68 대한기계학회논문집(A) 제 20 권 제 1 호, pp. 68~78, 1996

〈論 文〉

층상균열이 있는 보의 진동특성 해석

한병기 · 이성희

(1995년 1월 9일 접수)

A Study of Vibration Characteristic Analysis of Beams with Laminar Tear

Byoung Kee Han and Sung Hee Lee

Key Words: Timoshenko Beam(티모센코 보), Laminar Tear(층상균열), Vibration Characteristic of Beam(보의 진동특성), Non-Destructive Testing(비파괴검사)

Abstract

A study of the natural vibration of Timoshenko beam with a laminar tear is presented. An analytic model, based on the transverse and longitudinal vibration of beams is employed to determine the natural frequencies. A specific example are given to show the effects of rotary inertia, and shear deformation on the natural frequencies of the beam with a laminar tear. The variations of natural frequencies of beam with the changes of size and location of laminar tear are plotted for several thickness ratio.

기 호 설 명

b_j : j번째 영역의 보의 폭
d : 보의 길이로 무차원화된 층상균열부의 길이
e : 상부보와 하부보의 중립축간의 거리
$\dot{e}$: 영역길이로 무차원화된 상부보와 하부보의 중립축간의 거리
E : 종탄성계수
G : 횡탄성계수
h_j : j번째 영역의 보의 두께
J : 보의 단위길이당 회전관성
k : 단면의 형상계수(shape factor)
K_i : 진동수 파라미터($i=1-3$)
L_j : j번째 영역의 보의 길이
M_j : j번째 영역의 모멘트
U_j : 영역길이로 무차원화된 종방향변위
V_j : j번째 영역의 전단력
Y_j : 영역길이로 무차원화된 횡방향변위
ρ : 단위부피당의 질량
ω : 고유진동수

*회원, 홍익대학교 기계공학과
**회원, 홍익대학교 대학원 기계공학과

1. 서 론

최근 공업기술의 발달 및 최적설계로 인하여 기계구조물이 경량화 및 고강도화 추세에 있다. 선박, 항공, 우주설비, 원자력발전설비, 중공업 및 석유화학 플랜트분야 등에서 부재내부의 사소한 결함도 구조물의 안정성에 큰 영향을 미치므로 이에 대한 신뢰성이 요구된다. 그러나 제조공정중 소재내부의 산화물, 유화물, 기공, 슬랙(slag) 등은 압연과정을 거치는 동안 층상균열(laminar tear)형태의 결함으로 진행되며, 이 결함부에서 응력집중이 발생한다. 이러한 불연속부를 파괴의 기점으로 하여 균열이 전파되어 대형사고를 일으키는 취성파손이 발생한다. 고온 고압의 내압을 받는 압력용기에서도 피로크랙이 발생되어 진전되므로 파손수명을

예측하여 구조물의 보수시기 및 교환시기를 결정하거나 잔여수명의 신뢰성있는 예측이 필요하다.

각종 구조물의 구성은 보, 판 및 셀요소로 이루어져 있으며, 특히 보요소는 널리 쓰이는 부재요소 중의 하나이다. 보의 진동에 관한 일반적인 연구[1~4]에서 가장 단순한 형태는 전단변형과 회전관성 효과를 무시한 오일러-베르누이의 보이론(Euler-Bernoulli beam theory)이며, Timoshenko[5]는 전단변형의 효과를 고려한 미분방정식을 유도하였다. 보의 두께/길이의 비가 상당히 작은 경우에 오일러-베르누이의 보 이론은 상당히 정확한 값을 예측하지만, 두께/길이의 비가 상당이 큰 경우에는 전단변형효과를 무시한 보이론(Euler-Bernoulli beam theory)은 부적합하므로, 이를 고려한 보이론(Timoshenko beam theory)을 적용하여야 한다. 또한 보의 전단변형을 고려할 때 지배방정식에 전단계수를 포함하는 경우[6]와 고차항효과[7,8]를 포함시키는 경우로 크게 분류할 수 있다. 이 때 전자는 후자보다 간단한 형태를 가지므로 해를 구하기가 용이하다. Hutchinson[9]은 사각단면인 보의 횡진동특성을 해석하였으며, 근사해의 적용범위를 보여준다. 한편, Wang[10]은 보의 내부에 전체폭이 일정길이만큼 불연속되어 있는 경우에 대한 진동특성의 변화를 경계조건과 함께 제시하였다. 여기서, Wang은 오일러-베르누이의 보이론을 적용하였다. Springer[11]는 복합재 판넬내부에 원형의 cutout이 있는 경우의 진동특성을 제시하였다. Murakami[12]는 적층보 내부에 슬립현상이 발생하였을 때, 적층보 구조물의 강성저하에 미치는 영향을 제시하였고, 층상균열로 인한 구조물의 파괴현상을 연구하는데 필요한 자료를 제시하였다. 한편 Cawley 등[13]은 복합재 구조물의 비파괴 검사방법을 보여주고 있다.

본 논문에서는 층상균열의 크기변화에 따른 진동특성의 변화를 연구하며, 회전관성과 전단변형이 고려된 Timoshenko beam theory를 적용하여 결함이 존재하는 보의 진동특성의 변화를 연구한다. 이 결과로부터 진동특성의 변화와 결함의 위치 및 크기의 상관성을 예측할 수 있는 비파괴 검사방법의 기초자료를 제시하고자 한다. 본 연구의 결과는 궁극적으로 결함의 크기 및 위치를 대략적으로 예측/평가할 수 있는 비파괴 검사방법으로 사용될 수 있다.

2. 이 론

본 연구에서 이론해석을 위한 좌표계를 Fig. 1에서 보여준다. 보는 다수의 영역, 즉 결함부가 존재하는 내부영역과 존재하지 않는 좌우양단영역으로 구별된다. 각 영역에서 오른쪽을 양(+)의 방향으로 하는 국부좌표계를 설정하였다. 양단영역에서는 보의 양단에 원점이 존재하는 반면에, 내부영역에서는 중앙에 원점이 위치한다. 일반적인 j번째 영역에 대해서 X_j, m_j, EI_j, h_j는 영역의 길이방향 좌표, 단위길이당의 질량, 굽힘강성, 보의 두께를 각각 의미한다. 편의상 L_j는 양단부의 길이를, $2L_j$는 내부영역의 길이를, L_0는 보의 전체길이를 나타낸다. X_j, Y_j, U_j는 각각 길이방향 좌표, 종방향 변위 그리고 길이방향변위를 L_j에 대하여 무차원화하여 나타낸 것이다. 결함부의 상부와 하부를 구

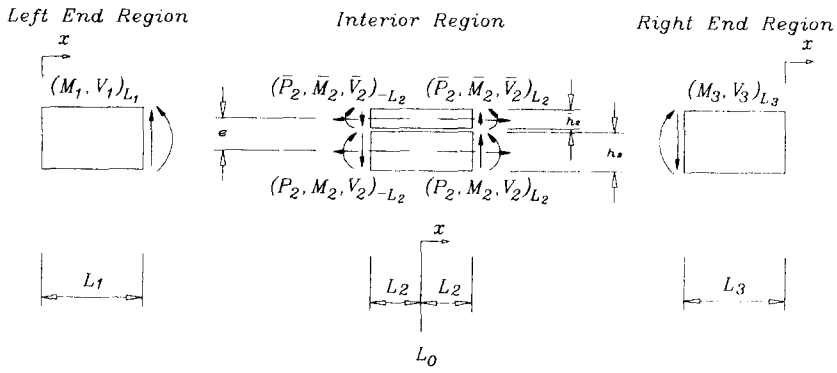


Fig. 1 Geometry and interaction

별하기 위해, 상부의 물리량을 나타내는 기호에 바(bar)를 표기한다.

2.1 보의 횡진동

라디안 진동수 ω인 결함이 없는 보에서, 횡진동에 대한 보(lateral vibration of beam)의 지배방정식을 무차원화하여 나타내면 다음과 같다.[1]

$$Y_{,xxx}+(m/EI+m/kAG)L^2\omega^2Y_{,xx}+(Jm/(kAG\cdot EI)-m/EI)L^4\omega^2Y=0 \quad (1)$$

여기서, EI는 보의 강성, m은 단위길이당 질량, A는 보의 단면적, G는 전단탄성계수, k는 단면의 형상계수, J는 단위길이당 회전관성, Y는 y/L, X는 x/L를 나타내며, ( )는 첨자에 대한 미분을 의미한다. 특정영역을 의미하는 첨자는 이하 수식 전개에서 언급하지 않으며, 식 (1)의 일반해는

$$Y=C_1f_1+C_2f_2+C_3f_3+C_4f_4 \quad (2)$$

이며, $f_1=\sin K_1X$, $f_2=\cos K_1X$, $f_3=\sin hK_2X$, $f_4=\cos hK_2X$이다. 여기서, K_1, K_2는 진동수 파라미터로써 다음과 같다.

$$K_1=((-(S+RB)+((S+RB)-4(RSB-B))^{0.5})/2)^{0.5}$$
$$K_2=(((S+RB)+((S+RB)-4(RSB-B))^{0.5})/2)^{0.5}$$

또한 B, RB, S 그리고 RSB는 각각 굽힘(bending), 회전관성(rotary inertia)과 굽힘, 전단변형(shear deformation), 그리고 회전관성과 전단변형 및 굽힘에 관계하는 항들이며, 다음과 같다.

$$B=(m/EI)L^4\omega^2$$
$$RB=(J/EI)L^2\omega^2$$
$$S=(m/kAG)L^2\omega^2$$
$$RSB=(Jm/(kA\cdot GEI))L^4\omega^4$$

식 (1)의 일반해는 경계조건에 따라 다음과 같이 정리될 수 있으므로,

$$Y=B_1(f_1-f_3)+B_2(f_2-f_4) : \text{고정}$$
$$Y=B_1(f_1+f_3)+B_2(f_2+f_4) : \text{자유}$$
$$Y=B_1(f_1+f_3)+B_2(f_1-f_3) : \text{단순지지} \quad (3)$$

보의 횡진동에 대한 일반해는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$Y=B_1F_1+B_2F_2 \quad (4)$$

즉, 보의 양단영역에서는 두 개의 미지상수가 존재함을 알 수 있다. 한편, 보의 내부영역에서는 경계조건을 알 수 없으므로 횡진동에 대한 변위는 네 개의 미지상수를 갖는다.

2.2 보의 종진동

결함이 존재하는 영역에서는 다음과 같은 사항이 고려되어야 한다. 결함부는 각각 상부보(upper beam)와 하부보(lower beam)로 구분된다. 영역간의 연속조건을 적용시키기 위해서는 각각의 상부보와 하부보의 중립축에 대한 길이방향의 변위가 고려된다. 무차원화된 길이방향의 진동에 대한 방정식은 다음과 같다.[1]

$$U_{,xx}-K_3^4U=0 \quad (5)$$

여기서, $U=u/L$, $K_3^4=(\rho/E)L^2\omega^2$를 의미하며, 식 (5)의 일반해는 다음과 같다.

$$U=A_1g_1(X)+A_2g_2(X) \quad (6)$$

여기서, $g_1(X)=\sin K_3^2X$, $g_2(X)=\cos K_3^2X$이다. 한편, 양단영역에서 보의 종진동(longitudinal vibration of beam)에 대한 일반해는 경계조건에 따라 다음과 같으므로,

$$U=A_1g_1(X) : \text{고정, 단순지지}$$
$$U=A_2g_2(X) : \text{지지} \quad (7)$$

보의 종진동에 대한 일반해는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$U=A_ig_i(X),\ i=1 \text{ or } 2 \quad (8)$$

2.3 상부보와 하부보간의 관계

층상균열부의 상부와 하부간의 계수간의 관계식을 얻으려면 영역의 끝단에서 다음과 같은 조건을 만족시켜야 한다.

$$\bar{Y}=Y \quad (9)$$
$$\bar{Y}_{,x}=Y_{,x} \quad (10)$$
$$\bar{E}\bar{A}\bar{U}_{,x}=-EAU_{,x} \quad (11)$$
$$\bar{U}=U-\dot{e}Y_{,x} \quad (12)$$

여기서, $\dot{e}$는 각각의 상부보와 하부보의 중립축 사이의 길이를 영역의 길이로 무차원화한 것을 의미한다.

2.4 결함이 보의 양단중에 존재하는 경우

식 (4)와 (8)을 식 (9)~(12)에 대입하면 다음과 같은 계수간의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ A \end{Bmatrix} \tag{13}$$

$$A = a^* B_1 + b^* B_2 \tag{14}$$

식 (13)과 (14)의 계수는 경계조건에 따라 결정된다. 이것은 결함이 보의 양단영역중에 존재하는 특별한 경우이며, 위 식으로부터 보의 양단영역에 충상균열 결함이 있을 때에는 두 개의 미지상수가 있음을 알 수 있다.

2.5 결함이 보의 내부에 존재하는 경우

충상균열 결함이 있는 보의 내부영역에서의 횡진동과 종진동에 대한 변위는 다음과 같다.

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{4} \bar{C}_i \bar{f}_i(X)$$

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{4} C_i f_i(X) \tag{15}$$

$$\bar{U} = \bar{A}_1 \bar{g}_1(X) + \bar{A}_2 \bar{g}_2(X)$$

$$U = A_1 g_1(X) + A_2 g_2(X) \tag{16}$$

내부영역의 양단경계에서 식 (9)와 (10)의 연속조건을 적용하면, 상부보와 하부보의 횡방향 변위는 다음과 같은 계수들간의 관계식을 만족해야 한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_1(+1) & \bar{f}_2(+1) & \bar{f}_3(+1) & \bar{f}_4(+1) \\ \bar{f}_1(-1) & \bar{f}_2(-1) & \bar{f}_3(-1) & \bar{f}_4(-1) \\ \bar{f}_{1,X}(+1) & \bar{f}_{2,X}(+1) & \bar{f}_{3,X}(+1) & \bar{f}_{4,X}(+1) \\ \bar{f}_{1,X}(-1) & \bar{f}_{2,X}(-1) & \bar{f}_{3,X}(-1) & \bar{f}_{4,X}(-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_1(+1) & f_2(+1) & f_3(+1) & f_4(+1) \\ f_1(-1) & f_2(-1) & f_3(-1) & f_4(-1) \\ f_{1,X}(+1) & f_{2,X}(+1) & f_{3,X}(+1) & f_{4,X}(+1) \\ f_{1,X}(-1) & f_{2,X}(-1) & f_{3,X}(-1) & f_{4,X}(-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

식 (17)에서 좌변행렬의 역행렬을 우변의 행렬에 곱하면 다음 식을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

같은 방법으로 내부영역의 양단경계에 식 (11)의 조건을 적용함으로써, 상부보와 하부보의 종진동에 대한 계수들의 관계를 구할 수 있다.

$$\bar{A}_1 = a' A_1 \tag{19}$$

$$\bar{A}_2 = b' A_2 \tag{20}$$

여기서, $a' = -(EAK_3^2 g_2(l) / \overline{EAK_3^2 g_2}(l))$, $b' = -(EAK_3^2 g_1(l) / \overline{EAK_3^2 g_1}(l))$이다.

한편, 식 (12)의 조건을 적용함으로써, 횡진동과 종진동에 대한 변위의 계수들의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_1 = \frac{-e}{(2a\bar{g}_1(l) - 2g_1(l))L}[Y(+1) - Y(-1)] \tag{21}$$

$$A_2 = \frac{-e}{(2a\bar{g}_2(l) - 2g_2(l))L}[Y(+1) - Y(-1)] \tag{22}$$

여기서, e는 상부보와 하부보의 중립축 사이의 거리를 의미한다. 식 (21)과 (22)를 행렬의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \tag{23}$$

여기서, 행렬의 각 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_{11} &= r_1(f_{1,X}(+1) - f_{1,X}(-1)) \\ r_{12} &= r_1(f_{2,X}(+1) - f_{2,X}(-1)) \\ r_{13} &= r_1(f_{3,X}(+1) - f_{3,X}(-1)) \\ r_{14} &= r_1(f_{4,X}(+1) - f_{4,X}(-1)) \\ r_{21} &= r_2(f_{1,X}(+1) - f_{1,X}(-1)) \\ r_{22} &= r_2(f_{2,X}(+1) - f_{2,X}(-1)) \\ r_{23} &= r_2(f_{3,X}(+1) - f_{3,X}(-1)) \\ r_{24} &= r_2(f_{4,X}(+1) - f_{4,X}(-1)) \end{aligned} \tag{24}$$

2.6 영역간의 관계

j번째와 $j+1$번째 영역의 경계에서는 다음과 같은 기하학적, 역학적 연속조건이 만족되어야 한다.

$$\begin{Bmatrix} Y \times L \\ Y_{,X} \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{X_j=1} = \begin{Bmatrix} Y \times L \\ Y_{,X} \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{X_{j+1}=-1} \tag{25}$$

여기서, M과 V는 각각 굽힘모멘트와 전단력을 나타내며, 결함이 존재하지 않는 영역에서는 다음

의 관계를 가진다.

$$M=(EI/L)\,Y_{,XX}$$
$$V=(EI/L^2)\,Y_{,XXX} \tag{26}$$

한편, 결함이 존재하는 영역에서의 굽힘모멘트와 전단력 성분은 다음의 관계를 가진다.

$$M=(\bar{E}\bar{I}/L)\,\bar{Y}_{,XX}+(EI/L)\,\bar{Y}_{,XX}+eEAU_{,X}$$
$$V=(\bar{E}\bar{I}/L^2)\,\bar{Y}_{,XXX}+(EI/L^2)\,\bar{Y}_{,XXX} \tag{27}$$

식 (25)로부터 내부영역간에는 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\{C\}_j=[I]_{j+1}\{C\}_{j+1} \tag{28}$$

식 (28)을 $N-1$번째의 영역까지 적용시키면 다음과 같은 순환관계식을 얻는다.

$$\{C\}_j=[I]_{j+1}[I]_{j+2}\cdots[I]_{N-1}\{C\}_{N-1} \tag{29}$$

N-1번째 영역과 N번째 영역에 식 (25)의 조건을 적용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\{C\}_{N-1}=[R]_N\{B\}_N \tag{30}$$

여기서, 매트릭스 $\{C\}_j$는 내부영역의 네 개의 미지수이고, 매트릭스 $\{B\}_j$는 각각의 양단영역의 두 개의 미지수이다. $j=2,\ 3,\ \cdots,\ N-1$은 내부영역을 가리키며, $j=1,\ N$은 양단을 각각 의미한다. 식 (30)을 (29)에 대입하고 j를 2로 하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\{C\}_2=[Q]_N\{B\}_N \tag{31}$$

여기서, $\{Q\}_N$은 4×2행렬로써 $[I]_3[I]_4\cdots[I]_{N-1}\{R\}_N$을 의미한다. 그리고 첫번째 영역과 두번째 영역에 대하여 식 (25)를 적용하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\{C\}_2=[Q]_1\{B\}_1 \tag{32}$$

식 (31)와 (32)를 등가시키면 다음과 같은 네 개의 선형 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$[[Q]_1\,[Q]_N]\begin{Bmatrix}(B)_1\\(B)_N\end{Bmatrix}=0 \tag{33}$$

진동수방정식은 식 (33)의 행렬식을 영으로 함으로써 구할 수 있다.

3. 수치결과 및 실험

3.1 수치결과 검증

본 연구에서 개발한 프로그램의 신뢰성을 검증하기 위하여 Wang[10]의 수치결과를 본 연구의 수치결과와 비교하였다. 결함의 크기와 위치 및 재료의 물성치는 다음과 같다.

$E=213.621\ \text{GPa}\,(3.1\times10^7\psi)$
$\rho=7832\ \text{kg/m}^3\,(0.28\text{lb/in}^3)$
$\bar{h}_2=0.001905\ \text{m}\,(0.075\ \text{in})$
$h_2=0.001778\ \text{m}\,(0.07\ \text{in})$
$L_0=0.5379\ \text{m}\,(21.175\ \text{in})$
$L_1=0.1524\ \text{m}\,(6\ \text{in})$
$2L_2=0.02667\ \text{m}\,(1.05\ \text{in})$
$L_3=0.3588\ \text{m}\,(14.125\ \text{in})$
$e=0.002731\ \text{m}\,(0.1075\ \text{in})$
$b=0.00635\ \text{m}\,(0.25\ \text{in})$

Table 1은 Wang의 연구에서 사용된 수치 예와 동일하게 외팔보 내부에 층상균열부가 존재하는 경우에 대한 본 연구의 수치결과와의 비교이다. 각 모드에 표시된 수치결과는 진동수 파라미터 Ω의 값이며 무차원화된 값이다. 즉, $\Omega=(\rho_0A_0/E_0I_0)^{1/2}L_0^2\omega$이다. 그의 연구에서는 회전관성 및 전단변형효과를 고려하지 않았으므로, 본 연구에서도 이들을 고려하지 않은($RB=S=RSB=0$)수치결과를 Thoery Ⅰ에 제시하였으며, 결과들이 서로 일치함을 볼 수 있다. Thoery Ⅱ는 굽힘과 전단변형효과만을 고려한 경우($RB=RSB=0$)이고, Thoery Ⅲ는 굽힘, 회전관성 및 전단변형의 모든 효과를 고

Table 1 Comparisons of frequency parameters

Mode	Wang	Theory Ⅰ	Theory Ⅱ	Theory Ⅲ
1	3.516	3.516	3.516	3.516
2	22.126	22.126	22.126	22.126
3	62.359	62.360	62.360	62.360
4	120.569	120.568	120.568	120.568

려한 경우의 수치결과로써 결과들이 일치하는 이유는 Wang[10]이 수치해석에 사용한 보의 두께/길이 비가 0.0085로써 회전관성이나 전단변형에 의한 효과를 무시할 수 있기 때문이다.

3.2 실험

Al 5052로 시험편을 제작하여 진동실험에서 얻은 결과를 수치결과와 비교하였다. 시험편의 물성치와 치수는 다음과 같다.

$$E=71\,\text{GPa},\quad \rho=2710\,\text{kg/m}^3,\quad L_0=0.415\,\text{m},$$
$$b=0.0313\,\text{m},\quad h=0.0032\,\text{m}$$

층상균열부가 존재하는 시험편을 제작하기 위하여 두 개의 보를 서로 접착시키기 전에 일정부위에 일정크기($d=0.313$)의 접착력이 존재하지 않는 영역을 두어 두 장의 보를 서로 완벽하게 접착하였다. 여기서, 무차원화된 길이 d는 전체길이에 대한 층상균열부의 크기를 의미한다($d=2L_2/L_0$). 고유진동수 측정을 위한 센서는 질량효과(mass effect)가 작용하지 않도록 레이저 변위센서를 사용하였으며, 측정된 신호는 증폭기를 거쳐 FFT로 스펙트럼분석을 하였다(Fig. 2). 각 시험편에 대해 4차 모드까지의 고유진동수를 측정하였다.

3.2.1 실험결과 및 검토

본 연구에서 제작한 층상균열이 있는 시험편의 고유진동수에 대한 실험치와 수치결과의 비교를 Fig. 3에 제시하였으며, 경계조건은 고정-자유이다. 그림에서 x축은 고정단으로부터 층상균열부의 중간까지의 무차원화된 길이($m=(L_1+L_2)/L_0$)를 의미하며, y축은 층상균열이 존재하지 않는 오일러-베르누이의 보에 대한 진동수 파라미터의 값을 기준한 상대적인 값을 의미한다.

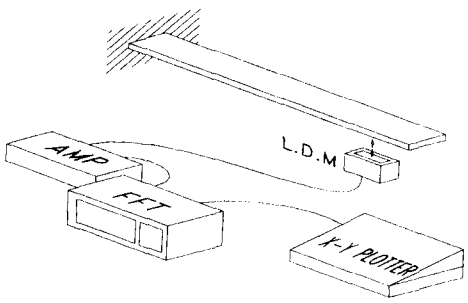
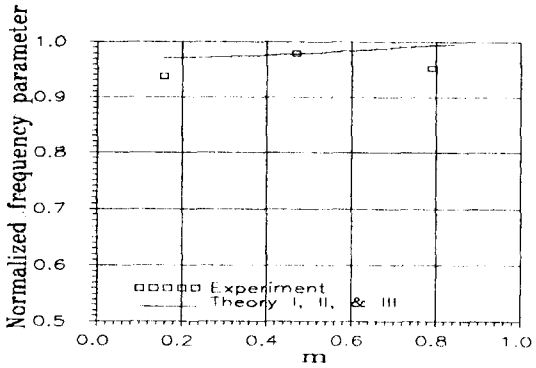
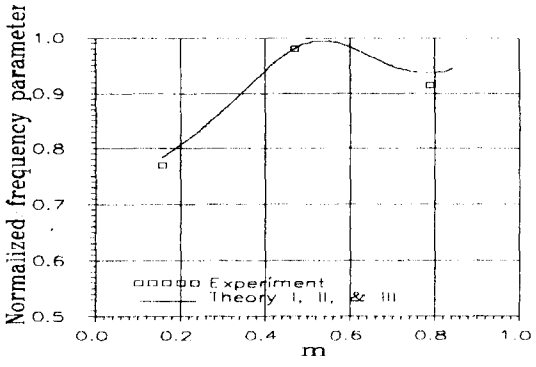


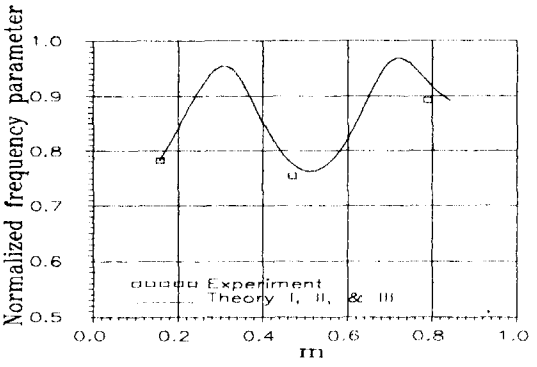
Fig. 2 Schematic diagram of experiment



(a) 1st mode



(b) 2nd mode



(c) 3rd mode

Fig. 3 Comparisons of experimental natural frequencies with numerical ones($d=0.313$)

한편, 그림에서 실선은 각각 전단변형효과만을 추가시킨 경우와 회전관성효과까지도 포함한 경우에 대한 수치결과를 나타낸다. 그림에서 보듯이 각 모드에 대한 실험치가 본 연구의 수치결과와 잘 부합함을 볼 수 있으며, 수치결과들이 차이가 없는 이유는 두께/길이의 비($T/L=h/L$)가 0.00771 정

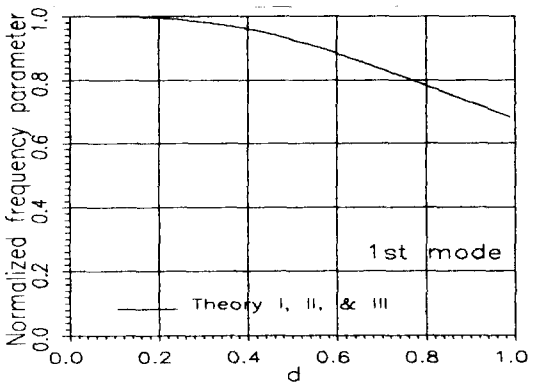
도로써 회전관성이나 전단변형에 의한 영향력이 무시될 수 있기 때문이다. 결함부가 고정단에서 자유단으로 이동함에 따라 고유진동수 저하의 양상이 변하게 되는데, 고정단 부근에서의 층상균열은 고유진동수 변화에 큰 영향을 주게되며, 상대적으로 자유단 부근의 층상균열은 고유진동수 변화에 작은 영향이 있음을 볼 수 있다.

한편, 층상균열이 보의 중간부근에 존재하는 경우는 앞의 두 경우와는 달리 3차 모드에서 급격한 진동수 저하가 관찰되는데 이는 진동모드 형상에 관련이 있기 때문이다. 3차 모드에서 약 5%의 오차를 보이고 있으나 전체적으로는 실험치의 값과 수치해석의 결과가 잘 부합함을 볼 수 있다.

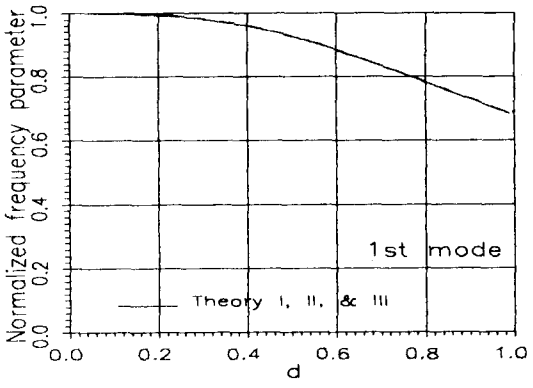
3.3 수치결과 및 검토

본 연구에서는 층상균열이 존재하는 보의 진동특성에 대하여 조사하였다. 기존의 연구는 층상균열이 있는 보의 진동해석에 굽힘변형효과만을 고려하였으나, 본 연구에서는 회전관성 및 전단변형효과까지도 고려하여 수치해석을 수행하였다. 이러한 연구의 배경은 전단변형에 의한 효과가 복합재료의 사용시 등방성 보에서 나타나는 것보다 상당히 크기 때문이다. 또한 등방성 보에서도 두께/길이의 비가 커지게 되면 전단변형의 효과를 무시할 수 없으므로 보다 정확한 진동해석을 위해서는 오일러-베르누이의 보이론보다는 티모센코의 보이론을 적용해야 하며, 본 연구의 결과를 비파괴 검사의 한 방법으로 활용하기 위해서는 대상구조물에 대한 정확한 해석을 바탕으로 한 수치해석을 필요로 하게 된다. 한편, 수치해석에 사용된 재질은 Al 5052이며, 기하학적 형상 및 물성치는 다음과 같다. $b=0.02\,\mathrm{m}$, $L=0.2\,\mathrm{m}$, $E=71\,\mathrm{GPa}$, $\rho=2710\,\mathrm{kg/m^3}$. 두께/길이비가 층상균열이 있는 보의 진동특성에 미치는 영향을 조사하기 위하여 T/L의 값을 0.01, 0.05, 그리고 0.1로 변화시켜 가면서 수치해석을 수행하였다. 경계조건은 고정-자유로 일정하게 하였으며, 다른 경계조건에 대해서도 마찬가지 방법으로 구할 수 있다. 본 연구에서는 이에 대해서는 생략한다.

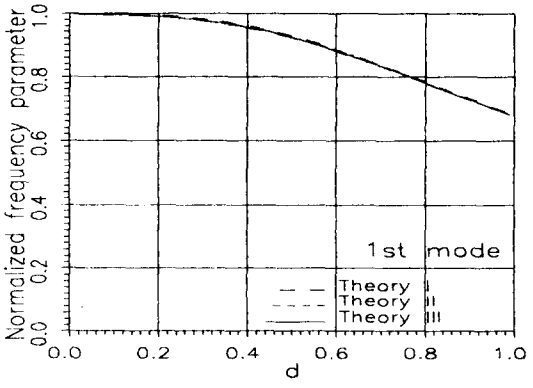
Fig. 4는 층상균열이 보의 중앙에서부터 중립면을 따라 점점 증가함에 따른 고유진동수 변화 및 두께/길이의 비가 고유진동수에 미치는 영향을 보여주고 있다. 그림에서 (a), (b), 그리고 (c)는 각각 $T/L=0.01$, 0.05, 그리고 0.1에 해당하는 1차 모드 고유진동수의 변화를 나타낸다. 각 그림에서 x축은 층상균열부의 전체길이에 대한 무차원화된 길이($d=2L_2/L_0$)를 의미하며, y축은 층상균열이 존재하지 않는 보의 진동수 파라미터의 값을 기준으



(a) T/L=0.01



(b) T/L=0.05

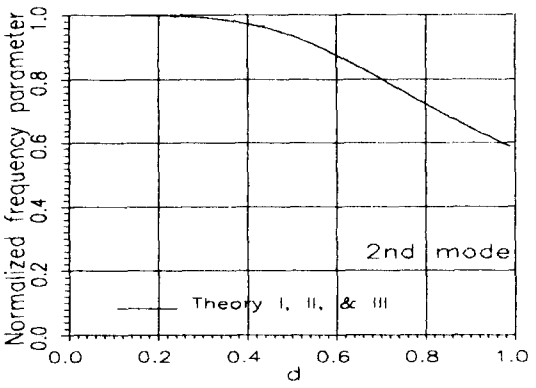


(c) T/L=0.1

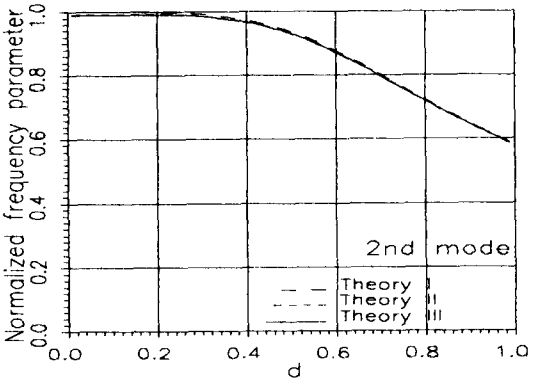
Fig. 4 Normalized frequencies for fixed-free beam with a midplane laminar tear(1st mode, T/L= 0.01, 0.05, 0.1)

로 하여 무차원화된 고유진동수 값을 의미한다.

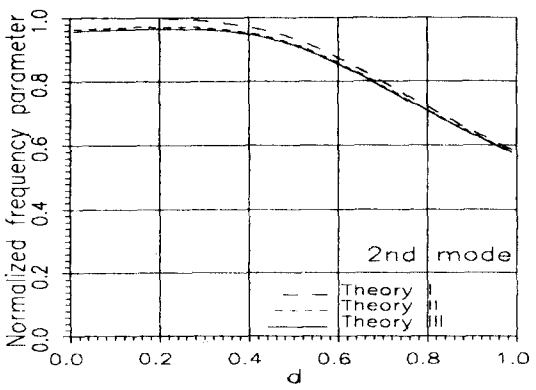
또한 그림에서 Theory Ⅰ은 보의 진동해석에서 굽힘변형효과만을 고려한 경우에 대한, Theory Ⅱ는 굽힘변형효과와 전단변형효과만을 고려한 경우에 대한, 그리고 Theory Ⅲ는 회전관성효과까지도 고려한 경우에 대한 결과이다. 그림에서 층상균열부가 커짐에 따라 고유진동수가 감소함을 볼 수 있다. 또한 (a)의 경우는 각 Theory 사이에 차이가 없으나 (c)에서는 Theory 사이에 약간의 차이가 있음을 볼 수 있다. 이러한 차이는 T/L의 값이 좀더 증가되면 더욱 더 커진다. Fig. 5는 중립면에 존재하는 층상균열부의 크기가 보의 중앙에서부터 점점 커짐에 따른 2차 모드 고유진동수 변화 및 두께/길이의 비가 2차 모드 고유진동수에 미치는 영향을 보여주고 있다. 그림에서 보듯이 1차 모드의 경우(Fig. 4)와 비슷한 경향성을 보이고 있으나 (c)에서는 Theory Ⅰ과 Ⅱ, Ⅲ 사이에 뚜렷한 차이가 있음을 볼 수 있으며, 이 차이가 d에 따라 항상 일정치 않음을 알 수 있다. 또한 d의 값에 따른 고유진동수의 저하되는 정도도 1차 모드의 경우와 약간 차이가 있음을 볼 수 있으며, 고유진동수의 최대 감소값이 1차 모우드의 경우와 서로 상이함을 알 수 있다. 한편, Figs. 6과 7은 층상균열부가 보의 중앙에서부터 중립면을 따라 점점 증가함에 따른 3차, 2차 모드 고유진동수 변화 및 두께/길이의 비가 삼차, 사차 모우드 고유진동수에 미치는 영향을 보여주고 있다. 그림에서 보듯이 1차, 2차 모우드의 경우(Figs. 4, 5)와는 경향성이 다른 고유진동수의 감소현상을 보이고 있다. 또한 T/L의 값이 0.1인 경우에는 Wang에 의한 결과(Theory Ⅰ)와 본 연구에서 얻어진 수치결과가 상당히 차이가 있음을 볼 수 있다. 이러한 차이는 고차 모드로 갈수록, T/L의 값이 커질수록 증가하게 된다. 즉, 회전관성과 전단변형의 효과는 고차 모드에서나, T/L의 값이 상당히 큰 경우에는 무시될 수 없음을 의미한다. 이러한 사실은 이미 알려졌으나, 층상균열부가 존재하는 경우 이 효과는 일정한 것이 아니라 층상균열의 크기 및 위치에 따라 상대적으로 변한다는 사실을 그림들은 보여주고 있다. 예로써 $d=0.0$ 부근에서의 Wang에 의한 결과와 본 연구에서 수행된 수치결과가 가장 크게 차이를 보이며, d가 1에 접근함에 따라 그 차이는 감소함을 알 수 있다. 그러므로 두께/길이비가 상당히 크게 되면 Wang에 의한 수치결과는 실제의 고유진동수 높게



(a) T/L=0.01



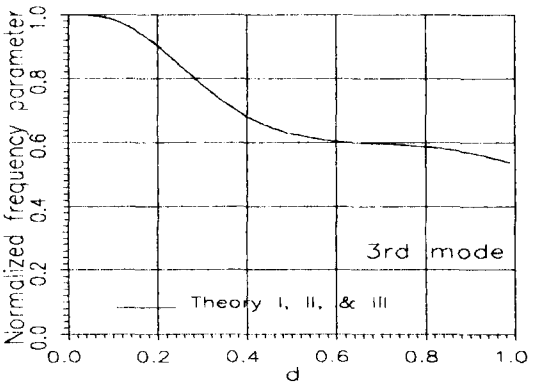
(b) T/L=0.05



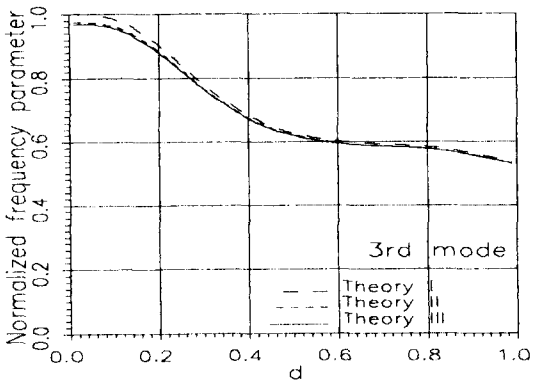
(c) T/L=0.1

Fig. 5 Normalized frequencies for fixed-free beam with a midplane laminar tear(2nd mode, T/L =0.01, 0.05, 0.1)

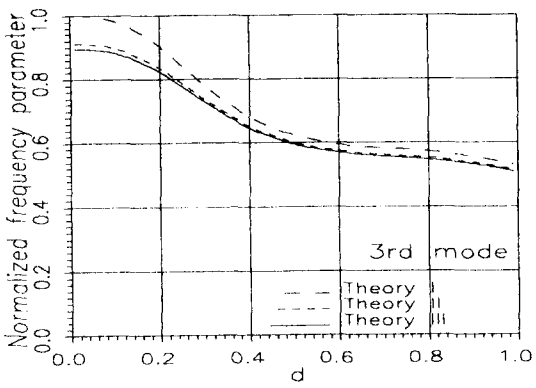
계산되므로, 층상균열이 존재하는 보의 고유진동수 변화를 정확히 알기 위해서는 회전관성 및 전단변형효과를 고려한 본 연구의 해석과정이 보다 타당



(a) T/L=0.01

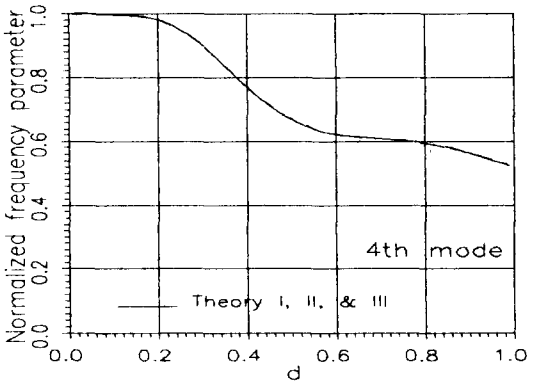


(b) T/L=0.05

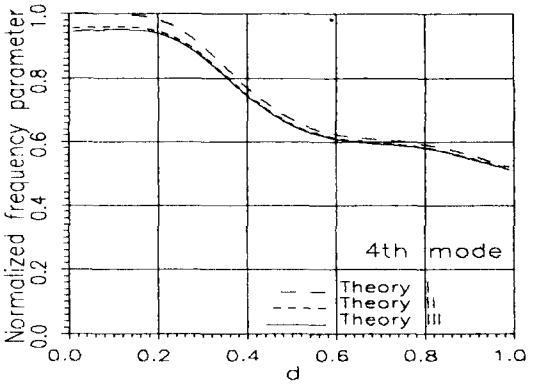


(c) T/L=0.1

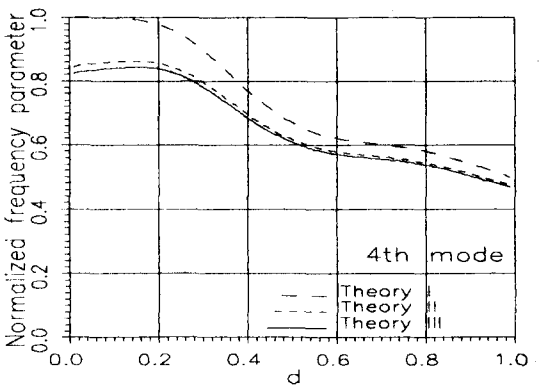
Fig. 6 Normalized frequencies for fixed-free beam with a midplane laminar tear(3rd mode, T/L =0.01, 0.05, 0.1)



(a) T/L=0.01



(b) T/L=0.05



(c) T/L=0.1

Fig. 7 Normalized frequencies for fixed-free beam with a midplane laminar tear(4th mode, T/L= 0.01, 0.05, 0.1)

하다. 또한 층상균열부의 크기변화에 따른 고유진동수변화는 각 모드에서 차이가 있음을 볼 수 있는데, 이러한 현상은 보의 진동모드에 층상균열부가 영향을 주기 때문이다. 일정길이의 층상균열부에 대해서도 각 모드에서 고유진동수가 서로 상이하게 감소됨을 알 수 있으며, 이러한 사실들로부터 본 연구의 방법이 비파괴검사의 방법으로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

3.4 수치결과의 활용

수치결과들의 분석을 바탕으로 하여, 보의 층상균열부의 위치 및 크기를 대략적으로 찾을 수 있는 새로운 탐상 기준자료를 Fig. 8에 제시하였다. 수치해석에 사용된 시험편의 기하학적 형상 및 물성치는 다음과 같다. $b=0.03$ m, $h=0.006$ m, $L=0.25$ m, $E=7.1\times10^7$ kN/m^2, $\rho=2710$ kg/m^3. 이때, 경계조건은 고정-자유로 하였으며 T/L의 값이 상당히 작기 때문에 각 theory에 의한 결과는 차이가 없다. 그림에 사용된 좌표계에서 x축은 층상균열부의 시작점 길이에 층상균열부의 길이를 더한 값을 보의 전체길이로 무차원화한 값($c+d$)을 의미한다. y축은 무차원화된 고유진동수 파라미터 값으로써 층상균열부가 없는 경우의 고유진동수(파라미터) 값으로 무차원화 하였다. 그림에서 고유진동수 변화곡선들은 각각의 층상균열부의 시작점에 해당하는 곡선을 의미한다. 즉, 4차 모드 그림에서 오른쪽 y축 좌표계에 c의 값을 표기하였는데, 이는 측정 스케일(scale)의 의미보다는 각 곡선들의 층간분리부의 시작점을 의미한다. 왜냐하면 1차, 2차, 3차 그리고 4차 모드에서 각각의 c의 값이 항상 일정 위치에 위치하지 않기 때문이다. 한편 각각의 그림은 본 연구에서 개발한 보 내부의 층상균열부를 찾아내기 위한 활용자료이다.

예로써 단일 층상균열부가 있는 보의 각 모드에 대한 고유진동수 변화를 측정하고 이러한 값을 Fig. 8에서 찾게 되면 대략적인 결함의 위치를 알 수 있게 된다. 좀더 구체적인 예를 들면 다음과 같다.

(1) 진동수 측정장비로부터 보의 무차원화된 진동수 값이 1차, 2차, 3차 그리고 4차 모드에 대하여 각각 98%, 99%, 79% 그리고 85%라고 하자.

(2) 이 값을 Fig. 8의 각 모드에서 x축에 평행하게 그으면 각각의 그림에서 여러 개의 $c+d$값을 찾을 수 있다.

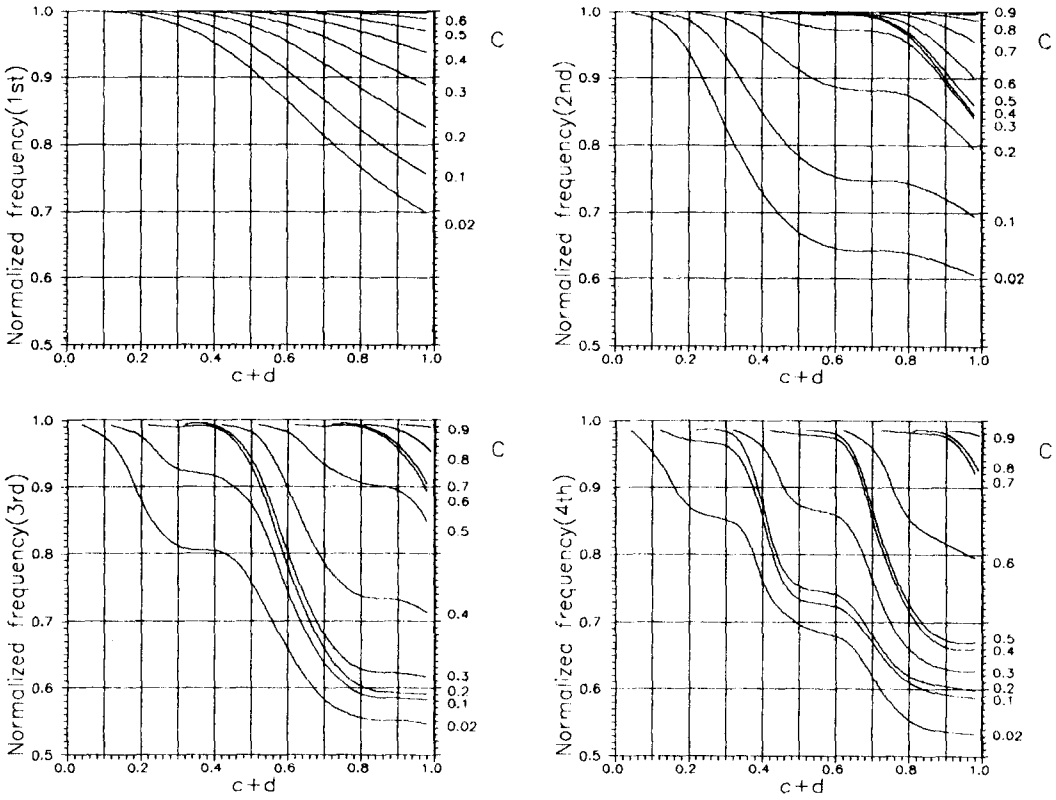


Fig. 8 Normalized frequency variations of beam with various laminar tear size and locations for clamped-free boundary condition

(3) 그러나 각 모드에서 공통적인 $c+d$값은 한 개만 존재하게 되므로 이 값을 찾으면 대략적으로 $c+d$는 0.7이고, 이에 해당되는 c값은 0.4를 얻게 된다.

(4) 따라서 d는 결과적으로 0.3임을 알 수 있다. 즉, 층상균열부는 보의 고정단으로부터 보의 길이의 40%인 위치에서 시작되며 그 크기는 보의 길이에 약 30%에 해당됨을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 보의 내부에 층상균열부가 고유진동수 변화에 미치는 영향을 실험 및 수치해석적으로 연구하였다. 즉, 보 내부에 층상균열의 크기 및 위치를 변화시켜 가면서 이에 따른 고유진동수 변화를 비교 평가함으로써 층상균열의 크기 및 위치가 진동수에 미치는 영향을 연구를 하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) T/L의 값이 작은 경우는 각 모드에서 수치결과들 사이에 차이를 볼 수 없으나 T/L값이 증가하면 고차 모드로 갈수록 각 수치결과들이 차이가 발생함을 볼 수 있으며 이러한 차이는 일정한 것이 아니라 층상균열부의 크기가 커짐에 따라 점점 감소됨을 볼 수 있다.

(2) 층상균열부의 크기 변화에 따른 고유진동수의 저하는 진동모드와 유사한 형태로 변함을 볼 수 있다.

(3) 각 모드에서 일정길이의 층상균열에 대해 서로 다른 진동수 저하를 볼 수 있는데 이러한 결과를 역으로 이용하면 비파괴검사의 방법으로 활용될 수 있다.

후 기

이 논문은 1994년도 홍익대학교 학술연구조성비에 의하여 부분적으로 지원되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Francis S. Tse, Ivan E. Morse and Rolland T. Hinkle, *Mechnical Vibrations*, Second Edition.

(2) Leonard Meirovitch, 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillancompany, Collier-Macmillan Limited, London.

(3) Hutchinson, J. R., 1981, "Transverse Vibrations of Beams, Exact Verus Approximate Solutions," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 923~928.

(4) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, Third Edition. McGraw-Hill Book Company.

(5) Timoshenko, S. P., 1955, *Vibration Problems in Engineering*, Princeton, N. J. D. Van Nostrand Co., Third Edition.

(6) Cowper, G. R., 1966, "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 335~340.

(7) Stephen, N. G. and Levinson, M., 1979, "A Second Order Beam Theory," *Journal of Sound and Vibration* Vol. 67, pp. 293~305.

(8) Levinson, M., 1981, "A New Rectangular Beam Theory," *Journal of Sound andVibration*, Vol. 74, pp. 81~87.

(9) Hutchinson, J. R., 1986, "On the Transverse Vibration of Beams of Rectangular Cross Section," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 53, pp. 39~44.

(10) Wang, J. T. S., Ltu, Y. Y. and Gibby, J. A., 1982, "Vibrations of Split Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, No. 4, pp. 491~502.

(11) Bicos, Andrew S. and Springer, George S., 1988, "Vibrational Characteristics of Composite Panels with Cutouts," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 8, pp. 1116~1122.

(12) Murakami, H., 1984, "A Laminated Beam Theory With Interlayer Slip," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 551~558.

(13) Cawley, P. and Adams, R. D., 1979, "A Vibration Technique for Non-Destructive Testing of Fibre Composite Structures," *Journal of Composite Materials*, Vol. 13, pp. 161~175.

(14) 이성희, 1993, "층간분리가 있는 적층보의 진동해석," 석사논문, 홍익대학교, 서울.