

〈 논 문 〉

Delaunay 삼각화기법을 이용한 유한요소망의 자동생성과 격자 재구성에의 응용

정현석* · 김용환**

(1995년 8월 18일 접수)

Automatic Mesh Generation by Delaunay Triangulation and Its Application to Remeshing

Hyun-Seok Jeong and Yong Hwan Kim

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Mesh Generation(요소생성), Delaunay Triangulation(Delaunay 삼각화), Remeshing(요소망 재구성)

Abstract

An algorithm for automatic mesh generation of two-dimensional arbitrary planar domain is proposed by using Delaunay triangulation algorithm. An efficient algorithm is proposed for the construction of Delaunay triangulation algorithm over convex planar domain. From the definition of boundary, boundary nodes are first defined and then interior nodes are generated ensuring the Delaunay property. These interior nodes and the boundary nodes are then linked up together to produce a valid triangular mesh for any finite element analysis. Through the various example, it is found that high-quality triangular element meshes are obtained by Delaunay algorithm, showing the robustness of the current method. The proposed mesh generation scheme has been extended to automatic remeshing, which is applicable to FE analysis including large deformation and large distortion of elements.

1. 서 론

유한요소법은 기계설계나 구조해석 등의 공학적인 문제를 해결하는 데 아주 유용한 수치해법으로 1970년대 이후부터 꾸준히 발전되어 왔다. 최근 들어 컴퓨터의 급속한 발전과 더불어 성능이 우수한 범용 소프트웨어들이 개발됨에 따라 그 사용이 증가하고 있으며 또한 대형 컴퓨터의 등장으로 대규모 계(system)의 해석이 가능해지고 이에 따른 해석 및 계산기법도 급격히 발전되고 있다. 그러나

이러한 대규모 계를 해석하려 할 때 최대의 문제는 그 수치해석 모델의 작성단계에서 생긴다. 왜냐하면 문제가 복잡해질수록 실제 계산시간보다 수치해석 모델작성(preprocessing)에 소요되는 시간이 기하급수적으로 증가하기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 계산의 효율성과 사용의 간편성을 갖는 Delaunay 삼각분할법을 이용하여 2차원 평면상에서 삼각형 유한요소망을 구축하는 기법을 개발하였다. 현재까지 Delaunay 삼각분할법을 이용하여 유한요소망을 자동생성하는 많은 연구가 진행되어 상당한 성과를 거두고 있는 실정이다.^(1~12) 이미 1850년에 Dirichlet는 주어진 영역을 체계적으로 다각형 집합으로 분리하는 방법을 제안하였다. 이

*현대기술개발(주)

**회원, 충남대 기계설계공학과

Dirichlet 분할에 중복(overlapping)을 피하고 전체영역에 다각형을 생성한 것이 Voronoi 영역이라 한다. 그 이후 1972년에 Fukuda와 Suhara⁽²⁾는 주어진 영역에 내부 절점을 삽입하고, 경계절점과 내부절점을 연결하여 삼각형을 생성하는 알고리즘을 제안하였다. 1974년에 Cavendish⁽³⁾는 Fukuda-Suhara 알고리즘을 4개의 독립된 모듈로 체계화하여 수정된 Fukuda-Suhara 알고리즘을 개발하였다. 1978년에 Shaw와 Pitchen⁽⁴⁾은 Fukuda-Suhara 알고리즘에 내부 절점생성기법을 추가하여 한 단계 더 발전시켰다. 그리고 1978년 Sibson⁽⁵⁾은 2차원 평면에 대하여 Dirichlet 분할법을 적용하였으며, 1981년에 Watson⁽⁶⁾은 Delaunay 분할을 Voronoi 다각형에 적용하였다. 여기서, Delaunay 삼각분할이란 Voronoi 다각형에 Babuska와 Aziz⁽⁷⁾가 제안한 최대-최소각 조건(max-min angle condition)을 적용하여 요소망 간의 중복을 피하고 경계에 가장 가까운 요소망을 생성하는 방법이다. 그 후 Schroeder와 Shepard⁽⁸⁾는 2차원 영역에 대하여 Delaunay 삼각분할법을 적용하였고 1989년에는 Baker⁽⁹⁾는 Delaunay 분할법을 이용하여 복잡한 3차원 영역에 대해 요소망 생성기법을 개발하였다. 국내에서는 최근 들어 자동요소 생성의 필요성을 인식하고 연구가 활발히 진행되고 있으며, 정렬배후면 격자계를 이용한 Delaunay 삼각화에 의한 격자 생성⁽¹²⁾이나 4각형 요소의 자동생성에 관한 연구결과^(13,14)가 발표되고 있다.

그러나 이들 연구들은 그 기법들이 구체적으로 공개되지 않고 있으며, 그런 이유로 국내에서는 아직까지 보편화되지 못하고 있다. 삼각형 요소망은 사각형 요소에 비해 계산효율은 낮으나, 단순성, 적용성 및 기하학적 유연성(flexibility)이 뛰어나 불규칙 경계를 포함하는 영역에 효과적으로 유한요소망을 생성할 수 있다.

한편 소성가공공정의 해석과 같이 해석과정에서 대상 영역이 변하는 경우 요소망의 과도한 변형으로 해의 질이 떨어지거나 해석자체가 불가능하게 되므로 이런 문제를 해결하고 해석을 계속 수행해 나가기 위해서는 요소망 재구성(remeshing) 기법이 필요하며, 이에 요소망 구성과 재구성을 동시에 만족할 수 있는 기법의 개발이 요구된다고 하겠다.

기존의 상용프로그램은, 사용방법이 복잡하여 전문가가 아닌 일반인들은 사용하기 어렵고, 복잡한

형상인 경우에 한꺼번에 요소망 생성이 곤란하여 여러 번의 반복적인 작업이 필요하고, 요소망 생성시 동일한 크기나 비율로 증감하므로 복잡한 형상인 경우 유연성이 떨어지는 단점을 지니고 있다. 그러나 본 연구에서 개발된 자동 유한요소망 생성기는 프로그램 구성이 대화형으로 구성되어 있어 초보자도 사용하기 쉽고, 매 단계마다 입력자료를 수정할 수 있어 자료입력시 소모되는 시간을 줄일 수 있고, 형상이 복잡한 경우에도 탄력적으로 요소망을 생성시킬 수 있다. 또한 유한요소해석에서 필요한 결과들, 즉 절점좌표값, 경계절점 좌표값, 연결성(connectivity), 그리고 밴드 폭을 구하여 결과에 대한 검토가 용이하며, 기존 프로그램과 연결하여 사용하기 쉽도록 하였으며 이 모든 과정은 C++를 이용한 GUI 상에서 간편히 조작되며, 요소망 구성 결과를 화면을 통해 볼 수 있도록 하였다.

본 연구에서 개발한 자동요소망 생성기법은 해석 대상의 경계에 대하여 특정한 절점(key nodes)만 입력하면 이것을 기초로 해서 내부절점을 생성하고 Delaunay 삼각분할법에 의해 3 절점 혹은 6 절점의 삼각형 유한요소망을 생성시킬 수 있다. 또한 해석 대상에서 국부적으로 응력집중이 예상되는 곳에서는 각 절점마다 더욱 조밀한 요소망을 생성할 수 있도록 하였고 다듬질(smoothing)기법을 사용하여 요소망의 질을 향상시켰고, 밴드 폭을 최소화하는 기법을 도입하였다. 또한 금속성형과 같은 소성가공공정의 해석이나 라그랑지안(Lagrangian) 형태의 유동해석 등의 대변형 문제를 해석할 때 발생하는 문제점인 요소망의 심한 변형, 금형과 요소망 사이의 기하학적 간섭 등을 방지하여 자동으로 요소망을 재구성하므로 중단없는 해석을 위한 전산모사(computer simulation)를 계속 진행할 수 있도록 하였다.

2. Delaunay 삼각분할법에 의한 유한요소망 자동생성 기법

2.1 요소망 생성의 기본 원리

2차원 공간에서 점들의 집합을 $P = \{P_i, i=1, N\}$ 로, 다각형의 집합을 $V = \{V_i, i=1, N\}$ 로 정의한다. 여기서, $V_i = \{X \in R^2 : \|X - P_i\| < \|X - P_j\|, \forall j \neq i\}$ 로 절점 P_i 와 가장 가까운 절점을 포함하는 영역을 표시한다. V_i 는 V_i 와 V_j 가 인접해 있을 때 절점 P_i 와 P_j 를 연결하는 선분을 수직 이등분하는 다각형이고 이것을 Voronoi 다각형이라 부른다.

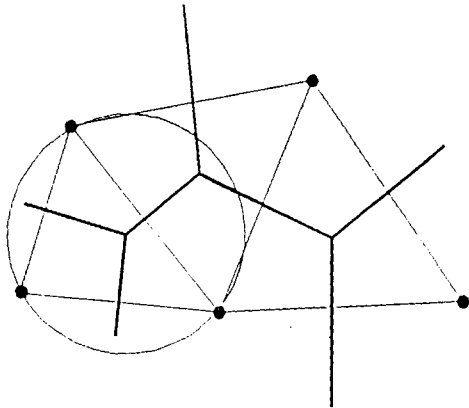


Fig. 1 Description of Delaunay triangulation

이런 Voronoi 다각형의 집합을 Dirichlet 분할 (Dirichlet tessellation)이라 부른다.

Fig. 1은 Delaunay 삼각분할의 일례를 보여주는 것으로서 가는 선은 절점을 연결하여 생긴 Delaunay 삼각분할을, 굵은 선은 Voronoi 분할이라 불리는 공간분할을 나타낸다. 일반적으로 Voronoi 다각형의 정점은 다른 두 개의 인접한 다각형과 공유하게 되며, 인접한 다각형에 관련된 세 개의 절점을 연결하여 삼각형을 생성하며, 이러한 삼각형의 집합을 Delaunay 삼각분할이라 부른다. 이 결과로 Delaunay 분할에서 Voronoi 분할을, 그리고 역으로 Voronoi 분할에서 Delaunay 분할을 얻을 수 있다. 또 Voronoi 분할의 변은 Delaunay 삼각분할에서 얻어진 삼각형 각 변의 수직 이등분선이다. 이것은 Voronoi분할에서 얻어진 다각형의 각 정점이 Delaunay 삼각분할에서 얻어진 삼각형의 외접원의 중심임을 나타낸다. 그러므로 해석대상에 대하여 절점을 하나씩 설정해 각 단계마다 Delaunay 삼각분할을 행하고 최종적으로 n개의 절점에 대한 분할을 행하게 된다. Delaunay 삼각분할을 행하면 주어진 절점에 대해 등각조건을 만족하는 삼각형, 유한요소 해석에 바람직하도록 변형이 적은 삼각형, 즉 정삼각형에 가까운 형상을 갖는 요소를 얻을 수 있게 된다.

2.2 해석영역의 경계절점 생성

Delaunay 삼각분할을 이용하여 해석대상을 분할할 때 경계절점을 기초로 해서 분할하므로 정확한 경계의 생성이 무엇보다 중요하다. 영역의 경계는 선분이나 원호(arc) 등 여러 개의 조각(segment)

으로 이루어진 것으로 가정하고, 각각의 조각을 나눠 절점을 생성하였다. 영역의 형상이 복잡한 경우에는 전체영역을 몇 개의 부영역(sub-region)으로 나누어 각각의 부영역에 대해 절점을 생성시키고, 부영역들을 조합하도록 하였다.

2.3 내부절점 생성과정

본 연구에서 사용한 2차원 요소망 생성기는 Delaunay 삼각분할법에 기초를 두고 있다. 그러므로 위에서 언급했듯이 내부절점의 생성은 경계 절점 분포를 기준으로 등각 조건에 만족하도록, 즉 정삼각형에 가까운 요소망을 생성하도록 절점을 생성한다. 이렇게 생성된 삼각형요소 'T'가 다음 식을 만족하면 보다 작은 요소로 분할한다.

$$\frac{S(T)}{(P^1 P^2 P^3)^{2/3}} > 1 \quad (1)$$

여기서, $S(T)$ 는 요소 T 의 표면, P^i 는 T 의 세 꼭지점과 관련된 가중치(weight value)이다. 경계 절점과 관련된 가중치는 공통으로 이 절점이 가지는 두 개의 경계측면의 평균거리이다. 만약 T 가 식 (1)을 만족하면 이 요소에 새로운 점이 생성되고 그 위치 X 는 다음 식으로 주어진다.

$$X = \frac{(P^1 X^1 + P^2 X^2 + P^3 X^3)}{(P^1 + P^2 + P^3)} \quad (2)$$

여기서, X^i 는 삼각형에서 꼭지점 i 의 위치다. 새로운 절점과 관련된 가중치는 다음 식과 같다.

$$P(X) = \frac{(P^1 + P^2 + P^3)}{3} \quad (3)$$

이러한 과정은 식 (1)을 만족하는 삼각형이 더 이상 존재하지 않을 때까지 계속된다.

2.4 Delaunay 특성에 의한 요소망의 최적화

해석영역에 대하여 경계 및 내부절점을 생성한 후 Delaunay 특성을 적용하여 최적 요소를 생성한다. 이때 보다 양질의 요소망, 즉 정삼각형에 가까운 요소망을 생성하기 위해 다음과 같은 최적화 과정을 거치게 된다.

2.4.1 외접원 내·외의 절점 비교

Fig. 2와 같이 abcd 네 개의 절점으로 두 개의 삼각형을 구성할 때 Delaunay 특성에 의해 최적화된 요소를 생성하게 된다. 절점 abc에 의해 삼각

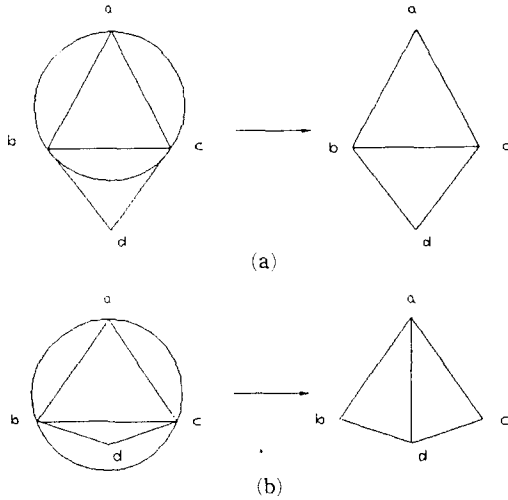


Fig. 2 Description of circumcircle of triangle (abc) :
When node is located (a) outside of circumcircle and (b) inside of circumcircle

형이 생성되었을 때 이 삼각형의 외접원을 구성하여 절점 d가 외접원 밖에 있으면 삼각형 abc와 bcd를 생성하고 절점 d가 외접원 내부에 있으면 삼각형 abd와 acd를 생성한다. 이는 삼각형 abd와 acd가 삼각형 bcd에 비해 정삼각형에 가깝기 때문이다.

2.4.2 최소각 비교

Fig. 3(a)와 같이 abcd 네 개의 절점으로 된 두 개의 삼각형에 대하여 모든 각을 비교한 후 최소각을 찾아내어 최소각이 큰 삼각형을 생성한다. 그림에서 각 a1과 a2를 비교하면 a2가 a1에 비해 큰 각을 갖기 때문에 삼각형 abd와 acd를 생성한다. 이는 삼각형 abd와 acd가 삼각형 bcd에 비해 정

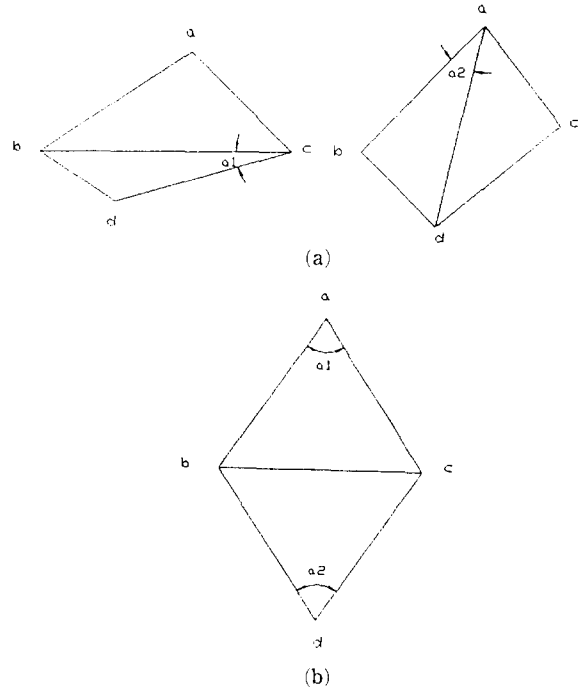


Fig. 3 A comparison of (a) minimum angle and (b) diagonal angle

삼각형에 가깝기 때문이다.

2.4.3 대각 비교

Fig. 3(b)와 같이 abcd 네 개의 절점으로 된 두 개의 삼각형을 구성할 때, 두 대각 ad, bc를 각각 비교하여 그 두 각의 합이 180°보다 큰 각은 두 개로 분할한다. 그림에서 볼 수 있듯이 두 각 b와 c의 합이 180°보다 크기 때문에 b와 c를 각각 분할하여 두 개의 삼각형 abc와 bcd를 생성한다.

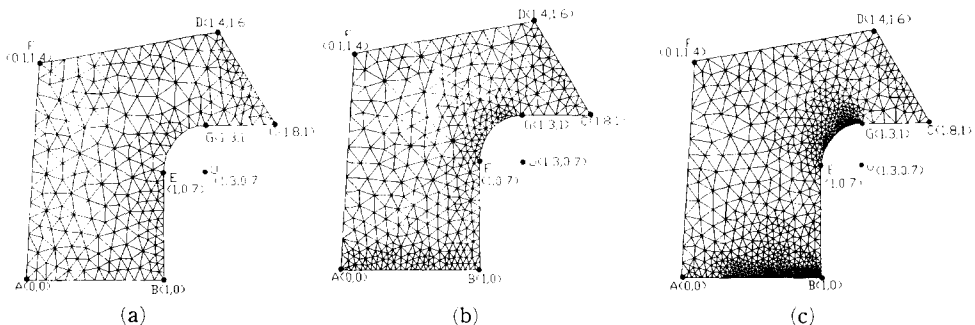


Fig. 4 Constructed 6 node triangular mesh for inverse L shape by Delaunay triangulation with (a) low density, (b) medium density, and (c) high density

Table 1 Variation of CPU time of mesh generation with density

	Low density	Medium density	High density
Number of node	981	1559	3144
Number of element	448	726	1487
CPU time on PC-486(sec)	140	220	530

2.5 밀도 조절

유한요소망의 생성에서 해석 문제에 따라 국부적으로 요소망의 밀도를 조절할 필요가 있다. 그래서 본 프로그램에서는 Delaunay 삼각분할법이 경계절점을 기초로 해서 요소망을 생성하는 특성을 이용하여 3절점으로 구성된 경계절점마다 밀도를 조절할 수 있도록 하여 더욱 효과적으로 요소망을 구성하도록 하였다. 먼저 해석영역에 대하여 Delaunay 삼각분할을 행하여 경계절점 값을 구하고, 국부적으로 밀도조절이 필요한 절점이나 구간에 대해 보다 조밀하게 경계절점을 생성하도록 하였다. Fig. 4는 역 L 자형 형상에 대하여 Delaunay 삼각분할법을 이용하여 요소망을 생성한 것으로 밀도조절의 예를 보여준다. 그림의 형상에서 우측하단부와 구석부에 대해 보다 조밀한 요소망이 요구되는 경우 균일하게 기존의 요소망 간격보다 2배에서 5배까지 더욱 조밀하게 요소망을 구성한 것이다. 그 결과 증가한 총 절점수와 요소수 및 요소망 생성에 소요된 계산시간을 Table 1에 나타내었다.

2.6 다듬질

Delaunay 삼각분할법을 사용하여 생성한 삼각형 요소중 베틀어진 것이 생성될 수 있으므로 이들 요소형상의 수정을 위하여 일반적으로 널리 쓰이는 라플라시안 다듬질(Laplacian smoothing)기법을 사용하였다.⁽³⁾ 이 방법은 경계선 내부에 생성된 절점의 위치를 현재위치와 주위에 연결된 절점들의 평균 위치와의 평균값으로 재조정하는 것으로 다음 식으로 주어지는 위치에 절점을 이동시킨다.

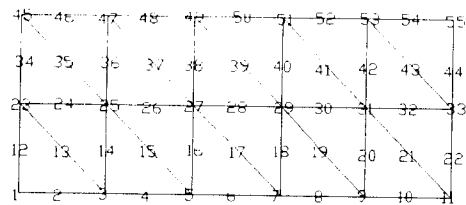
$$P(i) = \frac{1}{2n} \sum_j^n [P(j) + P(k)] \quad (4)$$

여기서, i, j, k 는 삼각형의 세 정점이고 $P(i), P(j), P(k)$ 는 세 정점의 좌표값을 나타내고 n 은 점 i 를 공유하는 삼각형의 개수를 나타낸다. 이 식은 점 i 를 정점으로 하는 모든 삼각형의 면적중심에 위치시키는 것을 나타내고 있다.

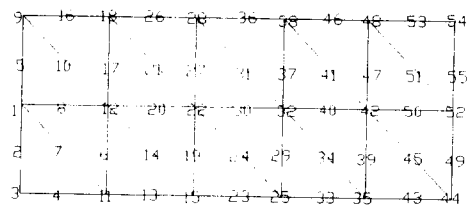
2.7 밴드폭 최소화기법

Delaunay 삼각분할법을 사용하여 유한요소망을 생성하는 경우 요소와 절점번호가 불규칙하게 배열되므로 이로부터 얻어지는 강성행렬은 밴드폭이 매우 큰 희소(sparse)행렬이 되므로 이를 실제해석공정에 사용하는 것은 비효율적이다. 따라서 본 연구에서는 Reverse-Cuthill Mckee(RCM)의 방법^(15,16)을 사용하여 밴드폭을 최소화하도록 절점의 번호를 매기는 기법을 사용하였다. 이 방법에서는 사용자가 요소망 구성시 사용한 가장자리를 시작절점(starting node)으로 하며, 밴드폭을 최적화 시켜 얻은 결과로 기존에 부여된 절점번호 자체를 처음부터 재배열한다.

Fig. 5는 간단한 사각형 영역에 대하여 6절점 삼각형으로 구성된 요소망에 밴드폭 최소화기법을 적용한 예를 보여준다. Fig. 5(a)는 밴드폭 최소화기법을 실행하기 전의 모습으로 절점번호가 분산되어



(a)



(b)

Fig. 5 Example of bandwidth minimization: (a) Before (Maximum bandwidth: 46) and (b) after bandwidth minimization (Maximum bandwidth: 24)

있는 것을 알 수 있으며, 이때 최대 밴드폭은 46이다. Fig. 5(b)는 밴드폭 최소화기법을 실행한 후의 모습으로 절점 번호가 오른쪽에서 왼쪽으로 비교적 순차적으로 재배열 되어 있는 것을 알 수 있으며, 그 결과 최대 밴드폭은 24로 상당히 감소되었음을 알 수 있다.

2.8 요소망 구성 과정

Delaunay 삼각분할법을 이용하여 유한요소망을 구성할 경우 다음과 같은 단계를 걸쳐 요소망을 생성하게 된다.

- (1) 해석대상의 경계를 정확히 설정한다.
- (2) 요소망을 구성할 절점(3절점 또는 6절점)을 선택한다.
- (3) 해석대상의 경계에 특정 절점을 입력하여 경계절점을 생성한다.
- (4) 내부 절점을 생성하고 Delaunay 특성을 이용하여 삼각형을 생성한다.
- (5) 생성된 요소망을 라플라시안기법으로 다듬질한다.
- (6) 6절점 요소의 경우 요소 세 변의 중앙에 새로운 절점을 생성한다.
- (7) 밴드폭을 최소화한다.
- (8) 응력 집중이 예상되는 영역에 요소망을 조밀하게 생성한다.

위와 같은 과정을 거쳐 최종적으로 양질의 요소가 생성되고 실행결과로는 절점좌표(nodal coordinates), 요소망의 연결성(connectivity) 및 밴드폭(bandwidth) 등이 계산되므로 실제 유한요소해석에 직접 이용할 수 있도록 하였다.

3. 요소망 재구성기법

유한요소법을 이용하여 대변형 해석을 할 때 발생하는 문제점은 대변형에 의한 요소망의 심한 변형으로 해의 질이 저하되고 지속적인 해석이 불가능하게 되는 것이다. 이는 급속성형과 같은 소성 가공공정의 해석이나 라그랑지안(Lagrangian) 형태의 유체유동에서 발생하게 되는데 이는 과도한 변형, 또는 급형과 요소 사이의 기하학적 간섭, 요소의 급형에의 침투에 따른 체적의 손실 등에 기인한다. 이러한 변형 때문에 어떤 요소들은 종횡비(aspect ratio)가 커져서 해의 정확도가 떨어지고, 변환행렬(transformation matrix)의 Jacobian이 음이 되

어 해석자체가 불가능하게 되기도 한다. 이런 경우에 해석을 계속 수행해 나아가기 위해서는 변형된 소재의 형상에 적합한 새로운 요소망을 다시 구성하여야 하는데 이를 요소망 재구성(remeshing)이라 한다.^(17,18) 이 작업은 일반적으로 많은 시간과 노력을 필요로 하며, 효율적인 해석을 수행하기 위해서는 요소망 재구성과정이 자동화되어 해석을 위한 전산모사(computer simulation)가 처음부터 끝까지 중단없이 진행되도록 하여야 한다.

일반적으로 요소망 재구성과정은 크게 이전 요소에 정의된 값을 절점으로 옮기는 과정, 해석에 적합한 새로운 요소망을 구성하는 과정, 예전 요소망의 정보를 새로운 요소망으로 옮기는 과정으로 나뉜다. 따라서 본 연구에서 개발한 요소망 재구성기법은, 먼저 해석에 필요한 경계를 새롭게 생성하고, 이 경계절점을 이용하여 Delaunay 분할법으로 요소망을 구성한 다음, 필요한 변수들을 새로운 요소망으로 보간한다.

3.1 요소망 재구성 결정

요소망 재구성에 있어서 가장 중요한 것 중 하나는 어느 시점에서 요소망을 재구성하는지를 결정하는, 요소망 재구성에 대한 판별기준을 정의하는 것이다. 본 연구에서는 다음의 요소망 재구성 기준을 사용하였다.

3.1.1 음의 자코비안

어느 한 요소라도 심한 변형을 하게 되면 해의 질이 저하되고, 결국 변환행렬(transformation matrix)이 음의 자코비안(Jacobian)을 갖게 된다. 이 경우 더 이상의 계산이 불가능하기 때문에 변환행렬의 자코비안을 계산해서 영(0)보다 작은 값을 갖게 되면 요소망을 재구성한다.

3.1.2 간섭조건

급속성형 등의 해석시 해석영역이 시간에 따라 변하기 때문에 경계절점면을 정확하게 나타내는 것이 무엇보다 중요하다. Fig. 6은 요소망이 급형을 침투한 경우의 간단한 예를 보여주는 것이다. 여기서 S 는 침투되기 전의 요소망 경계절점을 나타낸 것이고, $P(s)$ 는 급형에 의해 침투된 후의 경계절점 위치로 S 절점 위치에서 침투후의 경계 중 가장 가까운 위치로 투영된 점이다. 그리고 빗금친 부분은 침투된 면적으로 식 (5)로 나타낸다.

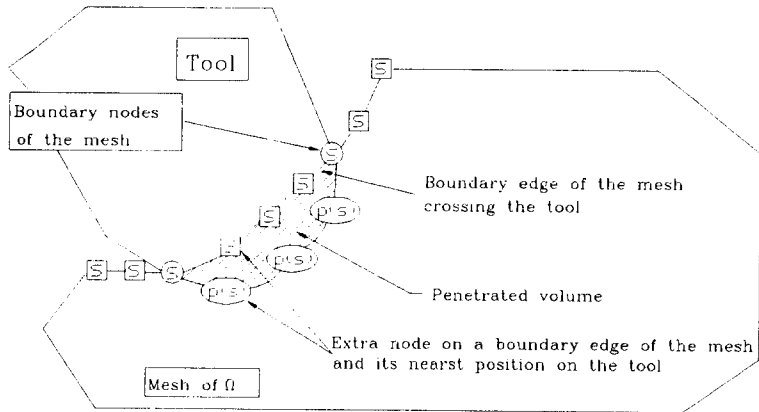


Fig. 6 Description of geometric precision by the penetrated volume estimate

$$Vol(\Omega \cap O) = \sum_{s \in S} \|X^s - P(X^s)\| \cdot h^s \quad (5)$$

여기서, O 는 금형의 영역, Ω 는 원래 요소망의 영역을, X^s 는 $P(s)$ 의 절점위치, h^s 는 $P(s)$ 와 $P(x^s)$ 의 거리이다. 따라서 침투된 면적을 계산하여 미리 지정된 정확성의 값을 기준으로 해서 이보다 크면 요소망을 재구성한다.

3.2 Delaunay 특성에 의한 절점생성 및 요소망 구성

요소망 재구성(remeshing) 과정에서는 앞에서 언급했듯이 요소망 재구성 여부가 판가름 나면 그 다음은 현재의 경계에 대해 경계절점을 생성하고, 앞 절에서 설명한 Delaunay 삼각분할법에 따라 새로운 절점을 생성하고 요소망을 구성한다. 이렇게 구성된 요소망은 Laplacian 다듬질과정을 거치고, 이전 요소망에서 새로운 요소망으로 필요한 변수들을 보간한다.

요소망 재구성을 위하여 기존의 영역과 새로운 영역을 정확히 일치시키는 것이 무엇보다 중요하다. 하지만 변형 중의 기존 경계가 매우 복잡한 경우 필요 이상의 요소를 생성하는 것은 계산효율 면에서 바람직하지 못하다. 따라서 새로운 경계절점을 생성하는 데 다음과 같은 몇 가지 계수를 도입하여 경계요소의 크기를 제한하였다.

3.2.1 정확성

경계상의 한 요소와 정확한 경계와의 차이를 볼륨(%)으로 나타내고 이를 정확성(precision)의 계수 α 로 나타낸다. Fig. 7(a)는 경계생성의 일례를

보여주고 있다. 여기서, 실선은 실제해석 대상의 경계를 나타내주고, 점선은 요소망 구성을 위한 경계를 나타내는 것으로 d_1 , d_2 는 실제 경계와의 차이를 나타낸다. 그러므로 전체영역의 면적을 V , 각 부분별 실제경계와의 차이를 d_1, d_2, \dots, d_i 라 하면 정확한 경계표현을 위해 만족하기 위한 조건은 다음 식과 같다.

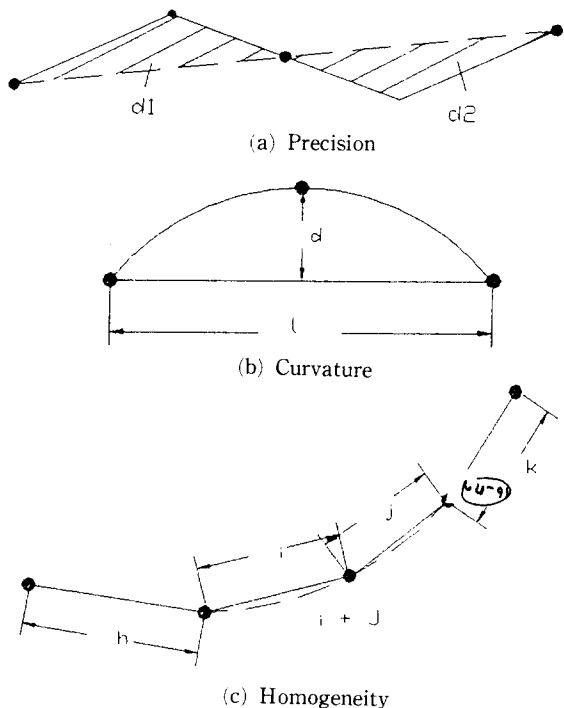


Fig. 7 Description criterion for node generation along boundary

$$100 \times \frac{|d_1| + |d_2| + \dots + |d_n|}{V} \leq \alpha \quad (6)$$

요소망의 경계와 실제 경계에서의 차이가 α 보다 작으면 그림에서 점선을 새로운 영역의 경계로 한다.

3.2.2 곡률

Fig. 7(b)와 같이 경계요소를 표현하는데 곡률 (curvature) ($\beta = d/l$)의 계수는 β 로 주어지고 허락가능한 최대의 수치를 부여한다. 그림에서처럼 세 개의 절점에 대해 d/l 을 계산하고 이 값이 미리 주어진 β 값보다 작으면 중앙의 절점을 삭제하여 경계를 원만하게 한다.

3.2.3 유사성

두 경계요소가 연결될 때의 크기의 차이를 제한할 필요가 있는데 이를 유사성 (homogeneity)의 계수 γ 로 나타내고 인접한 두 경계요소의 병합여부를 판별한다. Fig. 7(c)와 같이 두 경계 절점 사이의 한 요소에 대해서 정확성과 곡률의 계수로 검토한 후 다음의 요소와의 병합 가능 여부를 알아보기 위해 유사성의 계수로 두번째 요소의 길이를 검토한다. 그러므로 다음의 관계가 만족되면 Fig. 7(c)에서 i 와 j 의 병합을 인정하여 한 절점을 제거한다.

$$\begin{aligned} l_{i+j} > l_k &\rightarrow l_k/l_{i+j} \leq \gamma; \quad l_{i+j} < l_k \rightarrow l_{i+j}/l_k \leq \gamma \\ l_{i+j} > l_n &\rightarrow l_n/l_{i+j} \leq \gamma; \quad l_{i+j} < l_n \rightarrow l_{i+j}/l_n \leq \gamma \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, l_{i+j} 는 요소 $i+j$, l_k 는 요소 k , l_n 은 요소 n 의 길이를 각각 나타낸다. 그리고 요소 i 와 j 가 병합될 때 경계요소에 대하여 허용가능한 최대 길이는 사용자가 지정해 주어야만 한다. 그러면 경계를 따라 첫번째 경계요소에서 시작하여 병합여부를 검토하여 더 이상 병합할 요소가 없을 때까지 반복하여 실시하게 된다.

3.3 변수의 이동

요소망이 재구성과정에 의해 새로운 요소망을 구성한 후에는 이전의 요소망으로부터 새로운 요소망으로 정보를 전달하는 과정이 필요한데, 이것을 변수의 이동 (transport)이라 한다. 이 과정은 새로운 요소망의 절점이 이전 요소망의 어느 절점에 속하는지를 판단하고, 이전 요소망의 각 절점좌표를 이용하여 새로운 요소망의 좌표를 찾아내어 보간법으

로 이전요소에서 새로운 요소로 정보를 전달하는 과정이다. 이 과정은 식 (8)로 나타낼 수 있다.

$$S(X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} \frac{S(X_0^i)}{d(X_n; X_0^i)}}{\sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{d(X_n; X_0^i)}} + \epsilon \quad (8)$$

여기서, S 는 X_n 에서의 변수값, 즉 변위, 온도 등 절점에서 정의되는 모든 변수값, X_n 은 새로운 요소망의 절점 좌표값, X_0 은 이전 요소망의 절점 좌표값, N_0 은 이웃하는 절점의 개수를 나타낸다. 즉 구하고자 하는 값 S 는 X_n 으로부터 구하고 X_n 은 X_0 에 이웃하는 절점 중 가장 가까운 절점으로부터 구한다. 그 다음 변수들은 구요소망에서 새로운 요소망으로 보간 (interpolation)된다. 변형률이나 응력과 같이 절점에서 정의되지 않고 요소에 대해 정의되는 변수는 구요소망에서 그 변수를 절점값으로 보간한 후, 식 (8)에 의해 새로운 요소망으로 이동시킨 후 다시 요소에서의 값으로 변환한다.

4. 적용 예 및 토론

본 연구에서 개발한 Delaunay 삼각분할법을 이

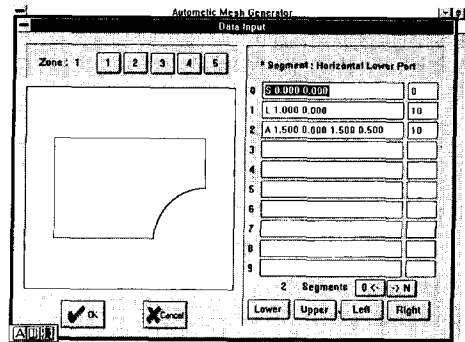


Fig. 8 Screen of data input module of AUTOMESH, to build FE mesh.

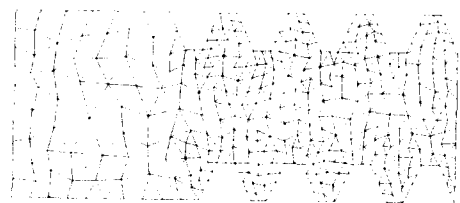


Fig. 9 Constructed 6 node triangular mesh for triangular screw thread by Delaunay triangulation (Total node: 1445, element: 656, bandwidth: 168, CPU time: 125 sec)

용한 유한요소망 자동생성기법의 프로그램을 FORTRAN으로 작성하였고, C++를 이용한 GUI용 프로그램 AUTOMESH를 작성하여 MS WINDOWS상에서 간편히 조작되고, 요소망 구성 결과를 화면을 통해 볼 수 있도록 하였다. Fig. 8에 MS WINDOWS상에서 작업화면의 예를 보였다. 모든 작업은 PC상에서 수행되며, 복잡한 형상의 경우에도 PC486 DX2에서 수 분 정도의 CPU 시간이 소요되었다. 개발된 프로그램으로 여러가지 문제에 적용시켜 본 결과는 다음과 같다.

Fig. 9는 쉽게 볼 수 있는 기계요소의 하나인 삼

각나사의 유한요소망을 생성한 것이며 Fig. 10은 충남대학교(CNU) 영문 logo의 영역을 Delaunay 삼각분할법을 이용한 요소망 생성 결과를 보여준다. 이처럼 본 연구에서 개발한 요소망 생성기법은 복잡한 경계를 갖는 영역에 대해서도 효과적으로 요소망을 구성할 수 있음을 보여준다.

Fig. 11(a)는 자동차 주위의 공기역학 해석문제에 적용한 것으로 총 질점수는 893개, 요소수는 406개, 최대 밴드폭은 118이다. Fig. 11(b)는 Fig. 11(a)에서 작성한 요소망에 대하여 심한 변형이 예상되는 곳에서 요소망을 더욱 조밀하게 구성한

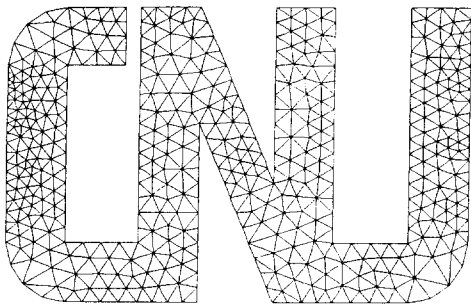
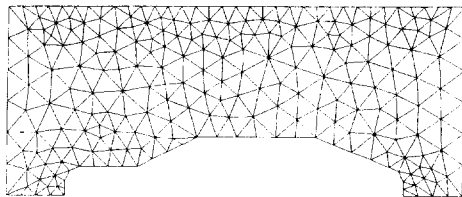
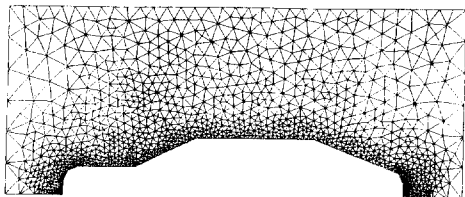


Fig. 10 Constructed 6 node triangular mesh for CNU logo by Delaunay triangulation (Total node: 1797, element: 794, bandwidth: 206, CPU time: 160 sec)

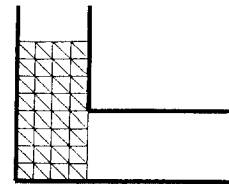


(a)

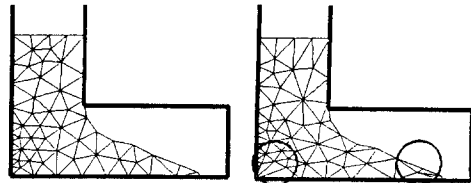


(b)

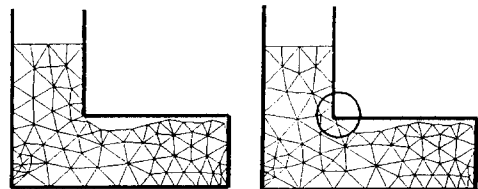
Fig. 11 Constructed 6 node triangular mesh for car body surface flow with (a) coarse mesh (Total node: 893, element: 406, bandwidth: 118, CPU time: 120sec) and (b) locally dense mesh (Total node: 5019, element: 2394, bandwidth: 276, CPU time: 820 sec)



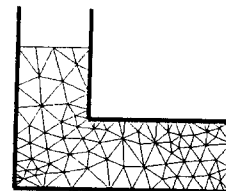
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 12 Evolution of FE meshes in flow analysis of metal casting, showing the effect of remeshing (a) Initial mesh, (b) Before and after remeshing at time 2.2 sec, (c) Before and after remeshing at time 12.4 sec, and (d) Final mesh at time 20.6 sec.

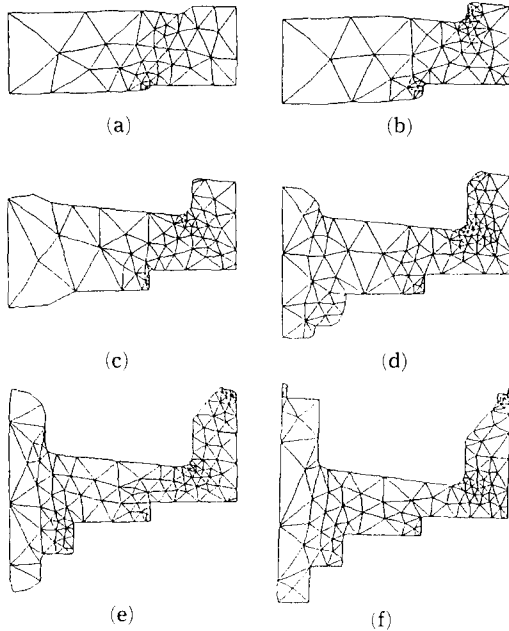


Fig. 13 Evolution of FE meshes during upsetting of VTR head drum

것으로, 밀도조정의 효과를 보여준다. 이때 생성된 절점의 총수는 5,019개, 요소수는 2,394, 최대 밴드폭은 276이다. Fig. 12는 금속주조시 금속재료 유동의 전산모사의 결과로, ⁽¹⁹⁾ Lagrangian 기법을 이용한 재료유동 해석과 같은 대변형 문제에 Delaunay 삼각분할법을 적용한 것으로, 시간이 지나고, 유체가 이동함에 따라 3절에 인접한 과정에 따라 요소망을 재구성(remeshing)하는 것이다. Fig. 13은 요소망 재구성기법을 이용하여 VTR Head drum의 축대칭 단조공정을 해석한 것이다. ⁽²⁰⁾

5. 결 론

본 연구에서는 2차원 영역에 대해 Delaunay 삼각분할법을 이용하여 유한요소해석시 전처리 과정에 필요한 유한요소망 자동생성기법을 개발하였다. 이 방법을 일반적인 문제에 적용시켜 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 복잡한 형상을 가진 해석영역에 대하여 자동적으로 Delaunay 삼각분할법에 의한 3절점 및 6절점의 삼각형 유한요소망을 생성하는 프로그램의 개발로 유한요소해석시 방대한 입력자료를 자동화하여 자료입력의 시간과 노력을 최소화하였다.

(2) 기존 프로그램과의 연계성을 위하여 다듬질 기법을 사용하여 요소망의 질을 향상시켰으며 해석 대상에서 요구되는 곳에서 밀도(density)를 조절할 수 있도록 하였다. 그리고 밴드 폭을 최소화하여 유한요소 해석을 빠르고 원활하게 진행할 수 있기에 실제 공정과 해석에 더욱 유용하게 사용할 수 있도록 하였다.

(3) 개발된 자동요소망 생성기법을 응용하여 요소망 재구성의 기법을 해결하였고 이를 대변형 해석문제에 적용하여 해석시 발생하는 요소망의 심한 변형을 방지하여 전산모사를 계속 진행할 수 있음을 보였다.

후 기

본 연구는 한국과학기술재단의 지원으로 이루어진 핵심전문연구(과제번호 931-0800-020-2)의 일부로 이에 관계자 제위께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) 谷口健男, 1992, "FEMのための要素自動分割," 森北出版, Japan.
- (2) Fukuda, J. and Suhara, J., 1972, "Automatic Mesh Generation for Finite Element Analysis," *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, UAH Press, Huntsville, Alabama.
- (3) Cavendish, J. C., 1974, "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domain for the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 8, pp. 679~696.
- (4) Shaw, R. D. and Pitchen, R. G., 1978, "Modification to the Suhara-Fukuda Method of Network Generation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 12, pp. 93~99.
- (5) Sibson, R., 1978, "Locally Equiangular Triangulation," *Computer Journal*, Vol. 21, pp. 243~245.
- (6) Watson, D. F., 1981, "Computing N-Dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytypes," *Computer Journal*, Vol. 24, pp. 167~172.
- (7) Babuska, I. and Aziz, A. K., 1976, "On the

- Angle Condition in the Finite Element Method," *SIAM Numer. Anal.*, Vol. 13, pp. 214~226.
- (8) Schroeder, W. J. and Shepard, M. S., 1988, "Geometry-Based Fully Automatic Mesh Generation and the Delaunay Triangulation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 2503~2515.
- (9) Baker, T. J., 1989, "Automatic Mesh Generation for Complex Three-Dimensional Regions using a Constrained Delaunay Triangulation," *Engineering with Computer*, Vol. 5, pp. 161~175.
- (10) Liu, Y. and Chen, K., 1988, "A Two-Dimensional Mesh Generation for Variables Order Triangular and Rectangular Elements," *Comput. Struct.*, Vol. 29, pp. 1033~1053.
- (11) Lo, S. H., 1989, "Delaunay Triangulation of Non-Convex Planar Domains," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 2695~2707.
- (12) 하대성, 김종태, 맹주성, 1994, "정렬 배후면 격자계를 이용한 Delaunay 삼각화," 한국항공우주학회지, 제22권, 제4호, pp. 43~52.
- (13) 신보성, 채수원, 박삼진, 1992, "사각형 유한 요소의 자동생성 기법에 관하여, 대한기계학회 추계학술대회 논문집, 서울, pp. 196~200.
- (14) 전만수, 1994, "사각형 유한요소해석 모델의 자동생성 프로그램의 개발, 한국정밀공학회지, 제11권, pp. 157~165.
- (15) Cuthill, E. H. and McKee, J. M., 1969, "Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices," *Proc. 24th Nat. Conf. Assoc. Comput. Mach.*, ACM Pub., 69, New York.
- (16) Cuthill, E. H., 1972, "Several Strategies for Reducing the Bandwidth of Matrices," *Sparse Matrices and Their Applications*, Plenum Press, New York, pp. 157~160.
- (17) Coupez, T. and Chenot, J. L., 1992, "Large Deformations and Automatic Remeshing," *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, D. R. J. Owen, E. Onate & E. Hinton eds., Pineridge Press, pp. 1077~1087.
- (18) Muttin, F., 1993, Coupez, T., Bellet, M. and Chenot, J. L., "Lagrangian Finite Element Analysis of Time-Dependent Viscous Free-Surface Flow Using an Automatic Remeshing Technique," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp. 2001~2015.
- (19) 윤석일, 1995, "금속의 정밀주조 공정설계를 위한 공정해석," 석사논문, 충남대학교.
- (20) 이종대, 1995, "축대칭 단조에 대한 강-점소성 유한요소해석," 석사학위논문, 충남대학교.