

〈論 文〉

특이 접촉응력 문제의 형상 최적화

박정선* · 이수용**

(1995년 7월 26일 접수)

Geometric Optimization Involving Contact Stress Singularities

Jungsun Park and Soo-Yong Lee

Key Words : Stress Singularity(응력특이), Contact(접촉), Wedge(썰기), Optimal Shape(최적 형상)

Abstract

The stress singularity of a sharp wedge contacting a half plane can be avoided by changing the wedge shape. Shape optimization is accomplished with the geometric strain method (GSM), an optimality criterion method. Several numerical examples are provided for different materials in the wedge and half plane to avoid stress singularity near the sharp corner of the wedge. Optimum wedge shapes are obtained and critical corner angles are compared with the angles from analytical contact mechanics. Numerical results are well matched to analytical and experimental results. It is shown that shape optimization by the geometric strain method is a useful tool to reshape the wedge and to avoid a stress singularity. The method applies to more general geometries where the singular behavior would be difficult to avoid by classical means.

기 호 설 명

D : 접촉역학에서 시스템 방정식 계수의 행렬식

f : 파손기준함수

G : 전단계수

p : 응력특이차수

$Re(.)$: 복소수의 실수부

r, θ : 극좌표

u_r, u_θ : 변위성분

α, β : Dundurs 매개변수

$\Gamma_d, \Gamma_v, \Gamma_t, \Gamma_u$: 외부설계, 내부, 트랙션(traction) 및 구속경계

γ : 썰기각

γ_s : 특이의 존재를 가르는 임계 썰기각

μ : 마찰계수

ν : 푸아송비

ϕ : Airy 응력함수

$\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$: 응력성분

σ_1, σ_2 : 주축 1, 2에서의 주응력

Ω_b, Ω_f : 체적하중(body force)과 완전응력(fully-stressed) 영역

상첨자

I, II : 반평면과 썰기

: 벡터

1. 서 론

무한썰기의 응력분포는 Flamant에 의해 3 차원 Boussinesq해에 의해 구해졌다.^(1,2) (Flamant의 해는 때때로 "단순 방사분포(simple radial distri-

*회원, 한국항공대학교 항공우주공학과

**회원, 한국항공대학교 항공기제공학과

bution) ”라 불리어진다.) Michell^(2,3)은 Boussinesq와 Flamant의 해를 이용하여 쐐기(wedge)면에 하중이 작용하는 경우나 무한경계에 traction이 작용하는 쐐기문제에 대해 2차원 쐐기이론을 확장 적용하였다.

Williams⁽⁴⁾은 팽창시 판의 모서리에 대해 여러 경계조건에 대해 특이해 근처의 응력분포에 대한 이론을 개발하였고, Bogy^(5,6)는 Mellin 변환⁽⁷⁾과 Williams의 방법으로 두개의 쐐기가 접촉접촉(bonded contact) 되어 있는 경우에 대해 응력특이(stress singularity) 분포에 대해 연구하였다.

반평면(a half plane)에 접촉하는 쐐기는 Dundurs와 Lee⁽⁸⁾에 의해 마찰이 없는 접촉에 대해 예리한 모서리근처에서 응력특이가 고찰되었다. Gdoutos와 Theocaris⁽⁹⁾는 간단한 방법으로 마찰 및 접촉접촉(frictional and bonded contact)하는 문제에 대해 이론을 확장하였다. 기존의 이론을 바탕으로 Comninou⁽¹⁰⁾는 마찰접촉을 이루는 문제에서 역응력특이(power stress singularity)가 사라지는 임계 쐐기각도를 발견하였다.

역사적으로 살펴보면, 노치(notch)는 원형축의 원판수축맞춤(disk shrunk fit) 근처의 응력집중을 제거하기 위해 사용되어 왔다.⁽¹¹⁾ 또한 노치를 사용한 재진입하는 예리한 모서리(reentrant sharp corner)에서 응력특이를 제거하기 위해 실험이 수행되어져 왔다.⁽¹²⁾

Benedict와 Taylor^(13,14)는 Langrange 승수기법을 사용하여 부등평형(inequality equilibrium)을 변형하였고, 포텐셜 에너지함수를 직접 최소화시킴으로써 여러 접촉문제를 최적화하였다. Taylor⁽¹⁵⁾는 접촉압력의 최대치를 설계하기 위한 관계식을 제시하였다.

최근에는 여러 연구가 수행되어져 최적화 이론을 바탕으로 접촉문제에 대한 형상 최적화에 대한 수학적 이론이 개발되어지고 있다.^(16~20) 이 수학적 이론은 Signorini 문제 (평면 탄성체가 마찰이 없는 강체반침에 의해 지지되고 있는 문제)와 같이 단순한 문제에 한정되어 있다. 이 이론은 목적함수가 연속 미분가능하지 못하므로 다양성이 결여된다.

본 연구는 반평면에 접촉하는 예리한 쐐기의 응력특이는 형상변형을 방법에 의해 쐐기형상을 변화시킴으로써 제거될 수 있다는 착상으로부터 출발한다. 여러 수치예제가 쐐기와 반평면에서 여러 재질

을 사용하여 수행된다. 경계 모서리각(boundary corner angle)를 포함하여 쐐기의 최적형상이 구하여지며 결국 응력특이를 제거하게 된다. 여기에서 구해진 모서리각은 기존의 전통적인 해석으로부터 구해진 임계 쐐기각과 비교된다.

2. 이론적 배경

내부각도 γ 를 갖는 쐐기가 반평면에 접촉하는 예가 Fig. 1에 주어졌으며, 이 쐐기는 반평면을 압축한다. 본 연구의 이론에서 사용되는 가정은 (1) 접촉체는 등방성(isotropic)과 동질성(homogeneous)이며, (2) 접촉면은 Coulomb의 마찰계수 μ 를 가지며 (3) 날카로운 쐐기 근처의 변형은 평면변형을 이론으로 근사화된다. 극좌표계에서 bi-harmonic 방정식 (식 1)과 응력(식 2)~(4)과 변위(식 5, 6)) 관계식을 만족하는, Airy 응력함수 ϕ 가 도입된다.

$$\nabla^4 \phi = 0 \tag{1}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \tag{2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \tag{3}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \nu \nabla^2 \phi \right] \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{1}{G} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \tag{6}$$

쐐기의 접촉면과 쐐기와 반평면의 자유면에서의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

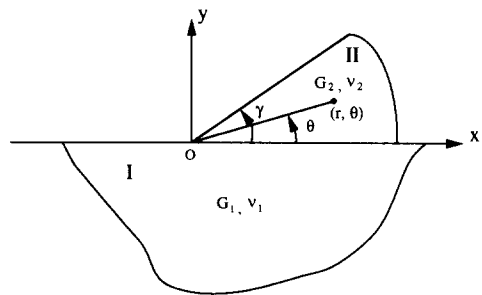


Fig. 1 Wedge in contact with a half plane

$$u_{\theta}^I(r, 0) = u_{\theta}^{II}(r, 0) \tag{7}$$

$$\sigma_{r\theta}^I(r, 0) = \sigma_{r\theta}^{II}(r, 0) = -\mu\sigma_{\theta\theta}(r, 0) \text{ for } r > 0 \tag{8}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I(r, 0) = \sigma_{\theta\theta}^{II}(r, 0) \tag{9}$$

$$\sigma_{r\theta}^I(r, -\pi) = \sigma_{r\theta}^{II}(r, -\pi) = 0 \tag{10}$$

$$\sigma_{r\theta}^I(r, r) = \sigma_{r\theta}^{II}(r, r) = 0 \tag{11}$$

여기서, $\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$ 는 압축이어야 하며, u 와 σ 는 변위와 응력성분을 나타낸다. 위첨자 I, II 는 각각 반평면과 썰기를 나타낸다.

여러 가지 접합된 썰기문제는 응력특이의 차수를 결정하기 위해 Bogy에 의해 연구되어졌다. Bogy는 Mellin 변환을 경계값 문제에 적용하여 bi-harmonic 방정식의 일반 해(Airy 함수의 Mellin 변환)를 구하였다. 그 일반 해는 응력, 변위, 경계 조건의 Mellin 변환을 구하기 위해 사용되어졌다. 그 경계조건의 Mellin 변환식으로부터 구해진 8개의 방정식은 8개의 미지함수를 포함하게 된다. 응력특이의 차수는 방정식 계수의 행렬식의 zero해로부터 구해질 수 있다. 상세 유도과정은 참고문헌^(5,6)으로부터 참조할 수 있다.

만일 응력특이차수 p 가 $0 < Re(p) \leq 1$ 에서 시스템 방정식 계수의 행렬식 D 의 zero해라고 한다면, 응력은 응력특이차수에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \text{만일 } p \text{가 실수이고 } 0 < p < 1 \text{ 이면: } o(r^{p-1}) \\ \text{만일 } p = \xi + i\eta \text{가 복소수이고, } 0 < \xi < 1 \text{ 이면: } \\ o[r^{\xi-1} \cos(\eta \log r)] \text{ 또는 } o[r^{\xi-1} \sin(\eta \log r)] \\ \text{만일 } p=1 \text{이고 } p=1 \text{에서 } \partial D / \partial p \neq 0 \text{ 이면: } o(\log r) \\ \text{만일 } 0 < Re(p) < 1 \text{에서 } D \text{의 zero해가 없고} \\ p=1 \text{에서 } \partial D / \partial p \neq 0 \text{ 이면: } o(1). \end{array} \right. \tag{12}$$

Dundurs^(21,22)는 상수의 숫자를 2개의 무차원변수로 이 문제를 표현할 수 있음을 보였다.

$$\alpha = \frac{\{(1-\nu_1)/G_1\} - \{(1-\nu_2)/G_2\}}{\{(1-\nu_1)/G_1\} + \{(1-\nu_2)/G_2\}} \tag{13}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\{(1-2\nu_1)/G_1\} - \{(1-2\nu_2)/G_2\}}{\{(1-\nu_1)/G_1\} + \{(1-\nu_2)/G_2\}} \tag{14}$$

여기서, α 는 평면변형률 계수의 차이의 정도이다. (참고문헌⁽⁸⁾에서 Dundurs는 “ α 는 두 접착체의 uni-axial compliance의 불일치에 대한 지수이다.”

라고 설명했다.) 특수한 경우에서 α 는 여러 다른 값을 갖는다: 강체썰기와 탄성 반평면은 1; 강체 반평면과 탄성썰기는 -1; 같은 탄성 재질의 썰기와 반평면은 0의 값을 갖는다. 무차원 변수 α 와 β 를 이용하여, 방정식의 계수의 행렬식을 상당히 간단히 표현할 수 있다.

$$D(p; \gamma, \alpha, \beta, \mu) = 8(1+p)\sin p\pi F(p; \gamma, \alpha, \beta, \mu) \tag{15}$$

여기서, γ 는 썰기각도이고, F 는 다음과 같이 정의된다.

$$F(p; \gamma, \alpha, \beta, \mu) = (1+\alpha)\cos p\pi(\sin^2 p\gamma - p^2\sin^2 \gamma) + \frac{1}{2}(1-\alpha)\sin p\pi(\sin 2p\gamma + p\sin 2\gamma) + \mu\sin p\pi[(1-\alpha)p(1+p)\sin^2 \gamma - 2\beta(\sin^2 p\gamma - p^2\sin^2 \gamma)] \tag{16}$$

역특이(power singularity)는 $0 < p < 1$ 에서 $F(p; \gamma, \alpha, \beta, \mu)$ 의 실수근에 해당된다. 실제로 물리적 계수의 여러 값에 대해 F 의 근에 대해 연구한 Gdoutos⁽⁹⁾는 $0 < p < 1$ 에서 최소한 한개 이상의 실수 해가 존재함을 보였다. Comninou⁽¹⁰⁾는 $p=1$ 에서 $\gamma, \alpha, \beta, \mu$ 의 적절한 조합으로 역특이가 사라지고 역특이의 존재를 가르는 곡선을 해석적으로 구하였다. 이 곡선은 식 (17)의 해로서 정의될 수 있다.

$$\partial F(1; \gamma, \alpha, \beta, \mu) / \partial p = 0 \tag{17}$$

식 (16)과 식 (17)으로부터 α 의 값을 다음과 같이

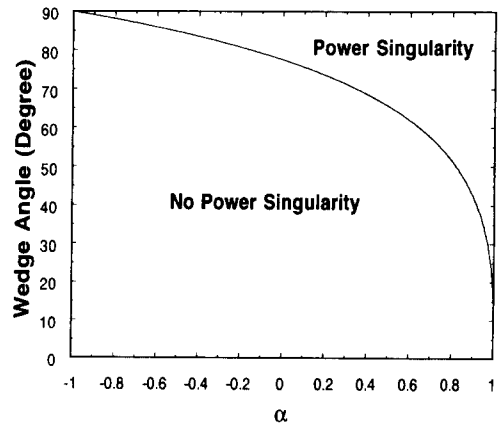


Fig. 2 Critical wedge angle for the presence of the power singularity

구할 수 있다.

$$\alpha = \frac{(\pi + \gamma) \cos \gamma + (\pi \mu - 1) \sin \gamma}{(\pi - \gamma) \cos \gamma + (\pi \mu + 1) \sin \gamma} \quad (18)$$

쐐기 접촉의 특수한 경우에서 먹특이의 경계를 가르는 경계 쐐기각 γ_s 를 구할 수 있다. 식 (18)로부터 경계각은 비마찰접촉에 대해 Fig. 2에서 보여진다.

3. 형상 최적화를 위한 형상변형률 방법

Suh, Anderson과 McDonald^(23,24)에 의해 개발된 형상변형률 방법을 소개해 보기로 한다. Fig. 3에서 보이는 바와 같이 연속체가 형상최적화를 위해 고려되어 진다. 표면하중이 경계면 Γ_f 에 가하여지고, 체적하중이 영역 Ω_b 에 가하여 진다. 경계면 Γ_u 는 구속되며, Γ_a 는 자유롭게 이동할 수 있는 외부설계 경계면이다. Γ_f 는 항상 변형률 계산 중 고정되어 있는 내부 경계면이다.

본 연구의 목적은 Ω_f 에 의해 표시된 Ω 의 일정 영역에서 완전응력화(fully-stressed) 상태를 만들기 위해 외부설계 경계면 Γ_a 의 형상을 바꾸는 것이다. 전형적인 최적화 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min. : } & V(\bar{x}_d) = \int_{\Omega} dv \\ \text{Subject to : } & f(\sigma_1(\bar{x}), \sigma_2(\bar{x}), \sigma_3(\bar{x})) \leq 0 \\ & \forall \bar{x} \in \Omega_f \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, \bar{x}_d 는 외부설계 경계면 Γ_a 의 형상을 정의하는 설계변수 벡터이고, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 는 주 응력성분이며, 함수 f 는 최대 변형에너지 이론과 같은 파손기준(failure criterion)을 나타낸다. 이 문제의 최적기준(optimality criterion)은

$$f(\sigma_1(\bar{x}), \sigma_2(\bar{x}), \sigma_3(\bar{x})) \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in \Omega_f \quad (20)$$

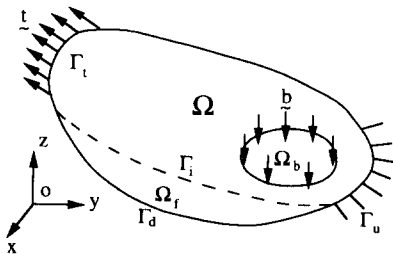


Fig. 3 Design domain

는 파괴기준을 만족하는 완전응력화 영역이다. 형상변형률 방법은 완전응력화된 설계를 만족하는 최적기준, 식 (20)으로부터 유도되어 진다. 완전 응력화된 설계의 가장 실제적인 해는 최적설계나 또는 그것에 가까운 것⁽²⁵⁾이다.

4. 수치예제

쐐기 접촉이론에서 고려되어졌던 바와 같이 응력 특이는 α, β 의 매개변수와 쐐기각을 적절히 조합하였을 때 사라질 수 있다. 본 수치적 연구는 응력특이가 형상변형률 방법을 사용하여 쐐기의 형상변화에 의해 제거될 수 있느냐 하는 것이다.

접촉점에서 극부 쐐기각은 최적형상의 일부로서 구해지고 응력특이가 사라지게 된다. 반 평면에 접촉하는 쐐기의 수치적 예제는 Fig. 4에 보이는 바와 같이 쐐기와 반평면에 여러 가지 재료를 사용하여 제시된다. 최적 쐐기형상이 얻어지고 고정하중 P는 쐐기의 윗면에 균일 분포하중으로 작용한다. 윗면의 길이 2a는 최적화 과정중 고정된다. 이 방법은 고정하중 P에서 재료의 체적을 최소화한다.

결과는 기준(baseline)설계와 최적설계의 응력에 대한 그림으로 제시된다. 기준설계와 최적설계의 응력은 응력의 특이의 존재여부를 인지하기 위해 제시될 것이다. 마지막으로, 수치적 방법으로 얻어진 최적 쐐기각과 해석적 방법으로 구해진 임의 쐐기각이 비교될 것이다.

4.1 기준설계 모델

문제의 크기를 축소하기 위해 Fig. 4에서 보이는

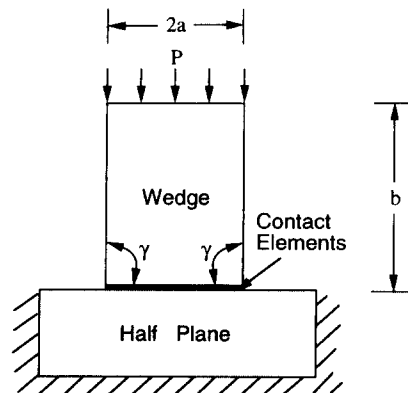


Fig. 4 Wedge in contact with a half plane

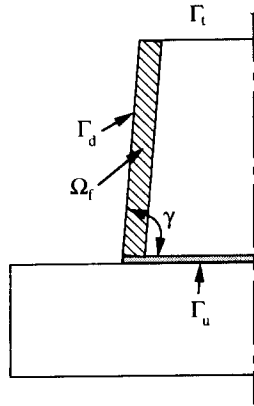


Fig. 5 A half of the wedge in contact with a half plane

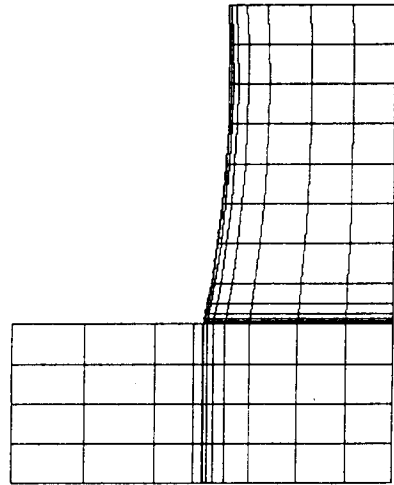


Fig. 7 Optimal wedge shape for the wedge and the half plane (identical materials)

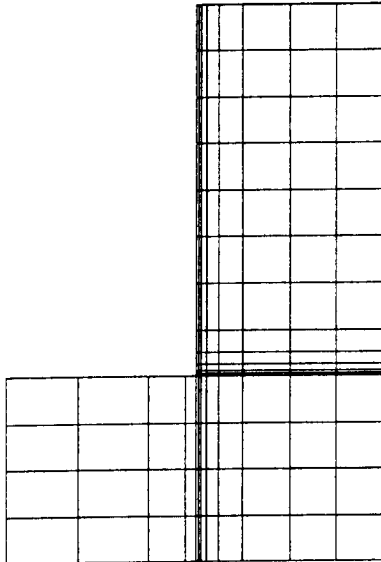


Fig. 6 Baseline design of the wedge in contact with a half plane

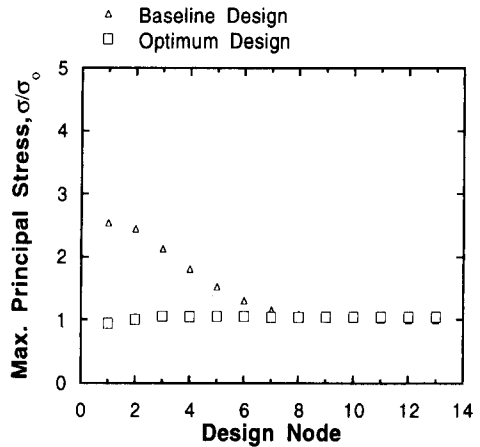


Fig. 8 Maximum principal stresses at the baseline and optimal design (identical materials)

원래의 모델을 Fig. 5에 보이는 바와 같이 반사대칭(reflective symmetry)을 사용하여 반쪽모델만 고려하여 수치적 예제를 고찰하기로 한다. 모델의 치수는 $a=40\text{ mm}$, $b=80\text{ mm}$ 이다. 설계면 최초 형상은 직선이지만 점차적으로 곡선이 될 수 있다. Fig. 6의 유한요소 모델에서, 182절점과 153개의 요소가 사용된다. 썰기는 96개 요소를 가지며 반평면은 48개 요소를 가진다. 네개의 절점을 가진 평면변형률 사각형요소가 사용된다. 썰기와 반 평

면은 9개의 비마찰, 선형, 접촉요소로 연결되었다. 접촉요소는 단지 압축만을 전달하며, 길이를 갖지 않으며, 균일 분포하중을 전달하기 위해 강성이 조정이 되었다. 분포하중 P 는 300 N/mm 이며 반평면의 밑면, 좌측, 우측면은 고정되어 있다.

본 연구의 목적은 예리한 모서리 근처의 정확한 응력 분포를 구하기보다는 응력특이를 제거하는 것이 목적이다. 그래서 극심하게 미세한 유한요소의 사용은 지양되었다. 그렇지만 Fig. 6에서 보이는

바와 같이 예리한 모서리 근처의 고 응력 상태를 찾기 위해선 다소간 미세한 요소(1/2 mm 정도의 크기)의 사용이 요구된다.

형상변형방법에 의한 설계 최적화를 위해서 13개의 설계절점과 13개의 설계 구속조건이 사용된다. 설계영역 Ω_d 은 쐐기의 요소의 좌측 단층이다. 설계 구속조건은 이 영역에서 최대 주응력이 목표 응력의 110%를 넘지 않는다 하는 것이다. 이 문제에서 설계 경계면은 고정되어 있는 윗면의 절점을 제외하고 수평으로 이동할 수 있다. 외부설계 경계면 Γ_d 을 제외하고 전체 영역 Ω 의 모든 경계면은 구속되어진다. 구속된 영역은 형상변위-등가하중의 해석과정에서 구속된 경계조건으로 주어진다. 만일 설계 경계면에서 모든 응력이 목표응력(300 MPa)의 110%보다 작으면 쐐기의 모서리 근처의 응력 특이가 제거되었다고 가정한다. 여기서 110%라는 다소 임의의 숫자를 사용하였는데 다소 여유있는 기준을 사용하면 해석은 특이와 비특이의 경계로부터 다소 떨어진 각도 γ 에 수렴하게 된다. 만일 여유가 없는 기준 (예를 들면 105%와 같은) 을 사용하면 해석은 수렴하는데 더 오래 시간이 걸린다. 좀더 여유가 없는 응력구속조건의 사용은 feasible쪽의 최적설계에 좀더 가까운 모양에 도달할 것이다.

4.2 쐐기와 반평면이 동일 탄성 재질일 경우

Fig. 6의 기본설계에서 시작하여 형상변형률방법은 8번의 반복해석 후에 Fig. 7에 보이는 바와 같이 최적형상을 얻었으며 접촉점에서의 쐐기각은 78.8°이다. 최대 주응력은 기본설계와 최적설계에 대해 Fig. 8에 나타나 있다. 최초의 기본설계에서 존재하였던 특이가 최적설계에서 사라졌다.

접촉 역학에서 임계쐐기각은 동일 탄성재료 ($\alpha=0$)와 매끄러운 접촉($\mu=0$)에 대해 식 (18)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$-(\pi + \gamma) + \tan \gamma = 0 \tag{21}$$

식 (21)로부터 해 $\gamma_s=77.45^\circ$ 가 구해진다. 형상 변형률 방법으로 얻어진 쐐기의 최적 형상의 각도 78.8°는 임계 쐐기각 $\gamma_s=77.45^\circ$ 보다 1.7% 크다.

4.3 쐐기와 반평면이 상이한 탄성재질일 경우

이 예제는 반평면의 재질이 쐐기보다 2배 강한 경우이고 Fig. 6에서 기본설계로부터 5번의 반복수행 후 최적 쐐기각 $\gamma=83.7^\circ$ 이 구해진다. 쐐기의

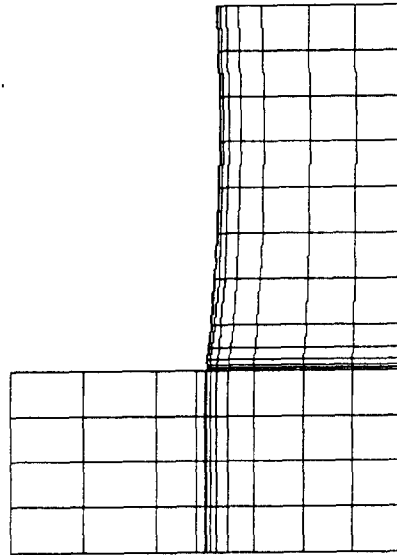


Fig. 9 Optimal wedge shape for $G_1=2G_2$ and $\nu_1=\nu_2=0.3$

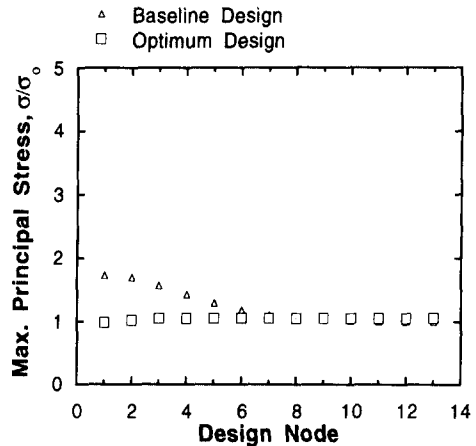


Fig. 10 Maximum principal stresses at the baseline and optimum design with $G_1=2G_2$ and $\nu_1=\nu_2=0.3$

최적형상은 Fig. 9에 보여진다. 기본 및 최적설계에 대해 최대 주응력은 Fig. 10에서 보여진다.

이 예제에서도 최초 기본설계에서 존재하였던 응력 특이가 최적설계에서 제거되었다. 접촉역학으로부터의 임계 쐐기각은 반평면이 쐐기보다 2배 강하고, 마찰이 없는 접촉($\mu=0$)에 대해 식 (18)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$2\pi + \gamma - \tan \gamma = 0 \tag{22}$$

이 경우의 해는 $\gamma_s=82.62^\circ$ 이다. 형상변형률 방법에 대해 최적 쐐기각 $\gamma=83.7^\circ$ 는 임계 쐐기각 $\gamma_s=82.62^\circ$ 보다 1.3% 크다.

4.4 강제 반평면에 탄성쐐기가 접촉하는 경우

이 경우는 Signorini 문제(선형 탄성체가 강성 비마찰 반침에 접촉하는 문제)에 해당한다.⁽²⁶⁾ 이 문제의 해석을 위해 쐐기만 고려되었다. 쐐기의 밑면은 수직으로 구속되고 수평으로 자유롭게 변형할 수 있다. Fig. 11에서 보는 바와 같이 쐐기각은 105° 로부터 시작되었는데 Fig. 6과 같이 90° 로부터 시작하지 않은 이유는 쐐기각 90° 가 이 예제의 해이고 이전의 예제와 같이 infeasible 설계로부터 시작하기 위함이다.

초기의 기본설계로부터 6번의 반복 수행으로 형상변형률방법으로부터 91.3° 의 최적 쐐기각이 구해진다. 최적설계(Fig. 12)에 대해 최대 주응력은 Fig. 13에 나타나 있으며, 초기설계에 존재하였던 응력 특이가 최적형상에서는 사라졌음을 알 수 있다.

본 예제의 수치결과와 비교하기 위해 접촉역학의 해석식 (18)에 $\alpha=-1$ 을 대입하면 식 (23)이 구해지며,

$$1 + \mu \tan \gamma = 0 \tag{23}$$

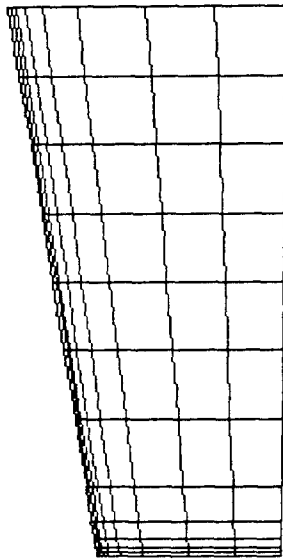


Fig. 11 Baseline design of elastic wedge in contact with a rigid half plane

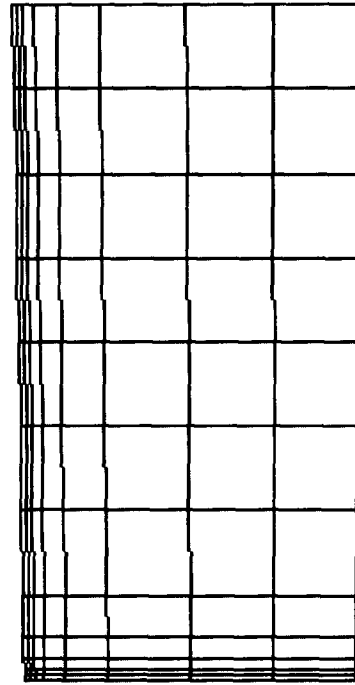


Fig. 12 Optimal shape of elastic wedge in contact with a rigid half plane

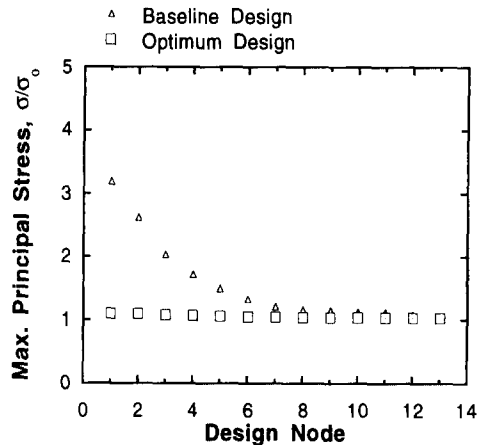


Fig. 13 Maximum principal stresses at the baseline and optimum design for and half plane problem

식 (23)의 해는 비마찰접촉 ($\mu=0$)의 경우에 $\gamma_s=90^\circ$ 가 구해진다. 최적 쐐기각 $\gamma=91.3^\circ$ 는 접촉 역학 이론의 임계 쐐기각 90° 보다 1.5% 크다.

5. 결 론

수치해석방법이 응력특이가 존재하는 고체의 형상을 최적화하기 위해 만들어졌다. 본 연구에서 사용된 수치적 도구는 유한요소해석과 형상변형률 방법이다. 반평면에 접촉하는 평면변형률 썪기의 수치예제가 반평면과 썪기의 재질이 동일할 경우와 반평면이 더 강한 경우, 반평면이 강성인 경우에 대하여 수행되었다.

수치적 방법이 예리한 썪기 접촉문제에서 고 응력을 감소시키는데 유용하다고 본 연구를 통해 증명되었다. 실제의 관점에서 볼 때, 본 연구에서 사용한 아주 조밀하지 않은 요소에 의한 해석으로 얻어진 값보다 2°정도 작게 접촉각을 설계하는 것이 더 효율적이다.

본 연구에서 사용된 수치적 접근이 마찰을 수반한 접촉이라든지 3차원 문제의 접촉 등과 같은 보다 일반적인 접촉문제에 적용할 수 있고, 아직도 이 방향으로 연구가 진행되고 있는 추세이다.

참고문헌

- (1) Timoshenko, S. P., 1952, *History of Strength of Materials*, Dover, p. 333.
- (2) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Inc., pp. 139~144.
- (3) Barber, J. R., 1992, *Elasticity*, Kluwer Academic Publishers, pp. 121~163.
- (4) Williams, M. L., 1952, "Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension," *Journal of Applied Mechanics*, Dec. pp. 526~528.
- (5) Bogy, D. B., 1971, "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction," *Journal of Applied Mechanics*, June, pp. 377~386.
- (6) Bogy, D. B., 1970, "On the Problem of Edge-Bonded Elastic Quarter-Planes Loaded at the Boundary," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6, pp. 1287~1313.
- (7) Muskhelishvili, N. I., 1963, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, translated from the Russian by Radok, J. R. M., Noordhoff, Groningen, Netherlands, p. 464.
- (8) Dundurs, J. and Lee, M. S., 1972, "Stress Concentration at a Sharp Edge in Contact Problems," *Journal of Elasticity*, Vol. 2, No. 2, June, pp. 109~112.
- (9) Gdoutos, E. E. and Theocaris, P. S., 1975, "Stress Concentrations at the Apex of a Plane Indenter Acting on an Elastic Half Plane," *Journal of Applied Mechanics*, Sept. pp. 688~692.
- (10) Comninou, M., 1979, "Stress Singularity at a Sharp Edge in Contact Problems with Friction," *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, Vol. 27, pp. 493~499.
- (11) Peterson, R. E., 1974, *Stress Concentration Factors*, John Wiley, pp. 251~253.
- (12) Bijak-Zochowski, M., Waas, A. M., Anderson, W. J. and Miniatt, C. E., 1991, "Reduction of Contact Stress by Use of Relief Notches," *Experimental Mechanics*, Sep., pp. 271~275.
- (13) Benedict, R. L. and Taylor, J. E., 1980, "Optimal Design for Elastic Bodies in Contact," Proceedings of NATO-ASI, Iowa City, May 20-June 4, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, (Eds. Haug, E. J. and Cea J.), Sijthoff and Noordhoff, Netherlands, pp. 1553~1599, 1981.
- (14) Benedict R. L., 1980, "Optimal Design for Elastic Bodies in Contact," Ph. D. Thesis, The University of Michigan.
- (15) Taylor, J. E., 1986, "Distributed Parameter Optimal Structural Design: Some Basic Problem Formulations and their Applications," Proceedings of NATO-ASI, Tria, Portugal, June 29-July 11, *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*, (Eds. Soares, C. A. M.), Springer-Verlag, Berlin, pp. 3~85, 1981.
- (16) Haslinger, J. and Neittaanmki, P., 1988, *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications*, John Wiley, pp. 133~197.
- (17) Haslinger, J., 1992, "Contact Shape Optimization: The Mathematical Theory," *Proceedings*

- of Contact Mechanics : International Symposium*, Nov., pp. 287~303.
- (18) Feijóo, R. A. and Francello, E. A., 1992, "A Finite Element Approach for an Optimal Shape Design in Contact Problems," *Proceedings of Contact Mechanics : International Symposium*, Nov., pp. 263~286.
- (19) Jungsun Park and Anderson W. J., 1994, "Geometric Optimization in The Presence of Contact Singularities," AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 35th Structures, Structural Dynamics, and Materials, paper AIAA 94~1362, April 18, Hilton Head, SC.
- (20) Jungsun Park, 1993, "Selected Optimization Problems in Structural Mechanics," *Ph. D. Thesis*, The University of Michigan.
- (21) Dundurs, J., 1969, "Discussion," *Journal of Applied Mechanics*, Sept. pp. 650~652.
- (22) Dundurs, J., 1967, "Effect of Elastic Constant on Stress In A Composite Under Plane Deformation," *Journal of Composite Material*, Vol. 1, pp. 310~322.
- (23) Suh, M. W., 1989 "Geometric Strain Method for Shape Optimization," Ph. D. Thesis, The University of Michigan.
- (24) Suh, M. W., Anderson, W. J. and McDonald, J. P., 1989, "Application of Geometric Strain Method to Shape Optimization of Spring Retainer Redesign," *Computer Aided Optimum Design of Structures : Applications ; OPTI-89*, Southampton, UK, June, pp. 189~198.
- (25) Kirsch, U., 1981, *Optimum Structural Design*, McGraw-Hill, p. 89.
- (26) Kikuchi, N. and Oden, J. T., 1988, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, pp. 19~30.