

에너지법을 이용한 보강된 박판의 안정성해석

Stability Analysis of Stiffened Thin Plates Using Energy Method

김 문 영¹⁾ · 민 병 철²⁾

By *KIM, Moon Young, and MIN, Byoung Cheol*

ABSTRACT : For stability analysis of stiffened rectangular thin plates with various boundary conditions, Ritz method is presented. An energy method is especially useful in those cases where a rigorous solution of the differential equation is unknown or where we have a plate reinforced by stiffeners and it is required to find only an approximate value of the critical load. The strain energy due to the plate bending and the work done by the in-plane forces are taken into account in order to apply the principle of the minimum potential energy. The buckling mode shapes of flexural beams with various boundary conditions are derived, and shape functions consistent with the given boundary conditions in the two orthogonal directions are chosen from those displacement functions of beams. The matrix equations for stability of stiffened rectangular thin plates are determined from the stationary condition of the total potential energy. Numerical example for stability behaviors of horizontally and vertically stiffened plates subjected to uniform compression, bending and shear loadings are presented and the obtained results are compared with other researchers' results.

1. 서 론

압연강재나 판형 등의 플랜지 또는 복부를 구성하여 국부좌굴을 일으킬 수 있는 판 요소에서 교량, 선박, 항공기 그리고 빌딩의 보강된 판 구조에 이르기까지, 박판부재는 공학의 여러 분야에서 광범위하게 사용되어 왔다. 일반적으로 판으로 구성

된 구조물이 한계상태에 이르더라도 복판의 좌굴이 부분적인 것에 그쳐서 구조물 전체가 좌굴에 이르지 않도록 보강재를 이용한 설계가 필요하게 된다. 특히 보강된 박판은 외력에 대하여 효율적인 구조적 거동을 보이기 때문에 공학뿐만 아니라 건설분야의 주요 재료로 사용되어져 왔다. 이러한 중요성 때문에 판 부재의 정적처짐[1]과 좌굴특성

1) 성균관대 토목공학과, 부교수, 공학박사

2) 성균관대 토목공학과, 박사과정

[2]에 대한 연구가 이제까지 활발하게 이루어졌다. 판 요소의 편미분 방정식으로 표현되는 운동 방정식과 여러 가지 경계조건을 만족시키는 엄밀해는 극히 제한되어 있으므로 일반적인 판 구조의 안정성 해석은 유한요소법과 같은 근사해법에 많이 의존하고 있다. 윤등[3]은 직교이방성 박판부재의 국부좌굴거동을 조사하였으며, 김과 민[4]은 Ritz 방법을 사용하여 구형박형과 좌굴하중 및 고유진동수를 구하였다.

본 연구에서는 문헌[4]의 연구를 확장시켜서, 여러 경계조건하에서 균일압축, 휨 그리고 전단하중을 받는 박판의 좌굴해석을 수행하며, 수평 및 수직보강재가 좌굴거동에 미치는 영향을 조사한다. 이를 위하여 에너지법의 하나인 Ritz 방법[5]을 사용하여 면내력을 받는 보강된 구형 박판의 안정성 해석을 수행한다. 보강재의 영향을 고려하기 위하여 보의 휨 및 비틀 변형 에너지를 판의 휨 거동에 대한 변형에너지에 추가하고 면내력에 의한 포텐셜에너지를 제시한다. 또한, 보의 좌굴방정식으로부터 여러 가지 경계조건을 만족시키는 보의 좌굴모드를 유도하여 양방향에 대한 기하학적 경계조건을 만족시키는 보의 좌굴모드를 곱하고 이러한 함수들의 일차결합으로 Ritz 방법에 사용할 판의 처짐 함수를 가정한다. 여기서 얻어진 처짐 함수를 에너지 식에 대입하고 가우스 수치적분[6]을 행하며 처짐 파라미터에 대하여 변분을 취하면, 안정성 해석을 위한 보강된 박판의 고유치문제를 얻을 수 있다. 본 연구에서 제시한 이론 및 방법의 타당성을 입증하기 위하여, 수치해석예제를 통하여 여러 가지 경계조건하에서 수평 및 수직보강재를 갖는 구형박판의 좌굴해석을 수행하고 다른 문헌의 해석결과와 비교, 검토한다.

2. 보강된 박판의 안정성 해석

판의 좌굴해석을 수행하기 위하여, 그림 1에서와 같이 면내력을 받는 보강된 구형 박판을 생각한다. x축과 y축에 대한 길이는 각각 a, b이고 두

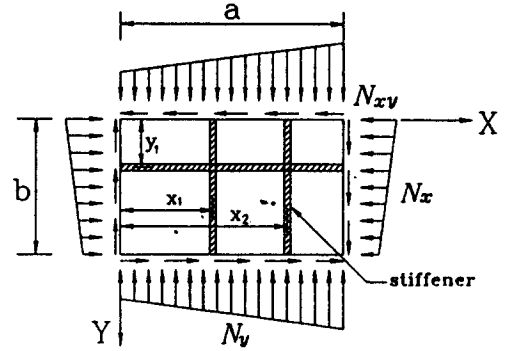


그림 1. 면내력을 받는 보강된 구형 판

께는 h이다. 이때 총 포텐셜에너지 원리는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\delta \Pi = \delta(U + \Omega) = 0 \quad (1)$$

여기서 U는 변형에너지 그리고 Ω 는 면내력에 의한 포텐셜에너지를 나타내며, δ 는 변분을 의미한다. 보강된 판의 변형에너지는 판의 변형에너지에 수평 및 수직보강재의 휨 및 비틀 변형에너지를 추가함으로써 얻을 수 있다. 박판의 변형에너지 U_p 와 보강재의 변형에너지 U_s 에 대한 구체적인 식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$U = U_p + U_s \quad (2)$$

$$U_p = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^k \int_0^a \left[EI_h \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} \right)^2 + GJ_h \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^l \int_0^b \left[EI_v \left(\frac{\partial^2 w_q}{\partial y^2} \right)^2 + GJ_v \left(\frac{\partial^2 w_q}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dy \quad (4)$$

여기서 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 이고, ν 는 포아송비를 나타낸다. 첨자 h 와 ν 는 각각 수평 및 수직 보강재를 의미하고, k 와 l 은 이들의 개수를 표시한다. 또한, 박판에 작용하는 면내력에 의한 포텐셜에너지 Ω_p 와 보강재에 작용하는 축방향 하중에 의한 포텐셜에너지 Ω_s 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Omega_k = \Omega_p + \Omega_s \quad (5)$$

$$\Omega_p = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (6)$$

$$\Omega_s = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^k \left[\int_0^a A_k \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} \right)^2 dx + \sum_{q=1}^l \int_0^b A_q \left(\frac{\partial w_q}{\partial y} \right)^2 dy \right] \quad (7)$$

여기서 N_x , N_y , N_{xy} 는 면내력을 나타내며, 평형 조건을 만족시켜야 한다.

3. 보의 좌굴모드

판의 좌굴해석은 양방향에 대한 보의 좌굴모드를 이용하여 구할 수 있으며 각각의 경계조건에 따른 좌굴모드의 방정식은 다음 식과 같다. 먼저 보의 좌굴방정식을 생각한다.

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} + P \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (8)$$

여기서 EI 와 P 는 각각 보의 휨강성과 축력이며, ϕ 는 처짐 함수를 나타낸다. 위 식의 일반해는 다음과 같다.

$$\phi(x) = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx + A_3 x + A_4 \quad (9)$$

식(9)에 경계조건을 적용하면 좌굴모드에 대응하

는 좌굴하중을 구할 수 있다. 아래는 열가지 경계 조건에 대응하는 좌굴모드를 정리한 것이다.

1) 힌지단-힌지단

$$\text{경계조건 : } \phi(0) = \phi'(0) = 0, \phi(L) = \phi'(L) = 0$$

$$\text{좌굴모드 : } \phi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{L}, i=1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

2) 고정단-자유단

$$\text{경계조건 : } \phi(0) = \phi'(0) = 0, \phi''(L) = \phi'''(L) = 0$$

$$\text{좌굴모드 : } \phi_i(x) = 1 - \cos \frac{i\pi x}{2L}, i=1, 3, 5, \dots \quad (11)$$

3) 고정단-힌지단

$$\text{경계조건 : } \phi(0) = \phi'(0) = 0, \phi(L) = \phi''(L) = 0$$

$$\text{좌굴모드 : } \phi_i(x) = \sin k_i x - k_i x - k_i L (\cos k_i x - 1), i=1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

여기서 $k_i L$ 은 표 1에 나타내었다.

표 1. $\tan k_i L - k_i L = 0$ 의 근

mode	$k_i L$	mode	$k_i L$
1	4.4934094579091	6	20.371302959288
2	7.7252518369377	7	23.519452498689
3	10.904121659429	8	26.666054258813
4	14.066193912813	9	29.811598790893
5	17.220755271931	10	32.956389039822

4) 고정단-고정단

$$\text{경계조건 : } \phi(0) = \phi'(0) = 0, \phi(L) = \phi'(L) = 0$$

$$\text{좌굴모드 : } \phi_i(x) = 1 - \cos \frac{2i\pi x}{L}, i=1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

5) 고정단-연직로올러

$$\text{경계조건 : } \phi(0) = \phi'(0) = 0, \phi(L) = \phi'''(L) = 0$$

$$\text{좌굴모드 : } \phi_i(x) = 1 - \cos \frac{i\pi x}{L}, i=1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

6) 자유단-힌지단

$$\text{경계조건 : } \phi''(0) = \phi'''(0) = 0, \phi(L) = \phi''(L) = 0$$

$$\text{좌굴모드} : \phi_1(x)=x, \quad \phi_i(x)=\sin\frac{(i-1)\pi x}{L},$$

$$i=2, 3, 4, \dots \quad (15)$$

7) 자유단-자유단

$$\text{경계조건} : \phi''(0)=\phi'''(0)=0, \quad \phi''(L)=\phi'''(L)=0$$

$$\text{좌굴모드} : \phi_1(x)=1, \phi_2(x)=x, \phi_i(x)=\sin\frac{(i-2)\pi x}{L}, i=3, 4, 5, \dots \quad (16)$$

8) 자유단-연직로올러

$$\text{경계조건} : \phi''(0)=\phi'''(0)=0, \quad \phi'(L)=\phi'''(L)=0$$

$$\text{좌굴모드} : \phi_1(x)=1, \phi_i(x)=\sin\frac{(i-1)\pi x}{2L},$$

$$i=2, 3, 4, \dots \quad (17)$$

9) 연직로올러-힌지단

$$\text{경계조건} : \phi'(0)=\phi'''(0)=0, \quad \phi(L)=\phi''(L)=0$$

$$\text{좌굴모드} : \phi_i(x)=\cos\frac{i\pi x}{2L}, i=1, 3, 5, \dots \quad (18)$$

10) 연직로올러-연직로올러

$$\text{경계조건} : \phi'(0)=\phi'''(0)=0, \quad \phi'(L)=\phi'''(L)=0$$

$$\text{좌굴모드} : \phi_1(x)=1, \phi_i(x)=\cos\frac{(i-1)\pi x}{L},$$

$$i=1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

4. 에너지 방법

초기의 면내력을 받는 구형박판의 안정성해석을 수행하기 위하여, Ritz 방법을 적용한다. 이를 위하여 처짐 함수 w 를 다음과 같이 가정한다.

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y) \quad (20)$$

여기서 a_{ij} 는 미지의 계수이고 m 과 n 은 각각 x 와 y 의 방향에 대한 가정함수의 개수를 나타낸다. ϕ_i 와 ψ_j 는 각각 박판의 x 축과 y 축 양단의 기하학적

경계조건을 만족시키는 형상함수이며, 3장에서 구한 보의 좌굴모드 중에서 양단의 경계조건에서 대응하는 함수를 선택하여 사용한다. 윗식을 식(1)에 대입하고 가우스 수치적분을 행하면, 아래와 같이 a_{ij} 에 관한 에너지 식으로 표시할 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2}(U^T K_E U + U^T \lambda K_G U) \quad (21)$$

여기서 $U^T = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} ; a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} ; a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}]$ 이다. λ 는 면내력이 비례하중으로 작용하는 경우에 하중계수를 나타내고, K_E 와 K_G 는 각각 탄성 및 기하학적 강도행렬을 의미한다. 기하학적 강도행렬을 계산할 때, 외력조건에 대하여 평면응력상태를 만족시키는 면내력 N_x, N_y, N_{xy} 를 x, y 의 함수로 나타내고, 이를 식(1)에 대입하여 수치적분을 행한다.

총포텐셜에너지 원리를 적용하면 식(21)로부터 아래와 같은 고유치 관계식을 얻는다. 이 식으로부터 좌굴하중 및 좌굴모드를 구할 수 있다.

$$K_E U = \lambda K_G U \quad (22)$$

5. 수치해석에

본 연구에서는 보강된 구형 박판의 안정성해석을 수행하기 위하여 대표적인 에너지법인 Ritz 방법을 적용하였다. 판의 좌굴형상모드는 보는 좌굴모드를 두 방향으로 채택함으로써 얻어지며, 보강재의 영향을 고려한 박판의 변형에너지와 면내력에 의한 포텐셜에너지 사용하여 근사해석을 수행할 수 있는 해석 프로그램을 개발하였다. 수치적분은 12점 및 24점 가우스 적분법을 적용하였으며, 고유치문제는 IMSL[7]의 subroutine을 이용하였다. 일반적인 해석예제에서 x 축 및 y 축 방향으로 가정하는 처짐 형상 모드의 개수는 각각 m, n 으로 표시하며, 사용하는 처짐 함수의 총수는 $m \times n$ 이 된다. 단, 수평으로 보강된 박판이 압축과

힘을 받고, 하중을 받는 양단이 단순지지인 경우에 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$w(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sum_{j=1}^n a_j \psi_j(y) \quad (23)$$

여기서 x축 방향으로의 형상함수는 특정한 m에 대응하는 한 개의 sin함수로 가정하므로, 처짐함수의 총수는 $1 \times n$ 이 된다. 따라서 좌굴하중산정시 소요되는 계산시간이 급격히 감소하는 잇점을 얻을 수 있다.

다양한 경계조건을 갖는 보강된 안정성 해석을 수행하고, 판의 종횡비(a/b) 변화에 따른 본 연구의 해석결과와 다른 문헌의 결과를 비교, 검토한다. 이때, 좌굴하중은 무차원 좌굴계수를 이용하여 나타내었으며, 판판의 무차원 좌굴계수 k는 다음과 같다.

$$k = \frac{12(1-\nu^2)b^2}{\pi^2 E} N_{cr} \quad (24)$$

여기서 N_{cr} 은 단위길이당 판의 좌굴하중을 나타낸다. 이후의 해석예제에 사용된 판의 재원은 아래와 같다. 이때 수평 및 수직보강재의 탄성계수 값은 판과 동일하다.

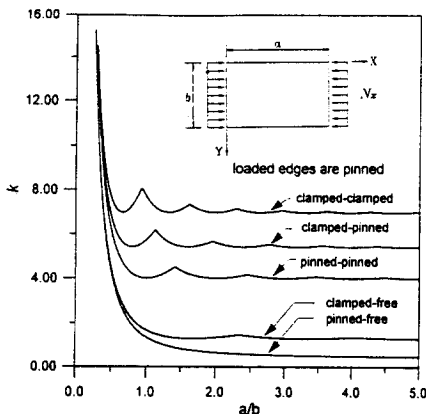
$$\begin{aligned} E &= 3 \times 10^7 \text{ psi} & h &= 1 \text{ in} \\ b &= 100 \text{ in} & \nu &= 0.3 \end{aligned} \quad (25)$$

5.1 균일 압축을 받는 보강된 구형 박판의 안정성 해석

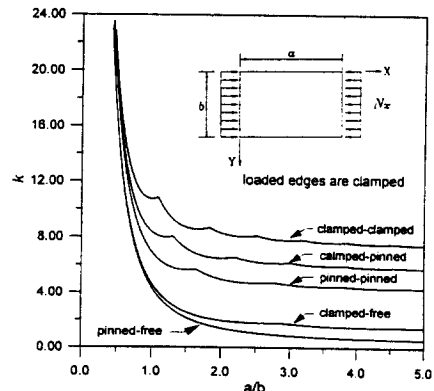
5.1.1 구형 박판의 안정성 해석

본 예제에서는 균일한 일방향 압축을 받는 구형 박판의 종횡비(a/b)에 따른 좌굴계수를 산정하였다. 그림 2a와 그림 2b는 하중이 재하되는 x방향($x=0, x=a$)에 대한 경계조건이 각각 단순지지 및 고정지지일 때, 하중이 재하되지 않는 y 방향($y=0, y=b$)에 대하여 5가지 경계조건을 적용하였다. 그림 2a의 경우는 식(23)의 처짐함수를 사용하였으며, 그림 2b의 경우는 x, y 방향으로 각각 $m=7, n=5$ 의 좌굴모드 함수를 취하여 좌굴해석을 행하였다.

10가지 경계조건에 대한 구형 박판의 좌굴해석을 수행한 결과, 각각의 경계조건에 따른 최소 좌굴계수 K_{min} 을 구할 수 있으며 하중이 작용하지 않는 지지조건이 단순지지-자유단일 때에는 판의 횡방향 길이 a가 종방향 길이 b에 비해 무한히 크다고 가정하여 좌굴계수를 산정하여 표 2에 나타내었다. 표에 나타난 바와 같이 에너지법을 이용한



(a) 하중재하 단이 단순지지인 박판의 좌굴계수



(b) 하중재하 단이 고정지지인 박판의 좌굴계수

그림 2. 균일 압축을 받는 구형 박판의 좌굴계수 k

박판의 판의 좌굴해석 결과가 문헌[8]과 잘 일치함을 알 수 있다.

표 2. 균일 압축을 받는 구형 박판의 최소좌굴계수 K_{min}

unloaded ed	loaded edges are clamped	loaded edges are pinned	
	This study	Ref [5]	This study
clamped-clamped	7.447 (m=7, n=5)	6.97	6.973 (m=7, n=5)
clamped-pinned	5.761 (m=6, n=5)	5.42	5.410 (m=6, n=5)
pinned-pinned	4.303 (m=5, n=5)	4.0	4.000 (m=5, n=5)
clamped-free	1.287 (m=4, n=5)	1.277	1.2863 (m=3, n=5)
pinned-free	0.459 (m=1, n=5)	0.425	0.4255 (m=1, n=5)

5.1.2 수평으로 보강된 구형 박판의 안정성해석

본 예제에서는 면내 하중 N_x 를 받는 수평으로 보강된 구형 박판의 안정성해석을 수행하였다. 보강재는 수평 방향으로 한 개 또는 두 개로 보강되었고 판의 경계조건은 네 변 모두 단순지지이다. 이때 보강재의 휨강성 매개변수는 식(26)과 같이 나타낼 수 있다.

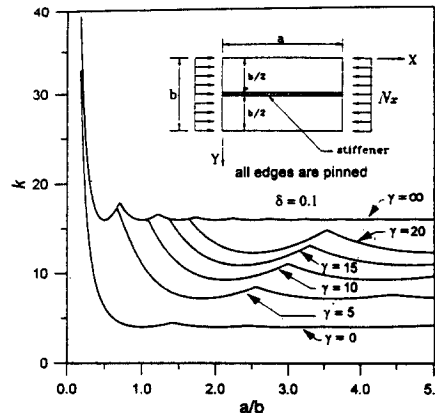
$$\gamma = \frac{E_s I_s}{b D} \quad (26)$$

$$\delta_i = \frac{P_i}{b N_x} = \frac{A_i}{b h} \quad (27)$$

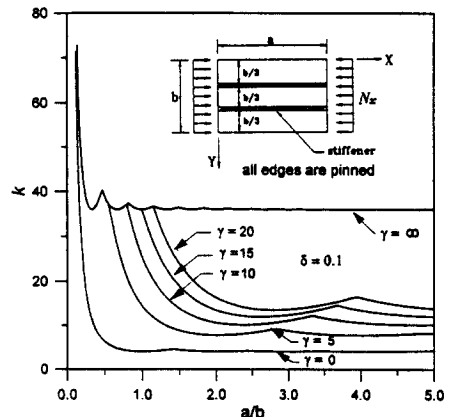
여기서 E_s 와 I_s 는 보강재의 탄성계수와 단면 2차 모멘트이며 b , h 그리고 D 는 판의 종방향 길이, 두께 그리고 휨강성을 나타내고 P 와 A 는 보강재에 작용하는 축방향력과 단면적이다. 보강재에 작용하는 축방향력은 단위면적당 하중으로 식(27)과 같이 매개변수 δ 로 나타내고 보강재의 비틀림강성은 무시하였다. 그림 3a는 보강재가 $y=b/2$ 위치에 1개 수평으로 보강한 경우에 대하여 종횡비(a/b)에 따른 좌굴계수를 산정한 결과이다. 또한, 보강재의 단면적 $A=10in^2$ ($\delta=0.1$)인 경우에 휨강성 매개변수 γ 의 변화에 따른 좌굴계수 k 의 변화를 함께 나타내었다. 수평보강재가 없는 경우의 최소 좌굴계수는 $K_{min}=4$ 이며 판의 종횡비가 일정할 때 γ 가 증가함에 따라 좌굴계수 k 가 증대됨을 알 수 있다. 휨강성이 무한히 크면 보강재가 $y=b/2$ 위

치에 1개 수평 보강된 경우 최소좌굴계수 $K_{min}=16$ 이 된다. 그림 3b는 보강재가 $y=6/3$ 및 $y=2b/3$ 위치에 2개 수평으로 보강한 경우에 대하여 해석한 것이다. 보강재의 단면적은 $A=10in^2$ 으로 그림 3a의 경우와 같으며 휨강성이 무한히 큰 경우에 최소좌굴계수는 $K_{min}=36$ 이 됨을 알 수 있다.

표 3와 표 4은 그림 3a과 그림 3b에서와 같이 각각 보강재가 1개인 경우와 2개인 경우에 대하여 좌굴하중을 산정한 결과를 나타낸 것이다. 보강형태와 판의 종횡비 그리고 보강재에 작용하는 축방향력에 대한 좌굴하중의 해석결과를 Timoshenko[2]의 해와 비교하였다. 표에 나타난



(a) 보강재를 1개 수평 보강한 경우의 좌굴계수



(b) 보강재를 2개 수평 보강한 경우의 좌굴계수

그림 3. 수평으로 보강된 구형 박판의 좌굴계수 k

표 3. 보강재를 $y=b/2$ 위치에 1개 수평 보강한 경우의 좌굴계수 k

a/b	δ	$\gamma=5$			$\gamma=10$			$\gamma=15$			$\gamma=20$		
		0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.2
0.6	Timoshenko	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5
	this study	16.54	16.54	16.54	16.54	16.54	16.54	16.54	16.54	16.54	16.54	16.54	16.54
1.0	Timoshenko	12.0	11.1	9.72	16.0	16.0	15.8	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0
	this study	12.00	11.14	9.723	16.0	16.0	15.78	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0
1.4	Timoshenko	8.62	7.91	6.82	12.9	12.0	10.3	16.1	15.7	13.6	16.1	16.1	16.1
	this study	8.608	7.917	6.814	12.92	11.93	10.33	16.08	15.77	13.73	16.08	16.08	16.08
1.8	Timoshenko	7.84	7.19	6.16	10.6	9.70	8.35	13.2	12.2	10.5	15.9	14.7	12.6
	this study	7.833	7.188	6.167	10.57	9.714	8.352	13.25	12.20	10.51	15.89	14.64	12.64
2.2	Timoshenko	8.23	7.58	6.50	10.2	9.30	7.99	12.0	11.0	9.45	13.9	12.7	10.9
	this study	8.281	7.593	6.509	10.14	9.305	7.983	11.99	11.00	9.450	13.81	12.69	10.91
2.6	Timoshenko	9.27	8.50	7.28	10.8	9.86	8.48	12.1	11.1	9.53	13.5	12.4	10.6
	this study	9.121	8.400	7.242	10.78	9.887	8.476	12.12	11.11	9.532	13.44	12.34	10.59
3.0	Timoshenko	8.31	7.62	6.53	12.0	11.1	9.52	13.1	12.0	10.3	14.1	13.0	11.1
	this study	8.247	7.579	6.516	12.08	11.11	9.521	13.13	12.04	10.32	14.13	12.96	11.11
3.6	Timoshenko	8.01	7.38	6.32	11.4	10.5	9.05	13.9	12.7	10.9	14.8	13.5	11.6
	this study	8.012	7.358	6.320	11.42	10.51	9.060	13.88	12.72	10.90	14.76	13.54	11.60
4.0	Timoshenko	7.96	7.29	6.24	10.2	9.35	8.03	12.4	11.4	9.8	14.6	13.4	11.6
	this study	7.947	7.289	6.250	10.18	9.351	8.029	12.39	11.39	9.798	14.58	13.41	11.55

표 4. 보강재를 $y=b/3$ 과 $y=2b/3$ 위치에 2개 수평 보강한 경우의 좌굴계수 k

a/b	δ	$\gamma=10/3$		$\gamma=5$		$\gamma=20/3$		$\gamma=10$	
		0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1
0.6	Timoshenko	26.8	24.1	36.4	33.2	36.4	36.4	36.4	36.4
	this study	26.84	24.14	36.40	33.21	36.40	36.40	36.40	36.40
0.8	Timoshenko	16.9	15.0	23.3	20.7	29.4	26.3	37.2	37.1
	this study	16.91	15.04	23.26	20.75	29.43	26.34	37.21	37.11
1.0	Timoshenko	12.1	10.7	16.3	14.5	20.5	18.2	28.7	25.6
	this study	12.09	10.72	16.32	14.49	20.50	18.22	28.71	25.58
1.2	Timoshenko	9.61	8.51	12.6	11.2	15.5	13.8	21.4	19.0
	this study	9.606	8.507	12.59	11.53	15.55	13.79	21.42	19.02
1.4	Timoshenko	8.32	7.36	10.5	9.32	12.7	11.3	17.2	15.2
	this study	8.314	7.358	10.52	9.311	12.71	11.26	17.09	15.14
1.6	Timoshenko	7.70	6.81	9.40	8.31	11.1	9.82	14.5	12.8
	this study	7.698	6.811	9.390	8.310	11.08	9.807	14.45	12.79
1.8	Timoshenko	7.51	6.64	8.85	7.83	10.2	9.02	12.9	11.4
	this study	7.507	6.642	8.846	7.828	10.18	9.012	12.85	11.38
2.0	Timoshenko	7.61	6.73	8.70	7.69	9.78	8.65	11.9	10.6
	this study	7.608	6.731	8.694	7.692	9.778	8.652	11.95	10.57

바와 같이 본 연구에 의한 좌굴해석 결과와 Timoshenko의 결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

5.1.3 수직으로 보강된 구형 박판의 안정성 해석
그림 4는 균일 압축을 받는 수직 보강된 박판을

나타낸다. 판의 경계조건은 네변 단순지지이며 보강재는 한 개, 두 개 및 세 개를 사용하여 이에 대응하는 最小鋼比(최소 휨 강성계수비) γ_{min} 를 산정하였다. 여기서 γ 는 식(26)에 정의되었으며, 최소 강비는 보다 큰 휨강성을 갖는 보강재를 설치한다 하더라도 판의 임계하중은 더 이상 커지지 않게

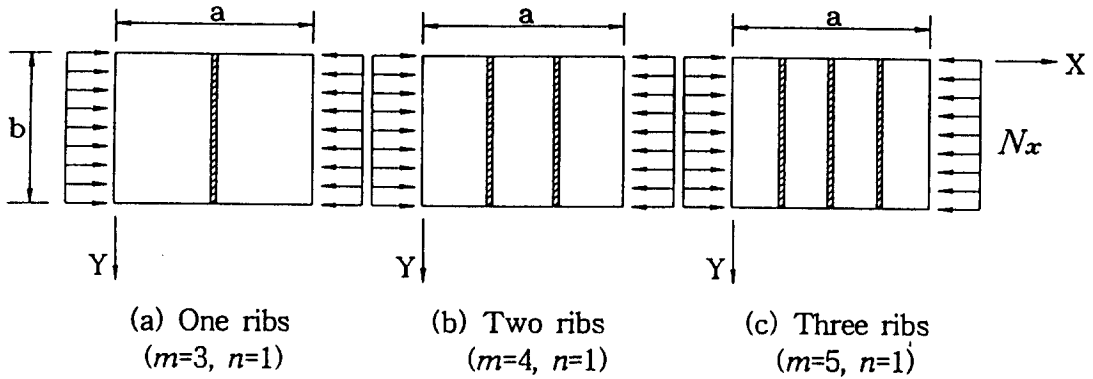


그림 4. 균일 압축을 받는 수직 보강된 구형 박판

되는 최소의 휨강성 계수의 비를 의미한다. 수직으로 보강된 판의 최소강비를 산정할 때 사용된 처짐 함수의 갯수 $m(x$ 방향)과 $n(y$ 방향)은 그림 4의 괄호안에 나타내었다.

표 5는 보강형태와 판의 종횡비에 대한 최소강비 γ_{min} 를 Timoshenko[2]의 결과와 비교하여 나타낸 것이다. 표에 나타난 바와 같이 에너지법을 이용한 수직으로 보강된 박판의 해석 결과가 문헌과 잘 일치함을 알 수 있다.

5.2 순수 휨을 받는 보강된 구형 박판의 안정성 해석

5.2.1 순수 휨을 받는 박판의 안정성 해석

본 예제에서는 휨을 받는 구형박판의 안정성 해석을 수행하였다. 그림 5는 하중이 재하되는 횡방향($x=0, x=a$)에 대한 경계조건은 단순지지이며 하중이 재하되지 않는 종방향($y=0, y=b$)에 대해서는 5가지 경계조건에 대하여 종횡비(a/b)와 좌

굴계수의 관계를 나타낸 것이다. 좌굴해석을 수행할 때 면내력 N_x 는 선형분포를 이루며 식(28)과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_x = N_o \left(1 - \frac{2y}{b}\right) \quad (28)$$

순수 휨을 받는 여러 가지 경계조건에 대한 박판의 좌굴해석을 수행한 결과, 좌굴거동의 특성을 고려하여 y 방향으로 여러 개수의 처짐 함수를 사용하여야 정확한 좌굴하중 산정이 가능하며 본 연구에서는 $n=6$ 을 사용하였다. 또한 그림으로부터 각각의 경계조건에 따른 최소좌굴계수 K_{min} 을 구할 수 있으며 하중이 작용하지 않는 방향의 지지조건이 고정지지-자유단인 경우, $a/b=5$ 에 대하여 좌굴계수를 구하고 단순지지-자유단일 때에는 판의 횡방향 길이 a 가 종방향길이 b 에 비해 무한히 크다고 가정($a/b=100$)하여 좌굴계수를 산정하였다. 표 6에 나타난 바와 같이 에너지법을 이용한 박판의 좌굴해석 결과가 문헌[3]과 잘 일치함을 알 수 있다.

표 5. 수직으로 보강된 박판의 최소 휨 강성계수 γ_{min}

a/b		0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	$\sqrt{2}$
One ribs	Timoshenko	12.8	7.25	4.42	2.82	1.84	1.19	0.435	0
	this study	12.64	7.185	4.388	2.800	1.824	1.187	0.4335	0
Two ribs	Timoshenko	65.5	37.8	23.7	15.8	11.0	7.94	4.43	2.53
	this study	64.78	37.42	23.48	15.64	10.90	7.855	4.385	2.504
Three ribs	Timoshenko	177	102	64.4	43.1	30.2	21.9	12.6	7.44
	this study	174.9	101.2	63.64	42.57	29.83	21.69	12.43	7.467

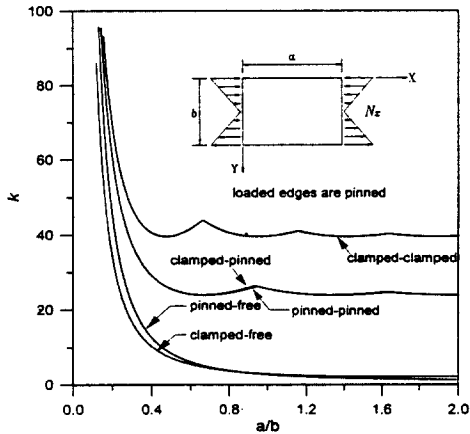


그림 5. 순수 휨을 받는 보강된 구형 박판

표 6. 순수 휨을 받는 박판의 최소좌굴계수 K_{min}

unloaded edges	loaded edges are pinned	
	Ref [6]	This study
clamped-clamped	39.2	39.572 (m=4, n=6)
clamped-pinned	·	23.942 (m=4, n=6)
pinned-pinned	23.92	23.881 (m=4, n=6)
clamped-free	·	2.1456 (m=6, n=6)
pinned-free	·	0.8510 (m=2, n=6)

5.2.2 순수 휨을 받는 보강된 구형 박판의 안정성 해석

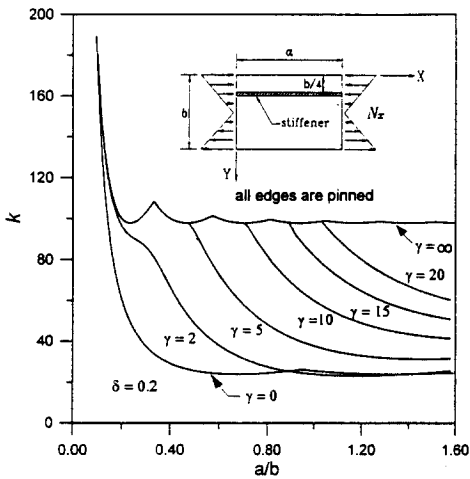


그림 6. 순수 휨을 받는 보강된 구형 박판

그림 6은 순수 휨을 받는 $y=b/4$ 위치에 x 방향으로 수평 보강된 박판의 좌굴해석 결과를 나타낸 것이다. 박판의 경계조건은 네변 모두 단순지지되어 있다. 축방향력 매개변수는 $\delta=0.2(A=10 \text{ in}^2)$ 을 적용하였다. 본 예제에서는 보강재의 휨강성 매개변수 γ 의 변화에 다른 판의 좌굴계수 k 를 산정하였으며 수평보강재의 휨강성이 영인 경우에 최소좌굴계수 $K_{min}=23.89$ 이며 보강재의 휨강성이 무한대인 경우에 최소좌굴계수 $K_{min}=97.71$ 이 됨을 알 수 있다.

5.3 전단을 받는 보강된 구형 박판의 안정성 해석

5.3.1 전단을 받는 구형박판

그림 7은 전단을 받는 구형 판의 종횡비(a/b)의 증가에 따른 좌굴해석 결과를 나타낸 것이다. 해석 예제는 네변 모두 단순지지, 네변 모두 고정지지 그리고 x 방향($x=0, x=a$)에 대한 경계조건

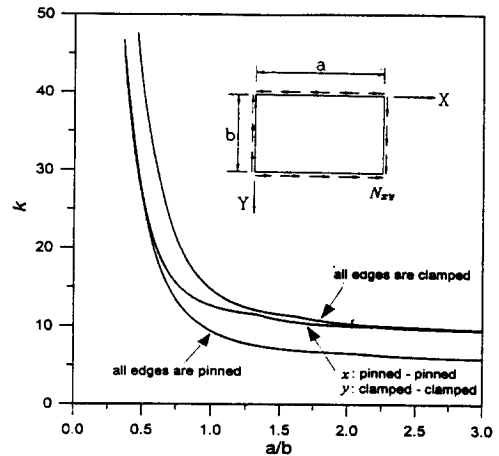


그림 7. 전단을 받는 보강된 구형 박판

표 7. 전단을 받는 박판의 좌굴계수 K

boundary condition	loaded edges are pinned	
	Ref. [2]	This study
all clamped dege	8.99	9.194 (a/b=5.0, m=n=8)
all pinned edge	5.35	5.400(a/b=10.0, m=10, n=8)
x direction : pinned edges y direction : clamped edges	8.99	9.209 (a/b=5.45, m=m=8)

은 단순지지이고 y 방향($y=0, y=b$)에 대해서는 고정지지인 3가지 경우에 대하여 좌굴하중을 산정하였다. 전단에 의한 좌굴은 x 및 y 축에 대하여 대칭성을 갖지 않으므로 복잡한 좌굴형상을 구현할 수 있도록 양방향에 대하여 각각 $m=8, n=8$ 의 좌굴모드 개수를 사용하여야 정확한 해석이 가능하다. 또한 전단하중을 받는 경우, 경계조건이 고정지지와 같이 좌굴모드가 cosine 함수로 구성되면 식(6)의 세 번째항에서 편미분의 적분 값이 영이 되므로 좌굴해석은 불가능하게 된다. 따라서 전단하중을 받는 고정지지된 박판의 안정성해석은 문헌[4]에서 제시한 자유진동모드를 이용하였다. 표 7은 각각의 경계조건에 따른 최소좌굴계수 K_{min} 을 산정하고 이때 적용된 판의 종횡비와 양방향에 대한 좌굴모드를 함께 나타내었다. 표에 나타난 바와 같이 에너지법을 이용한 박판의 판의 좌굴해석 결과가 문헌[2]와 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

5.3.2 전단을 받는 보강된 구형 박판

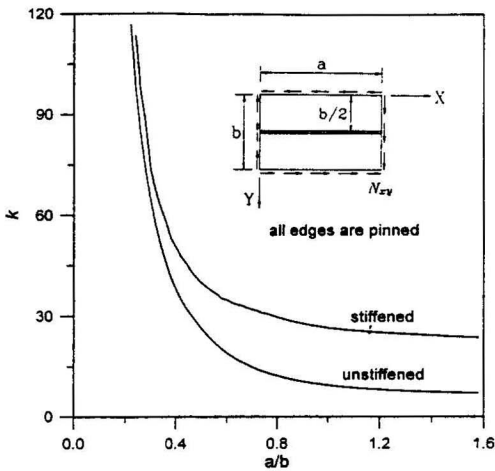


그림 8. 전단을 받는 보강된 구형 박판

그림 8은 전단을 받는 보강된 구형 박판의 종횡비에 따른 좌굴계수를 나타내고 있다. 박판의 경계조건은 네변모두 단순지지이며 보강재에 작용하는 축방향력은 없는 것으로 가정하였다. 보강재

의 휨강성이 무한히 크고 비틀 강성을 무시한 경우에 대응하는 좌굴계수값과 보강재가 없는 경우의 결과를 비교하여 제시하였다.

6. 결 론

본 연구에서는 대표적인 에너지 법인 Ritz방법을 사용하여 보강된 박판의 안정성 해석을 수행하였다. 다양한 경계조건에 대응하는 보의 좌굴모드를 유도하고, 이 결과를 사용하여 기하학적 경계조건을 만족시키는 박판의 처짐 함수를 가정하였다. 외력에 의해 평형 상태에 있는 박판 요소에 대한 외력일과 변형 에너지로 구성되는 총포텐셜에너지 식을 유도하고, Ritz 방법에 따라 지지 조건을 만족하는 처짐 함수를 대입하여 정식화하였다. 또한 보의 휨강성 및 비틀 강성을 이용하여 보강재의 영향을 고려하였으며 다양한 경계 조건 및 하중을 받는 보강된 박판의 안정성해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 다양한 경계조건과 하중을 받는 보강된 박판의 좌굴해석을 수행한 결과, 다른 문헌의 해석결과와 잘 일치하였다.

(2) 본 연구에서 제시한 에너지법은 유한요소법에 비해 해석방법이 간단하며 엄밀해와 거의 일치하는 정확한 해석이 가능하다.

(3) 구형 박판에 여러 개의 보강재가 사용되더라도 이방성 판으로 치환할 필요 없이 직접적인 해석이 가능하다.

(4) 임의의 판에 대한 경계조건만 모델링이 되면 본 연구에서 제시한 이론 및 방법으로 다양한 형태의 보강재로 보강된 구형 박판의 정확한 임계하중 산정이 가능하다고 판단된다.

(5) 본 연구에서 얻어진 결과는 보강된 박판의 좌굴문제에 대하여 다양한 조건들을 적용할 수 있으므로, 강상판과 판형동의 국부좌굴검토에 유용하게 사용될 수 있다고 판단된다.

참 고 문 헌

1. S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw Hill, 1959
2. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1963, pp. 348-439
3. 윤순중, 문환두, 이원복, "직교이방성 박판부재의 국부좌굴 관련 설계기준에 관한 연구", 대한토목학회논문집, 제15권, 제3호, 1995. 5., pp. 533-544.
4. 김문영, 민병철, "에너지법을 이용한 구형박판의 안정성 및 자유진동해석", 대한토목학회논문집, 제16권, I-4호, 1996.7., pp.411-424.
5. A. Chajes, Principles of Structural Stability Theory, 1974, pp. 238-302
6. J. H. Ferziger, Numerical Methods for Engineering Application, John Wiley & Sons, Inc., 1981, pp. 41-49
7. IMSL Library, Problem-solving software system for mathematical and statistical FORTRAN programming IMSL, Inc., 1984
8. C. G. Salmon and J. E. Johnson, Steel Structures-Design and Behavior, 2nd ed., Harper & Row, 1980, pp.306-310
9. W. D. Pilkey, Formular for Stress, Strain, and Structural Matrices, John Wiley & Sons, Inc., 1994, pp. 1054-1057