다는 기존의 연구결과와 일치하고 있다. 그리고 ATM옵션과 OTM옵션의 가격결정이 OTM옵션의 가격결정보다는 정확한 것으로 나타났으며 ATM옵션보다는 OTM옵션의 가격결정오차(mispricing)의 오차가 더 적은 것을 알 수 있다. 이것은 일반적으로 위험회피적인 투자자라면 내재가치가 있는 ITM옵션에 대해 옵션가격결정모형에 기초하여 평가하고 투자할 것이라는 시장의 일반적인 거래상황을 고려해 본다면 옵션가격결정모형이 ITM옵션을 훨씬 더 정확히 설명한다는 것은 당연하다고 할 것이다.

<표 7> ITM 통화옵션가격의 요약통계량

$1.03 \le S/X$	BP	DM	FF	JY
실 제 가 격				
평균	6.80	3.22	12.49	6.38
표준편차	2.67	1.76	6.71	3.79
일정한 변동성을 가정한 모형				
평균	7.68	3.48	13.18	5.95
표준편차	2.99	1.68	6.42	3.46
평균가격오차(달러기준)	0.88	0.26	0.69	-0.43
평균가격오차(%기준)	0.13	0.08	0.06	-0.07
RMSE	2.47	0.44	1.37	1.34
RMSPE	0.42	0.20	0.16	0.18
MAE	0.77	0.31	0.90	0.94
회귀분석	α_0 =-0.423 α_1 = 0.967 R^2 = 0.948	α_0 = -0.374 α_1 = 1.035 R^2 = 0.966	α_0 = -1.067 α_1 = 1.033 R^2 = 0.974	α_0 = 0.516 α_1 = 1.047 R^2 = 0.918
확률적 변동성 모형				
평균	7.28	3.37	12.85	6.28
표준편차	2.33	1.73	6.55	3.69
평균가격오차(달러기준)	0.48	0.15	0.36	-0.1
평균가격오차(% 기준)	0.07	0.04	0.03	-0.02
RMSE	1.39	0.43	0.99	0.52
RMSPE	0.25	0.17	0.11	0.09
MAE	0.49	0.23	0.57	0.36
회귀분석	α_0 = -0.393 α_1 = 1.004 R^2 = 0.964	α_0 = -0.213 α_1 = 1.015 R^2 = 0.965	α_0 = -0.542 α_1 = 1.019 R^2 = 0.986	α_0 = -0.022 α_1 = 1.018 R^2 = 0.982

② BP 만기별 통화옵션가격 분석결과

<표 8>는 OTM옵션에서 BP의 만기별 실제가격, 일정한 변동성을 가정하는 모형가격, 확률적 변동성 모형가격을 나타내고 있다. 표에서와 같이 만기가 길수록 가격오차의 비율은 높게 나타나고 있다. 확률적 변동성 모형가격은 30일 이하의 가격결정에서 R^2가 55%로 나타나 기존의 단기의 만기를 가진 가격결정에 확률적 변동성 모형이 유효하다는 기존의 연구결과와 일치하였다. 그리고 30일 이하의 만기를 가진 옵션에

서 일정한 변동성을 가정하는 모형과 GARCH 모형의 R^2값에 있어서 차이가 가장 크게 나타나고 있다. RMSE와 MAE의 관점에서도 단기의 만기를 가진 옵션의 가격결정에 높은 정확도를 나타낸다는 것을 알 수 있다. 회귀분석결과 일정한 변동성을 가정하는 모형보다는 전반적으로 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 예측력이 높게 나타나고 있으나, OTM옵션에서 R^2값은 매우 낮게 나타나고 있음을알 수 있다.

<표 8> BP의 만기별 통화옵션가격의 요약통계량(OTM 옵션)

S/X ≤ 0.97	1 - 30일	31 - 90일	91일 - 180일
실 제 가 격			
평균	0.44	0.64	0.97
표준편차	0.30	0.23	0.47
일정한 변동성을 가정한 모형			
평균	0.54	1.28	2.12
표준편차	0.29	0.47	0.69
평균가격오차(달러기준)	0.10	0.64	1.15
평균가격오차(%기준)	0.22	1.00	1.18
RMSE	0.29	0.78	1.22
MAE	0.24	0.68	1.15
회귀분석	α_0 = 0.113 α_1 = 0.603 R^2 = 0.298	α_0 = 0.389 α_1 = 0.195 R^2 = 0.167	α_0 = -0.252 α_1 = 0.578 R^2 = 0.591
확률적 변동성 모형			
평균	0.43	1.02	1.56
표준편차	0.25	0.45	0.60
평균가격오차(달러기준)	-0.01	0.38	0.59
평균가격오차(% 기준)	-0.02	0.59	0.60
RMSE	0.21	0.57	0.72
MAE	0.14	0.43	0.62
회귀분석	α_0 = 0.069 α_1 = 0.873 R^2 = 0.551	α_0 = 0.417 α_1 = 0.217 R^2 = 0.191	α_0 = 0.081 α_1 = 0.572 R^2 = 0.522

<표 9>은 ATM 옵션에서 BP의 만기별 가격을 나타내고 있다. ATM 옵션에서 일정한 변동성을 가정하는 모형가격와 확률적 변동성 모형가격은 모든 통화에 대하여 시장가격보다 높게 나타나고 있다. RMSE에서 만기가 길어질수록 예측오차가 증가하는 것으로 나타났다. 특히 확률적 변동성 모형가격의 경우 30일 이하의 옵션가격에서 예측오차가 낮게 나타나고 있다. 그리고 각각의 잔존만기동안에 확률적 변동성 모형가격은 일정한 변동성을 가정하는 모형가격보다는 낮게 나타나고 있다. 회귀분석결과 모형의 설명력을 나타내는 R^2 값에서 전체적으로 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형이 높게 나타나고 있다. 확률적 변동성 모형의 경우 상대적으로 91 ~ 180일의 만기를 가진 옵션에서 R^2가 63.1%로 상대적으로 낮게 나타나고 있다.

<표 9> BP의 만기별 통화옵션가격의 요약통계량(ATM 옵션)

$0.98 \leq S/X \leq 1.02$	1 - 30일	31 - 90일	91일 - 180일
실 제 가 격			
평균	1.21	1.86	3.22
표준편차	0.89	1.11	1.06
일정한 변동성을 가정한 모형			
평균	1.69	2.91	4.83
표준편차	1.06	1.06	0.89
평균가격오차(달러기준)	0.48	1.05	1.61
평균가격오차(%기준)	0.39	0.56	0.50
RMSE	0.71	1.17	1.69
MAE	1.21	1.07	1.60
회귀분석	α_0 = -0.029 α_1 = 0.735 R^2 = 0.757	α_0 = -0.856 α_1 = 0.934 R^2 = 0.790	α_0 = -1.752 α_1 = 1.031 R^2 = 0.731
확률적 변동성 모형			
평균	1.48	2.47	3.97
표준편차	0.99	1.06	0.85
평균가격오차(달러기준)	0.27	0.61	0.75
평균가격오차(% 기준)	0.23	0.32	0.23
RMSE	0.51	0.77	0.98
MAE	0.43	0.64	0.81
회귀분석	α_0 = 0.005 α_1 = 0.813 R^2 = 0.812	α_0 = -0.477 α_1 = 0.948 R^2 = 0.818	α_0 = -0.769 α_1 = 1.005 R^2 = 0.631

<표 10>은 ITM 옵션에서 BP의 만기별 가격을 나타내고 있다. 확률적 변동성 모형 가격은 각각의 만기별로 시장가격보다는 높게 나타나지만 일정한 변동성을 가정하는 모형가격보다는 낮게 나타나고 있다. ITM 옵션에서 회귀분석결과 전반적으로 R^2가 높게 나타나고 있다. 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 경우 R^2값이 91.3% ~ 93.1%의 높은 설명력을 나타내고 있다. 위의 OTM, ATM, ITM의 분석결과를 전체적으로 요약하면 OTM 옵션에서 RMSE가 가장 낮게 나타나고 있으며, R^2값은 ITM 옵션이 가장 높게 나타나고 있다. 일정한 변동성을 가정하는 모형과 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 차이는 OTM 옵션에서 큰 차이를 보이고 있다. 전체 만기별 가격에서도 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형이 일정한 변동성을 가정하는 모형을 지배하는 것으로 나타났다.

<표 10> BP의 만기별 통화옵션가격의 요약통계량(ITM 옵션)

$1.03 \leq S/X$	1 - 30일	31 - 90일	91일 - 180일
실 제 가 격			
평균	6.94	6.20	7.55
표준편차	3.19	1.83	2.56
일정한 변동성을 가정한 모형			
평균	7.30	7.22	9.91
표준편차	3.11	1.81	2.01
평균가격오차(달러기준)	0.36	1.02	2.36
평균가격오차(%기준)	0.05	0.16	0.31
RMSE	1.04	1.18	2.47
MAE	0.72	1.02	2.35
회귀분석	α_0 = -0.181 α_1 = 0.975 R^2 = 0.905	α_0 = -0.719 α_1 = 0.958 R^2 = 0.891	α_0 = -4.692 α_1 = 1.235 R^2 = 0.938
확률적 변동성 모형			
평균	7.17	6.80	8.62
표준편차	3.15	1.80	1.91
평균가격오차(달러기준)	0.23	0.60	1.07
평균가격오차(% 기준)	0.03	0.09	0.14
RMSE	0.96	0.77	1.39
MAE	0.62	0.62	1.16
회귀분석	α_0 = -0.007 α_1 = 0.968 R^2 = 0.913	α_0 = -0.488 α_1 = 0.983 R^2 = 0.931	α_0 = -3.562 α_1 = 1.289 R^2 = 0.917

Ⅳ. 要約 및 結論

본 연구가 기존의 통화옵션가격결정모형과 비교하여 몇가지의 장점을 가지고 있다. 첫째, 환율과 변동성의 기초적인 결합과정은 GARCH모형이다. 조건부 분산을 과거 조건부 분산과 과거잔차의 함수로서 모형화함으로써 MOM(Method of Moment) 또는 GMM 방법보다 좀더 효율적인 우도함수 방법에 의하여 변동성과정의 모수를 쉽게 추정할 수 있다. 둘째, 시뮬레이션 연구는 GARCH 모형의 모수 추정치의 소표본 특성이 대표본 특성에 매우 근접해 있다는 것을 보여주고 있다. 반면에, GMM 추정치의 소표본 특성은 거의 알려져 있지 않다.

위의 연구결과를 요약하면 첫째, OTM, ATM, ITM에서 일정한 변동성을 가정하는 모형은 GARCH 모형을 이용한 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형에 비교하여 일치적으로 높게 나타나고 있다. 둘째, 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형은 일정한 변동성을 가정한 모형과 비교하여 OTM옵션에서 가격결정오차가 ATM 옵션의 가격결정오차 크기 보다는 커다는 의미에서 ATM 옵션 뿐만 아니라 OTM옵션에 대해서도 중요한 의미를 지닌다. 이와같은 결론은 짧은 만기를 가진 옵션에 대하여 더욱 뚜렷이 나타나고 있다. 셋째, 가격오차의 비율정도는 잔존만기에 따라 변화한다. 시뮬레이션의 결과는 옵션의 만기가 길수록 가격결정오차는 커진다는 것을 보여주고 있다 즉, 만기편의의 경향이 나타나고 있다는 것을 의미한다.

또한 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형이 Black과 Scholes의 옵션가격결정모형보다 행사가격과 만기편의를 감소시키며 특히 단기의 만기를 가진 범위에서는 매우 유의적인 효과가 나타났다는 Knoch(1993)의 연구결과와 일치한다. 그리고 위의 연구결과는 단기 옵션, OTM 옵션에 대한 가격오차를 유의적으로 감소시킨 Cao(1992), Amin와 Ng(1993), Heyen, Kemna와 Vorst(1994)에 의한 실증적 연구결과와도 일치되는 연구결과를 제시하고 있다. 이로볼 때, 통화옵션가격결정모형을 이용하여 옵션가격을 예측함에 있어 환율변화의 분산이 일정하다는 가정하에서 변동성을 모형에 투입하는 것보다는 환율변동성의 이분산성을 고려하여 추정된 변동성을 모형에 투입하는 것이 옵션의 시장가격에 대한 모형의 예측력을 개선시킬 수 있다고 할 수 있다. 그리

고 회귀분석결과 설명력을 나타내는 R^2 값이 높게 나타나고 있으며, 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 R^2 값이 일정한 변동성을 가정하는 모형의 R^2 보다는 높게 나타나고 있다. OTM 옵션에서 R^2 값은 낮게 나타나고 있으나 일정한 변동성모형과의 차이는 크게 나타나고 있다. 그리고 ATM 옵션에서 R^2 값이 대체적으로 높게 나타나고 있는 것을 알 수 있다. 그러나 GARCH모형을 이용한 확률적 변동성하의 통화옵션가격결정모형의 모형가격이 시장가격과 상당한 편차를 보이는 부분도 있어 환율변동성에 점프특성과 이자율의 확률적 과정을 고려하지 않았기 때문이라고 할 수도 있다.

參 考 文 獻

박천식, "환율변동성과 통화옵션가격결정모형의 유효성", 경북대학교 경영학박사학위논문(1995)

정범석, "GARCH모형을 이용한 주식수익률의 조건부 변동성에 관한 연구", 국민대학교 경영학박사학위논문(1994).

Hull J., *Options, Futures, and Other Derivative Securities,* Prentice-Hall International, Inc., 1989.

Amin, K., and V. Ng, 1993, ARCH Process and Option Valuation, unpublished manuscript, University of Michigan.

Akgiray, V., "Conditional Heteroscedasiticity in Time Series of Stock Returns : Evidence and Forecasts," *Journal of Business*, Vol. 62, 1989, pp. 55-80.

Akgiray, V., and G.G. Booth, "Mixed Diffusion-Jump Process Modelling of Exchange Rate Movements," (1988), *Review of Economics and Statistics* 70:4, Nov. pp. 631-637.

Biger N. and J.C. Hull, "The Valuation of Currency Options", *Financial Management* (1983), pp. 24-28.

Black F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy,* (1973), pp. 637-659.

Bodurtha J.N., Jr. and G.R. Courtadon, "Tests of an American Option Pricing Model of on the Foreign Currency Options Market", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* (1987), pp. 153-167.

Bodurtha J.N., Jr. and G.R. Courtadon, "Efficiency Tests of the Foreign Currency Options Market", *Journal of Finance,* (1986), pp. 151-162.

Bollerslev, T., "A Conditional Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return," *Review of Economics and Statistics* 69, (1987), pp. 542-547.

Boothe, P. and D. Glassman, "The Statistical Distribution of Exchange Rates, Empirical Evidence and Economic Implications, *Journal of International Economics* 22, (1987), pp. 297-319.

Boley, P., M. Broadie and P. Glasserman, "Monte Carlo Methods for Security Pricing", *Working Paper*, University of Waterloo, (1995).

Cao, Charles, "Pricing Foreign Currency Option With Stochastic Volatility," *University of Chicago working paper*, (November 1992).

Chaudhury, Mohammed M. and Jasson Z. Wei, A Comparative Study of the GARCH(1,1) and Black-Scholes Option Prices, *Working Paper*, University of Saakatchewan, (1995).

Day, T. E., and C. M. Lewis. Sock market volatility and the information content of stock index options. *Journal of Econometrice,* (1990).

Duan, Jin-Chuan, "The GARCH Option Pricing Model, *Mathematical Finance* 5(1), (1995a), pp. 13-32.

Duan, Jin-Chuan, and T.G. Simonato, "Empirical Martingale Simulation for Asset Prices", *Working Paper*, Macgill University, (October 1995),

Engle R., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica,* (1982), pp. 987-1007.

Engle R., T. Hong, A. Kane, and J. Noh., Arbitrage valuation of variance forecasts. *Advanced Future and Option Research* 6, (1993), pp. 393-415.

Engle R. and C. Mustafa, "Implied ARCH models from options prices", *Journal of Econometrics* 52, (1992), pp. 289-311

Garman M.B. and S.W. Kohlhagen, "Foreign currency option values", *Journal of International Money and Finance,* (1983), pp. 231-238.

Grabbe J. Orlin, "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Jounal of International Money and Finance,* (Dec. 1983), pp. 239-253.

Harrison J., and D. Kreps, "Martingales and Arbitage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economics Theory* 20, (1979), pp. 381-408.

Harrison J., and S. Pliska, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and their Applications* 11, (1981), pp. 215-260.

Heynen, R., A. G. Z. Kemna, and T. Vorst. "Analysis of the Term Structure of Implied Volatilities." *Journal of financial and Quantitative Analysis,* 29, (March 1994), pp. 31-56.

Hsieh, David A., "Modelling Heteroskedasticity in Daily Foreign Exchange Rates Changes, *Journal of Business and Economic Statistics* 7, (1989a), pp. 307-317.

Hull J., and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance,* (1987), pp. 281-300.

Johnson, H., and D. Shanno., "Option Pricing when the Variance is Changing," *Journal of financial and Quantitative Analysis,* 22, (June 1987), pp. 143-151.

Jorion P., "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets", *The Review of Financial Studies,* (1988), pp. 427-445.

Kallsen, J. and M. Taqqu, Option Pricing in ARCH-Type Models, unpublished manuscipt, Department of Mathmatics, Boston University, (1994).

Knoch, Hans-Jurgen, The Pricing of Foriegn Currency Options with Stochastic Volatlity," *Yale School of Organization and Management Working Paper,* April (1990).

Mandelbrot, B. B., "The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business* 36, (1963), pp. 394-419.

McFarland James W., R. Richardson Pettit, and Sam K. Sung, "The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement", *Journal of Finance,* (1982), pp. 693-715.

Melino, Angelo and Stuart Turnbull, "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility," *Journal of Econometrice* 45, (1990), pp. 239-265.

Myers R.J., and S.D. Hanson, "Pricing commodity options when the underlying futures price exhibits time-varying volatility", *American Journal of Agricultural Economics* 75, (1993), pp. 121-130.

Nelson, D.B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach," *Econometrica,* Vol. 59, (1991), pp. 347-370.

Scott, L.O. "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theoy, Estimation and an Application." *Journal of financial and Quantitative Analysis,* 22, (Dec 1987), pp. 419-438.

Westerfield Janice M., "Empirical Properties of Foreign Exchange Rates Under Fixed and Floating Rate Regimes", *Journal of International Economics,* (1977), pp.181-200.

Wiggins, J. B. "Option Values under Stochastic Volatility : Theory and Empirical Estimates." *Journal of Financial Economics* 19, (1987), pp. 351-372.