

〈논 문〉

## 입계기공의 확산성장 모델을 이용한 고온 기기의 크리프균열전파 해석(2)

- 특이적분 방정식 해를 통한 응력장 해석 -

전 재 영\*

(1995년 7월 3일 접수)

### Analysis of Creep Crack Growth at High-Temperature Components by Diffusive Growth Model of Grain Boundary Cavities ( II )

- Stress Field Analysis by Solving Singular Integral Equation -

Jae-Young JEON

**Key Words** : Singular Integral Equation(특이적분 방정식), Stress Field(응력장), Grain Boundary Cavity(입계기공), Complex Integral(복소적분)

#### Abstract

The analytic solution of the stress field at creep crack in the presence of grain boundary cavitation is to be obtained by solving the governing equation which was derived through the previous paper. The complex integral technique is used to solve the singular integral equation, under the help of the information about stress behaviors at the ends of integral region known by numerical solution. The resultant stress distribution obtained shows the relaxed crack-tip singularity of  $r^{-1/2+\theta}$  due to the intervention of cavitation effect, otherwise, it should assumed to be  $r^{-1/2}$  singularity of linear elastic fracture mechanics with no cavitation.

응력관계 식으로 다음과 같다.

#### 1. 문제의 배경

본고에서는 전편<sup>(1)</sup>에서 유도된 입계기공의 확산 성장에 의해 성장하는 크리프균열 전방의 응력장에 관한 지배방정식을 풀기로 한다. 먼저 특별한 경우에 대해 수치해를 통하여 균열부근 손상역에서 응력장의 일반적 거동을 보고 특이적분 방정식의 해를 기초로 하여 일반해를 구한다. 지배방정식의 유도과정 및 그 배경은 전편에 상술되어 있으므로 생략한다. 풀어야 할 지배방정식은 해석적인 편의를 위해 일정 소결응력 조건에 대한( $\sigma_0 = \sigma_0 : \text{constant}$ )

$$\sigma(\xi) = \frac{K}{\sqrt{2\pi l \xi}} - \alpha \int_0^1 [\sigma(\xi') - \sigma_0] \sqrt{\frac{\xi'}{\xi} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi}} \quad (1)$$

여기서, 사용된 변수들의 정의는 전편과 동일하며 윗식에서 미지항은 응력장  $\sigma(\xi)$ , 손상역 길이  $l$ , 그리고 균열전진속도  $v$ 의 3개이므로 식 (1) 외 2개의 방정식이 더 필요한데 이들은 다음의 물리적 조건들로부터 얻을 수 있다. 기공생성조건으로부터 기공의 발생지점이 되는 손상역 끝에서의 응력은 기공생성 응력과 같으므로

\*회원, 삼성항공(주) 항공우주연구소

$$\sigma(\xi=1) = \sigma_0 \quad (2)$$

또 정상상태 균열진전조건으로부터<sup>(1)</sup>

$$\delta_c = \frac{2Dl}{v\lambda^2} \int_0^1 [\sigma(\xi) - \sigma_0] d\xi \quad (3)$$

## 2. 수치해법

### 2.1 수치해 알고리즘

식 (1)은 특이적분을 포함하는  $\sigma(\xi)$ 에 관한 선형적분 방정식의 형태이다.  $\sigma(\xi)$ 의 함수 꼴을 충분히 근사할 수 있도록 다수의 지점에서 일정값을 갖는 계단상의 함수(step function)로 가정하면 이 함수와 관련된 특이적분은 적분구간에 걸친 적분함수 값의 선형 합으로 표시되고 이를 연립하여 풀면 주어진 하중상태에 대해서 응력분포를 수치적으로 계산할 수가 있다.<sup>(2)</sup>

수치해를 위하여 식 (1)의 양변에  $\sqrt{\xi}$ 를 곱하고 정리하면

$$s = \frac{K}{\sqrt{2\pi l}} - a \int_0^1 [s' - \sigma_0 \sqrt{\xi'}] \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} \quad (4)$$

여기서,

$$s = \sqrt{\xi} \sigma(\xi), \quad s' = \sqrt{\xi'} \sigma(\xi')$$

적분구간  $L$  ( $0 < \xi < 1$ )을  $n$ 개의 작은 소구간으로 나누고 각각의 구간에 걸쳐서 응력은 일정하다고 하는 계단함수로 근사한다.  $i$ 번째 구간을 대표하는  $s$  함수의 값을  $s_i$ , 구간의 넓이를  $\Delta\xi_i$ 라 두고 식 (4)를 수치해의 형태로 표시하면

$$s_i + a \sum_{j \neq i}^n \frac{s_j \Delta\xi_j}{\xi_j - \xi_i} = \frac{K}{\sigma_0 \sqrt{2\pi l}} + a \sum_{j \neq i}^n \frac{\Delta\xi_j}{\xi_j - \xi_i} n \quad (5)$$

여기서,  $i=1, 2, \dots, n$

이때 주적분치(principal value of the integral) 계산을 위해서는 해당 소구간에서 적분인자가 전체 적분값에의 기여를 무시하는 방식을 택한다. ( $j \neq i$ ) 식 (5)는 미지함수  $s_i$ 에 관한 1원  $n$ 차 선형 연립방정식으로서, 이것을 행렬식으로 표시하면

$$[M]\{s\} = \{F\} \quad (6)$$

이 되고 각 행렬을 구성하는 원소들은 다음과 같다.

$$M_{ij} = 1 \text{ for } i=j, \quad \frac{a\Delta\xi_j}{\xi_j - \xi_i} \text{ for } i \neq j \quad (7)$$

$$F_i = 1 - \frac{K}{\sigma_0 \sqrt{2\pi l}} + a \sum_{j \neq i}^n \frac{\Delta\xi_j}{\xi_j - \xi_i} \quad (8)$$

경계조건 식 (2)의 수치해 표현은( $\xi=1$ )

$$\sigma_0 = \frac{K}{\sqrt{2\pi l}} - a \sum_{j=1}^n [s_j - \sigma_0 \sqrt{\xi_j}] \frac{\Delta\xi_j}{\xi_j - 1} \quad (9)$$

또 균열진전 조건 (3)식으로부터

$$v = \frac{2Dl}{\lambda^2 \delta_c} \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_0) \Delta\xi_j \quad (10)$$

을 얻는다. 2개의 경계조건 식 (9), (10)을 사용하여 식 (5)의 해를 수치적으로 구할 수 있다. 이때 식 (9), (10)에서  $l, v$ 은 복합된(coupled) 형태이므로 시행착오의 과정(iterative calculation)을 거쳐서 최종적으로 수렴하는 결과를 취해야 한다.

### 2.2 계산과정

수치적 방법에 따라 구하고자 하는 미지수의 초기값 중에서 각 구간에서의 응력값을 기공이 없는 경우의 선형파괴역학에 의한  $K$  응력장으로 가정하여 그때의  $l, v$ 를 계산하고 시행착오를 통해 수렴하는 값을 구한다. 이때 수치계산을 위한 재료의 물질특성들은  $a-Fe$ <sup>(3)</sup>의 것들을 사용하였고 수렴 특성이 가장 좋은 방식은 다음의 순서에 의할 때였다.

(1) 초기치

$$\text{put } l = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2, \quad \sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\xi_i}}$$

$$(2) v = \frac{2D}{\lambda^2 \delta_c} \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_0) \Delta\xi_j$$

(3) 계산 :  $M_{ij}, F_i$

이때,

$$l = \frac{A^2}{4} [1 + \sqrt{1 + 4B/A^2C}]^2$$

$$v = Cl$$

$$A = \frac{K}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}}$$

$$B = \frac{ED}{2\pi(1-\nu^2)\lambda^2 \sigma_0} \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_0) \sqrt{\xi_j} \frac{\Delta\xi_j}{\xi_j - 1}$$

$$C = \frac{2D}{\lambda^2 \xi_c} \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_0) \Delta\xi_j$$

(4) 해석 :  $[M]\{s\} = \{F\}$

(5) 계산 :  $\sigma_i = s_i / \sqrt{\xi_i}$

(6) 계산 :  $l, v$

(7) 비교 :  $|\Delta s_j / s_j|, |\Delta v / v|, |\Delta l / l| < \epsilon$

: 수렴할 때까지 (3) ~ (7) 과정을 반복.

## 2.2 수치해 결과검토

수치계산을 위하여 구간  $L$  ( $0 < \xi < 1$ )을 50개부터 100, 200, 400개로 늘려 가면서 최종수렴 값들로부터 구해지는 응력장의 거동을 비교해 볼 때 100개 이상의 구간을 채택할 경우 그 값의 변화량을 감지하기 어려웠다. 이것은 이후의 해석결과로부터 보건데 계산을 위해 치환한 변수  $s_i = \sqrt{\xi_i} \sigma_i$ 의 특성이  $\xi \rightarrow 0$ 로 접근할 경우 특이성을 보이지 않고 유한 값 0을 갖게 되므로써 주적분치의 수치계산도 매우 안정적이기 때문이다. 따라서 구간수 100개 이상이면 수치적분에 의한 결과가 실제값과 허용오차 이내에서 일치한다고 보고 여기서는 구간수를 200개로 통일하여 계산하였다.

수치적인 방법에 의해 구한 응력장의 모습은 Fig. 1과 같고 응력장의 특이도가 처음 탄성 응력장에 비해 약간 감소하는 경향을 보이고 있다. 구해진 커브로부터 최적화(best fit)를 통해 응력장 특이도를 계산해 본 결과 적분상수  $a$ 가 각각 0.04, 0.08일 때 특이도는 각각  $-0.465$ ,  $-0.427$ 이었다. 즉,  $a$ 값이 증가함에 따라 특이도는 처음의  $-1/2$ 로부터 감소하게 되는데 감소한 후의 특이도는 근사적으로  $-1/2 + a$  ( $a \ll 1$ )로 나타났다. 이후의 해석에서 정확히는  $a$ 는 매개변수  $\theta = \frac{1}{\pi} \tan a\pi$ 로 바뀌어야 함이 밝혀진다. 여기서, 특이도가  $-1/2 + a$ 인 것처럼 보이는 것은  $a$ 값이 매우 작은 경우에는  $a$ 와  $\theta$ 가 근사적으로 동일한 때문이다.

수치해석에서는 일부 좁은 영역 내에서만 하중변수  $K$ 에 대해 수렴특성을 얻을 수가 있었는데 하중

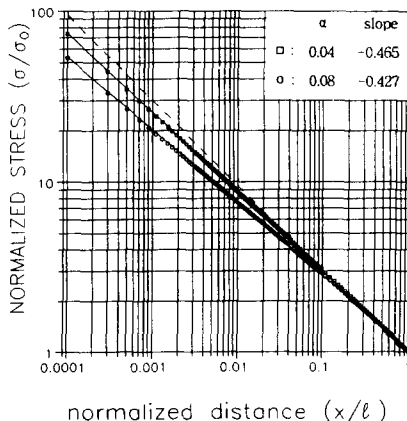


Fig. 1 Numerically obtained stress field in the presence of grain boundary cavitation

변수  $K$ 의 값이 작아질수록 수렴특성을 저해하는 것으로 나타났다. 해석해의 결과를 놓고 볼때 초기 계산을 위해 가정된 선형응력장과 실제값과의 차이는 응력장 특이도를 변화시키는  $a$ 값에 의해 결정되므로  $K$ 가 감소할 경우 수렴특성이 저해받는 현상은 설명될 수 있다. 왜냐하면 하중  $K$ 가 작아질수록 균열속도  $v$ 도 감소하고 결과적으로 적분상수  $a$  (또는  $\theta$ )가 증가하여 응력장이 심하게 변하기 때문이다.

## 3. 특이적분 방정식을 이용한 해석

### 3.1 Fredholm 형태 특이적분 방정식

수치해의 결과로부터 손상역 양쪽 끝단(즉, 특이적분 구간  $L$ 의 양단)에서의 응력장 거동에 관계론적인 정보를 얻을 수 있다. 이를 기초로 해석적인 해를 구하기로 한다. 식 (1)의 양변에  $\sqrt{\xi}$ 를 곱하고 다시 정리하면

$$\begin{aligned} & \sqrt{\xi}[\sigma(\xi) - \sigma_0] + a \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi'}[\sigma(\xi') - \sigma_0] d\xi'}{\xi' - \xi} \\ & = \frac{K}{\sqrt{2\pi l}} - \sqrt{\xi}\sigma_0 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 형태상 소결응력  $\sigma_0$ 이  $\sigma(\xi)$ 와 비선형 상관관계를 갖지 않는 일정상수이므로 선형 특이적분 방정식의 하나인 Fredholm의 제2종 특이적분 방정식과 동일한 형태이다.<sup>(4,5)</sup> 즉,

$$A(\xi)\phi(\xi) - \frac{B(\xi)}{\pi i} \int_L \frac{\phi(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi' = f(\xi) \quad (12)$$

여기서,

$$\phi(\xi) = \sqrt{\xi}[\sigma(\xi) - \sigma_0] \quad (13)$$

$$A(\xi) = 1, \quad B(\xi) = -a\pi i \quad (14)$$

$$f(\xi) = \frac{K}{\sqrt{2\pi l}} - \sigma_0\sqrt{\xi} \quad (15)$$

여기서,  $L$ 은  $0 < \xi < 1$ 인 선적분의 적분구간,  $\xi$ 는 균열첨단으로부터의 거리  $x$ 를 기공생성 영역 크기  $l$ 로 표준화한 값에 해당한다. 식 (12)는 일정한 조건을 만족하는 경우에 한해 유일 해가 반드시 존재한다. 여기서는 Muskhelishvili<sup>(5,6)</sup>의 복소함수를 이용한 해법을 따르기로 한다.

### 3.2 복소함수법을 이용한 특이적분 방정식 해석

식 (12)를 풀기 위하여 복소함수  $z$ 에 관한

Cauchy 형태 적분  $\Phi(z)$ 를 다음과 같이 정의하면

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-z} \quad (16)$$

식 (13)에서 응력장은 연속체 역학의 특성상 균열전방 기공생성 영역(L)내에서는 연속이고 미분 가능하므로 함수  $\phi$  역시 동일한 특성을 가진다. 즉,  $\phi$ 는 L의 양 끝단을 제외한 L상에서 Hölder 조건을 만족한다. 즉,

$$|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \leq A|t_2 - t_1|^\mu$$

여기서,

$$0 < \mu \leq 1, A : \text{양의 상수}$$

또, 식 (16)에서 적분구간은 유한하므로

$$\Phi(\infty) = 0 \text{ as } z \rightarrow \infty \quad (17)$$

따라서  $\Phi(z)$ 는 적분구간 L을 제외한 모든 영역에서 해석적인(holomorphic) 함수이다. Plemelj 공식에 의하면 L 상의 점  $t_0$ 에 대하여

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \phi(t_0) \quad (18)$$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-t_0} \quad (19)$$

이때 함수  $\Phi^+(t_0)$ ,  $\Phi^-(t_0)$ 의 상첨자 +/-는 각각 복소평면에서 적분구간 L의 좌/우로부터  $t_0$ 로 접근할 때, 해당 함수값  $\Phi(z)$ 을 나타낸다. 식 (18), (19)를 식 (12)에 적용하면 다음과 같이 Hilbert문제와 동일한 형태로 변환된다.

$$\Phi^+(t_0) = G(t_0) \Phi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0) - B(t_0)} \quad (20)$$

여기서,

$$G(t_0) = \frac{A(t_0) + B(t_0)}{A(t_0) - B(t_0)} = \frac{1 - \alpha \pi i}{1 + \alpha \pi i} \quad (21)$$

해석의 과정상 동차해의 형태를 결정하기 위해 L의 양단에서 적분인자  $\phi(t)$ 의 거동을 개념적으로 판단해 보면, 균열첨단 부근에서는(as  $t_0 \rightarrow 0$ ) 크립 기공에 의하여 초기의 K-응력장이 이완되므로 응력장 특이도는  $r^{-1/2}$  이하가 될 것이다. L의 다른 한쪽 끝(as  $t_0 \rightarrow 1$ )에서는 기공생성을 위한 물리적조건, 식 (2)로부터  $\sigma(t_0) \rightarrow \sigma_0$ 가 된다. 이것은 앞장의 수치해 결과와도 일치하고 있다. 이러한 응력장의 거동특성으로부터 식 (13)으로 표시되는 미지함수  $\phi(t)$ 는 적분구간 L의 양끝단 모두에서 0에 이르게 됨을 알 수 있다. 즉, 수학적으로 특이

도가 존재하지 않는 유한값(bounded)을 갖는다. 따라서 식 (20)의 동차해(homogeneous solution)는 다음의 형태가 되어야 한다.

$$X(z) = z^\theta (z-1)^{1-\theta} \quad (22)$$

$$\theta = 1 - \frac{\ln[G(t_0)]}{2\pi i} = \frac{\tan^{-1}(\alpha \pi)}{\pi} \quad (23)$$

또 Fig. 2에서 보듯이  $z=0$ ,  $z=1$ 사이를 잇는 분기선(branch cut)을 취하면

$$X^\pm(t_0) = t_0^\theta (1-t_0)^{1-\theta} e^{\pm i\pi(1-\theta)} \quad (24)$$

여기서,  $\theta$ 는 균열성장속도와 재료상수로부터 결정되는 매개변수로서 0과 1/2 사이의 값을 갖는 것을 알 수 있다.  $\theta$ 는 후에 균열첨단에서의 응력 특이도를 이완시키는 매개변수의 역할을 하게 됨이 밝혀진다.

동차해의 정의로부터

$$X^+(t_0) = G(t_0) X^-(t_0) \quad (25)$$

$$G(t_0) = \frac{X^+(t_0)}{X^-(t_0)} \quad (26)$$

식 (26)을 식 (20)에 대입하고 정리하면

$$\Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0) = \frac{f(t_0)}{[A(t_0) - B(t_0)] X^+(t_0)} \quad (27)$$

여기서,

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z)}{X(z)} \quad (28)$$

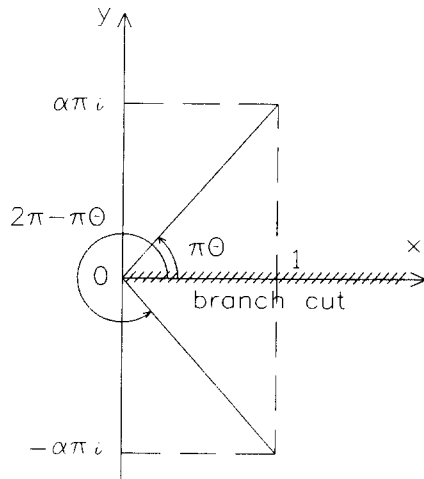


Fig. 2 Mathematical representation of the definition of  $\theta$  from the argument of  $\ln[G(t_0)]$  with the properly taken branch cut

식 (27)은 Plemelj 공식의 한 형태이므로 임의의 복소평면에서 복소함수  $\Psi(z)$ 의 값은 다음과 같이 구해진다.

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{[A(t) - B(t)]X^+(t)(t-z)} + P(z) \quad (29)$$

여기서,

$P(z)$  : 임의의 복소 다항식

3.3 유일해 및 그 존재조건

식 (29)가 (16)의 조건을 만족하기 위해서는 오른쪽 각각의 항이 모두 무한대에서 0이 되어야 하므로 다음 조건이 필요하다.

$$P(z) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{[A(t) - B(t)]X^+(t)(t-z)} = 0 \quad (31)$$

as  $z \rightarrow \infty$

매우 큰  $|z|$ 에 대한 Taylor 급수전개에 의하면

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z} - \frac{t}{z^2} - \frac{t^2}{z^3} \dots \quad (32)$$

가 되므로, 마찬가지로 매우 큰  $|z|$ 에 대해서 식 (31)은

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{[A(t) - B(t)]X^+(t)(t-z)} - \frac{A_1}{z} - \frac{A_2}{z^2} - \frac{A_3}{z^3} \dots \quad (33)$$

여기서,

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^{k-1} f(t) dt}{[A(t) - B(t)]X^+(t)} \quad (34)$$

$k=1, 2, \dots$

식 (22)의  $X(z)$ 는  $z$ 에 관한 1차 복소함수이므로 (34)에서 한개의 항만을 ( $k=1$  i. e.  $A_1=0$ ) 필요로 한다. 식 (22), (31), (33)으로부터 Hilbert 문제의 유일해가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{[A(t) - B(t)]X^+(t)} = 0 \quad (35)$$

따라서  $\Phi(\infty)=0$ 를 만족하는 복소함수 해는 식 (28), (29)로부터

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{[A(t) - B(t)]X^+(t)(t-z)} \quad (36)$$

특이적분의 밀도함수(density function)  $\phi(t)$ 를 Plemelj 공식 식 (18)을 사용하여 구하면

$$\phi(t_0) = \frac{1}{1 + \alpha^2 \pi^2} f(t_0) - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 \pi^2} t_0^\theta (1-t_0)^{1-\theta} \times \int_L \frac{t^{-\theta} (1-t)^{-1+\theta} f(t) dt}{t-t_0} \quad (37)$$

식 (37)에 식 (15)를 대입하고 (부록 A)의 과정을 따라 특이적분의 주적분치를 구하면 식 (37)은 다음과 같이 구해진다.

$$\phi(t_0) = \frac{\alpha \sigma_0 \Gamma(\theta) \Gamma(1/2 - \theta)}{\sqrt{\pi} (1 + \alpha^2 \pi^2)} t_0^\theta \quad (38)$$

\*  ${}_2F_1(\theta, \theta-1/2; \theta+1/2; t_0) - \sigma_0 \sqrt{t_0}$

Hypergeometric 함수의 특성<sup>(7)</sup>

$${}_2F_1(a, b, c; 0) = 1$$

$${}_2F_1(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}$$

을 이용하면 식 (38)에서  $L$ 의 양단  $\xi=0$  및  $\xi=1$ 에서  $\phi(\xi)=0$ 가 되므로 식 (22)의 동차해를 갖기 위한 전제조건들(bounded near at both ends of  $L$ )을 모두 만족함을 알 수 있다. 따라서 식 (38)은 식 (11)의 유일해이다.

4. 균열전방의 응력장과 손상역 변화

밀도함수  $\phi(t)$ 의 정의 식 (13)으로부터 응력장은

$$\sigma(\xi) = \sigma_0 + \sqrt{\xi} \phi(\xi) \quad (39)$$

식 (38), (39)로부터 기공크기에 무관한 소결응력조건에서의 응력장을 다음과 같이 얻는다.

$$\sigma(\xi) = \frac{\sqrt{\pi \sigma_0}}{\Gamma(1-\theta) \Gamma(1/2+\theta)} \xi^{-1/2+\theta} \quad (40)$$

\*  ${}_2F_1(\theta, \theta-1/2; \theta+1/2; \xi)$

여기서, 하중변수  $K$ 는 기공생성 영역의 길이  $l$ , 균열성장속도  $v$ 의 값에 기여하므로 응력장을 결정하게 된다.  $L$ 의 양단  $\xi=0$  및  $\xi=1$  부근에서의 응력장은

$$\xi(\xi, \xi \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{\pi \sigma_0}}{\Gamma(1-\theta) \Gamma(1/2+\theta)} \xi^{-1/2+\theta} \quad (41)$$

$$\sigma(\xi, \xi \rightarrow 1) = \sigma_0 \quad (42)$$

식 (40)에서  $\theta=1/2$ 인 경우에는  ${}_2F_1=1$ 이므로

$$\sigma(\xi) = \sigma_0 \text{ for } 0 < \xi < 1 \quad (43)$$

즉, 응력장의 특이도가 완전히 소멸되고 기공이 존재하는 전 영역에 걸쳐서 응력값의 크기는 소결 응력 수준으로 완전히 이완되게 된다.

또 유일해 존재조건, 식 (35)를 정리하면

$$\int_L \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi t}} - \sigma_0 \sqrt{t} \right) t^{-\theta} (1-t)^{-1+\theta} dt = 0 \quad (44)$$

식 (44)의 해로부터 기공생성 영역의 실제크기  $l$ 을 구하면

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\Gamma(1-\theta)}{\Gamma(3/2-\theta)} \right]^2 \quad (45)$$

여기서

$$l_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \quad (46)$$

여기서,  $l_0$ 는 기공이 없는 경우 K-응력장에 의한 응력 값이 기공생성 응력  $\sigma_0$ 가 되는 지점까지의 거리에 해당한다.

### 5. 결 론

입계기공의 확산성장에 의한 크립균열전파 해석에서 유도된 응력장에 관한 특이적분 방정식을 복소함수법을 이용하여 해석한 결과 새로운 응력장 특이도를 갖는 균열전파 응력분포와 그때의 손상역 크기를 해석적으로 구하였다.

### 참고문헌

- (1) 전재영, 1996, "입계기공의 확산성장 모델을 이용한 고온 기기의 크립균열전파 해석(1), -응력장 및 균열전파속도에 미치는 입계기공의 영향-", 대한기계학회논문집, 제20권, 제4호, pp. 1177~1185.
- (2) Trocomi, F. G., 1985, *Integral Equations*, Dover Publ. Inc., NY.
- (3) Frost, H. J. and Ashby, M. F., 1982, *Deformation Mechanism Maps*, Pergamon Press, NY.
- (4) Carrier, C. F., Krook, M. and Pearson, C. E., 1977, *Functions of a Complex Variable*, McGraw-Hill, p. 408.
- (5) Muskhelishvili, N. I., 1977, *Singular Integral Equations*, Trans. by J. R. M. Radok, Noordhoff Int. Publ., Leyden, The Netherlands.

- (6) Muskhelishvili, N. I., 1977, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Trans. by J. R. M. Radok, Noordhoff Int. Publ., Leyden, The Netherlands.
- (7) Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., 1963, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, NY, p. 1039.

### 부 록 A

#### 특이적분의 주적분치 계산

식 (37)에 식 (15)의  $f(t)$  함수를 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \phi(t_0) = & \frac{1}{1+\alpha^2\pi^2} \frac{K}{\sqrt{2\pi t}} [1 - \alpha t_0^\theta (1-t_0)^{1-\theta} Q_1(t_0)] \\ & - \frac{\sigma_0 \sqrt{t_0}}{1+\alpha^2\pi^2} [1 - \alpha t_0^{\theta-1/2} (1-t_0)^{1-\theta} Q_2(t_0)] \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} Q_1(t_0) &= \int_0^1 \frac{t^{-\theta} (1-t)^{\theta-1} dt}{t-t_0} \\ Q_2(t_0) &= \int_0^1 \frac{t^{1/2-\theta} (1-t)^{\theta-1} dt}{t-t_0} \end{aligned}$$

$Q_1(t_0), Q_2(t_0)$ 는 특별한 경로에 대한 제적(contour) 적분으로부터 잔여값 이론(residue theorem)을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{A1. } Q_1(t_0) &= \int_0^1 \frac{t^{-\theta} (1-t)^{\theta-1} dt}{t-t_0} \\ & \quad (0 < \theta < 1/2, 0 < t_0 < 1) \\ \text{put, } G_1(z) &= z^{-\theta} (z-1)^{\theta-1} \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

$G_1(z)$ 는  $L: 0$ 과  $1$ 사이를 잇는 분기선 상의 지점들을 제외한 전 영역에서 유일값 및 미분가능(holomorphic) 함수이므로

$$G_1^+(t_0) = t_0^{-\theta} (1-t_0)^{\theta-1} e^{\pm\pi(\theta-1)} \quad (\text{A2})$$

$$G_1^+(t_0) - G_1^-(t_0) = t_0^{-\theta} (1-t_0)^{\theta-1} [2i \sin\pi\theta] \quad (\text{A3})$$

$$G_1^+(t_0) + G_1^-(t_0) = t_0^{-\theta} (1-t_0)^{\theta-1} [-2\cos\pi\theta] \quad (\text{A4})$$

Plemelj 공식에 의해  $L$ 상의 점  $t_0$ 에 대해

$$G_1^+(t_0) - G_1^-(t_0) = g(t_0) \quad (\text{A5})$$

$$G^+(t_0) + G^-(t_0) = \int_0^1 \frac{g(t) dt}{t-t_0} \quad (\text{A6})$$

(A3), (A5)의 등관계로부터

$$g(t_0) = t_0^{-\theta}(1-t_0)^{\theta-1}[2i \sin \pi \theta] \quad (A7)$$

(A4), (A6), (A7)로부터

$$Q_1(t_0) = \pi t_0^{-\theta}(1-t_0)^{\theta-1} \cot \pi \theta \quad (A8)$$

식 (23)을 적용하여 다시 정리하면

$$Q_1(t_0) = \frac{1}{\alpha} t^{-\theta}(1-t_0)^{\theta-1} \quad (A9)$$

A2.  $Q_2(t_0) = \int_0^1 \frac{t^{1/2-\theta}(1-t)^{\theta-1} dt}{t-t_0}$   
 $(0 < \theta < 1/2, 0 < t_0 < 1)$

put,  $G_2(z) = z^{1/2-\theta}(z-1)^{\theta-1}$

$G_2(z)$ 는  $L: 0-1$ 을 잇는 분기선을 갖고  $z=1-\infty$ 에서 상하 평면이 교차(crossing)하는 2장으로 이루어진 Riemann 표면에 존재하는 함수이므로 Fig. A1과 같이 특별한 적분경로(C)를 취하고 복소함수 적분에 있어서의 잔여값 정리(residue theorem)를 이용하여 주적분치(principal value)를 구한다. 적분경로 C내에 1차 특이성(1st order singularity)을 갖는 지점은 존재하지 않으므로

$$I(z) = \int_c \frac{G_2(t) dt}{t-z} = 0 \quad (A10)$$

여기서

$$C = \Gamma_0 + L_1 + \Gamma_{t_0}^+ + L_2 + \Gamma_1^+ + L_{\infty}^+ + \Gamma_{\infty}^+ + \Gamma_1^- + L_3 + \Gamma_{t_0}^- + L_4$$

Fig. A1에서 분기선을 제외한 전 영역에서 유일값 조건을 만족하는 일반적인 1장 Riemann 표면에 존재하는 복소함수의 경우 적분경로  $L_{\infty}^+$  및  $L_{\infty}^-$ 에 대한 적분 값이 서로 상쇄되게 되나 지금은 그렇지 않다. 왜냐하면 특이적분의 밀도함수  $G_2(z)$ 가 Fig.

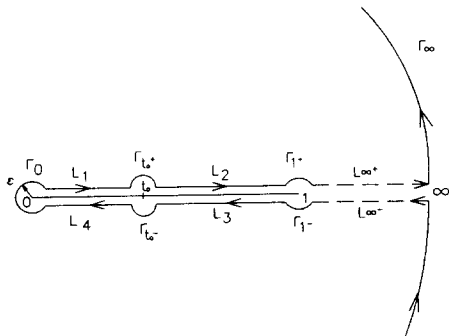


Fig. A1 Specific integration path used for calculating the singular integral by residue theorem

A2에서 보듯이 2장으로 이루어지는 Riemann 표면에 걸쳐서 존재하는  $L_{\infty}^+$ 와  $L_{\infty}^-$ 는 서로 다른 가상의 평면 위에 놓여있는 궤적이다. 따라서  $L_{\infty}^+$ 를 지나는  $G_2(z)$ 와  $L_{\infty}^-$ 를 지나는  $G_2(z)$  사이에는  $4\pi$ 에 해당하는 편각차가 발생한다. 폐궤적을 이루는 적분경로 C를 (A10)의 각 구간별로 나누어 각각의 구간에서의 적분값을 구하여 종합하면  $I(z)$ 와 같아지므로

$$I_1 = \int_{L_1+L_2+L_3+L_4} \frac{G_2(t) dt}{t-t_0} = -2 \cos(\pi \theta) Q_2(t_0) \quad (A11)$$

$$I_2 = \int_{L_{\infty}^+ + L_{\infty}^-} \frac{G_2(t) dt}{t-t_0} = 2 \int_1^{\infty} \frac{t^{1/2}(t-1)^{\theta-1} dt}{t-t_0} \quad (A12)$$

$$I_3 = \int_{\Gamma_{t_0}^+ + \Gamma_{t_0}^-} \frac{G_2(t) dt}{t-t_0} = -2\pi \sin(\pi \theta) t_0^{1/2-\theta}(1-t_0)^{\theta-1} \quad (A13)$$

$$\int_{\Gamma_0} = \int_{\Gamma_1^+} = \int_{\Gamma_1^-} = \int_{\Gamma_{t_0}^+} = \int_{\Gamma_{t_0}^-} = \int_{\Gamma_{\infty}^+} \frac{G_2(t) dt}{t-t_0} = 0 \quad (A14)$$

$$I(z) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (A15)$$

이때 (A12)에서 적분경로의 궤적반경  $R \rightarrow \infty$ 인  $\int_{\Gamma_{\infty}^+}$ 의 경우에 그 값이 0이 되는 것은 적분인자  $G_2(t)$ 의 거동이  $G_2(\theta) = -G_2(\theta+2\pi)$ 이므로 각도 0부터  $4\pi$ 까지 적분할 경우에는 경우  $\Gamma_{\infty}$ 를 통한 전체 적분값이 완전히 상쇄되어 그 값이 0가 되기 때문이다. 식 (A15)의 관계로부터

$$Q_2(t_0) = -\pi \tan(\pi \theta) t_0^{1/2-\theta}(1-t_0)^{\theta-1} + \frac{Q_2'(t_0)}{\cos(\pi \theta)} \quad (A16)$$

여기서,

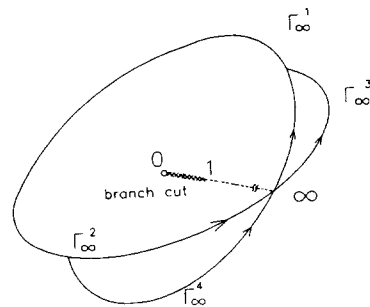


Fig. A2 Schematics of Riemann surface composed of 2 sheets

$$Q_2'(t_0) = \int_1^\infty \frac{t^{1/2-\theta}(t-1)^{\theta-1} dt}{t-t_0} \quad (A17)$$

put  $s = \frac{t-1}{t}, t = \frac{1}{1-s}, dt = \frac{ds}{(1-s)^2}$

$$\begin{aligned} Q_2'(t_0) &= \frac{1}{1-t_0} \int_0^1 s^{\theta-1} (1-s)^{-1/2} \left(1 - \frac{t_0}{t_0-1} s\right)^{-1} ds \\ &= \frac{1}{1-t_0} B(\theta, 1/2)_2 \\ &\quad \times F_1\left(1, \theta, \theta+1/2; \frac{t_0}{t_0-1}\right) \end{aligned}$$

(A18)

여기서,  $B$ 는 Beta 함수,  ${}_2F_1$ 은 hypergeometric 함수를 뜻한다. (A18)을 (A16)에 대입하고 Gamma 함수( $\Gamma$ )와의 관계를 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} Q_2(t_0) &= -\pi \tan(\pi\theta) t_0^{1/2-\theta} (1-t_0)^{\theta-1} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2-\theta) \Gamma(\theta) (1-t_0)^{\theta-1} \\ &\quad \times {}_2F_1(\theta, \theta-1/2; \theta+1/2; t_0) \quad (A19) \end{aligned}$$