

〈논 문〉

벨트 구동계의 비선형 진동특성 해석 제목

김성걸* · 이신영** · 이장무***

(1994년 9월 25일 접수)

Analysis on the Nonlinear Vibration Characteristics of a Belt Driven System

S. G. Kim, S. Y. Lee and J. M. Lee

Key Words : Belt Driven System(벨트 구동계), Free Vibration(자유진동), Forced Vibration(강제진동), Perturbation Method(섭동법), Galerkin Method(Galerkin 방법), Hamilton's Principle(해밀턴 원리)

Abstract

In this paper, a mathematical model for a belt driven system is proposed to analyse the vibration characteristics of the driving units with belts and the free and forced vibration analyses are carried out. The mathematical model for a belt-driven system includes belts, pulleys, spindle and bearings. By using Hamilton's principle, four nonlinear governing equations and twelve nonlinear boundary conditions are derived. To linearize and discretize the nonlinear governing equations and boundary conditions, the perturbation method and Galerkin method are used. Also, the free vibration analyses for various parameters of a belt driven system, which are the tension of a belt, the length of a belt, the material properties of belts, the velocity of a belt and the mass of pulley are made. The forced vibration analyses of the system are performed and the dynamic responses for main parameters are analysed with a belt driven system.

1. 서 론

기존의 벨트에 대한 연구^(1~7) 대부분이 자유진동 해석에 의한 고유진동수와 고유모드 형상 도출에만 국한하였고, 또한 벨트 자체의 진동에만 관심을 갖고 있었으며, 1980년대에 처음으로 Mote^(8,9)에 의해 벨트 양단의 경계조건을 1차원으로 고려한 연구 결과가 발표되었으나, 강제진동에 대한 진동해석은 아직 발표되지 않았다. 실제 벨트 구동계에서는, 벨트는 풀리에 의해 지지되고, 풀리는 구동축과 종동축에 의해 지지되며, 이 축들은 베어링에 의해

본체와 지지된다. 그러므로 본 논문에서는 Mote⁽⁸⁾에서 제시된 1차원 경계조건을 실제 경우에 적합하게 2차원으로 확장해서 벨트를 통한 진동전달 특성과 축계의 강제진동에 대한 해석을 수행하고, 벨트 동력전달 시스템을 구성하고 있는 벨트, 베어링, 풀리 등에 대한 수학적 모델방법을 제시하여 실제 벨트로 구동되는 벨트 동력전달 시스템의 자유진동 해석과 강제진동해석을 수행하고자 한다.

위에서 제시한 내용을 구체적으로 정리하면 다음과 같다. 첫째, 벨트 구동계의 수학적 2차원 모델을 제시하고, 해밀턴의 원리⁽¹⁰⁾를 적용하여, 계의 비선형 운동방정식을 유도한다. 둘째, 수치해석 프로그램을 작성하고, 계의 자유진동해석을 수행하여, 벨트 구동계의 고유진동수와 고유모드를 구한다. 셋째, 계의 강제진동해석을 수행하여 주요 파

*서울대학교 정밀기계설계연구소

**회원, 군산대학교 생산기계공학과

***회원, 서울대학교 기계설계학과

라메티들에 대한 동적응답을 구하고, 주요 파라메터의 동특성에 미치는 영향을 고찰한다.

2. 벨트 구동계의 이론 해석

2.1 벨트 구동계의 모델링

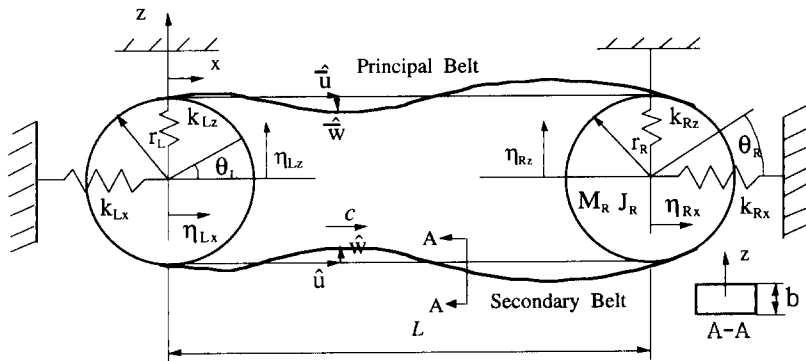
2.2 비선형 운동방정식

평면 운동하는 벨트와 회전하는 풀리로 구성된 계의 해석을 위해, Fig. 1과 같은 수학적 모델을 구성하였다. 본 논문에서는, 풀리의 지지를 고려하기 위하여 벨트의 길이방향(x 방향)으로만 2개의 선형 스프링을 사용한 Mote⁽⁸⁾의 해석모델을 확장하여, 중력방향(z 방향)으로 2개의 선형 스프링을 추가하여 모델링하였다. 이는 실제 사용되는 벨트 구동계의 수학적 모델링을 하기 위해서, 벨트의 운동을 x, z 방향으로 2차원 모델링하는 것처럼, 풀리는 구동축과 종동축에 의해 지지되며, 이 축들은 베어링에 의해 본체와 지지되므로, 풀리의 운동도 x, z 방향으로 2차원 모델링을 해야 한다. 풀리의 x 방향의 지지부 등가강성은 벨트 장력의 변화에 의해 결정되며, 풀리의 z 방향의 지지부 등가강성은 풀리의 질량과 구동축 및 종동축의 질량 그리고

지지 조건에 의해 결정된다. 여기서 풀리의 지지부 강성은 베어링의 비선형 특성⁽¹³⁾을 고려하여 결정되어야 한다. 또한, 풀리는 회전운동도 하므로 회전과 병진운동(x, z 방향)을 동시에 하고, 양단에 존재하는 집중질량으로 모델링하였다. 벨트의 운동은 풀리와 접촉하는 상하 양단에서 회전운동만 존재하고 병진운동은 없도록 모델링하였다. 구성된 모델을 해석하기 위해 다음과 같이 가정하였다. 첫째, 벨트는 양쪽 풀리에 핀(pin) 고정되어 있다. 둘째, 2개의 벨트는 균일한 탄성 영역의 오일러-베르누이 보로 한다. 셋째, 풀리는 x, z 방향의 선형 스프링으로 연결되어 있다. 넷째, 모든 값들은 일정한 장력과 속력하에서 구해진다. 다섯째, 풀리와 벨트 사이에는 미끄럼이 없다. 여섯째, 모든 운동은 평면으로 구속된다. 일곱째, x 방향의 변위량이 z 방향의 변위량 보다 작다. 여덟째, 모든 변수는 x 와 t 만의 함수이다. 아홉째, 벨트의 이송속도를 c 라고 할 때, 장력 R 과 초기 장력 R_0 와의 관계는 식 (1)과 같다.

$$R = R_0 + mc^2[1 + \hat{k}L / (2EA)] \quad (1)$$

운동방정식을 유도하기 위해 해밀톤 원리(Hamilton's principle)를 사용하였으며, Fig. 1에서, 윗쪽



- | | | | |
|----------|--|----------------------|-------------------------------------|
| E | : Young's modulus | \bar{u}, \bar{u} | : Longitudinal disp. of belts |
| A | : Cross sectional area of belt | \bar{w}, \bar{w} | : Transverse disp. of belts |
| I | : Second moment of area of belt | θ_L, θ_R | : Rotational disp. of pulleys |
| R_0 | : Initial static axial tension of belt | η_L, η_R | : x, y direction disp. of pulleys |
| R | : Initial axial tension of belt at speed c | r_L, r_R | : Radius of pulleys |
| c | : Initial axial speed of belt | M_L, M_R | : Mass of pulleys |
| m | : Mass per unit length of belt | J_L, J_R | : Rotational inertia of pulleys |
| b | : Thickness of belt | k_L, k_R | : Support stiffness |
| L | : Length of belts | f_j | : The j -th natural frequency |
| F_{eq} | : Unbalanced load of motor | | |

Fig. 1 Theoretical model of a belt driven system

벨트 부분의 변형률-변위 관계는 여섯번째와 일곱번째 가정에 의해 비선형 식으로 표현할 수 있다.

$$\epsilon_{xx} = \hat{u}_{,x} + \frac{\hat{w}^2}{2} + \frac{R}{EA} - z\hat{w}_{,xx} \quad (2)$$

벨트에 미소진동이 발생할 때, 벨트의 진동응답은 선형 방정식과 경계조건 식으로 정확하게 기술이 가능하나, 벨트의 진동진폭이 증가할수록 비선형 효과가 증대된다. 식 (2)을 이용하여 윗 벨트의 스트레인 에너지를 구하면 식 (3)이 된다.

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \epsilon_{xx}^2 dA dx \quad (3)$$

여덟째 가정을 이용하여 식 (2)를 식 (3)에 대입하여 정리하면 식 (4)를 구할 수 있다.

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EA \hat{u}_{,x}^2 + EA \hat{u}_{,x} \hat{w}_{,x}^2 + \frac{EA \hat{w}_{,x}^4}{4} + \frac{R^2}{EA} + EI \hat{w}_{,xx}^2 + 2R \hat{u}_{,x} + R \hat{w}_{,x}^2 \right) dx \quad (4)$$

식 (4)를 이용하여 아래쪽 벨트의 스트레인 에너지를 구하면 식 (5)가 된다.

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EA \hat{u}_{,x}^2 + EA \hat{u}_{,x} \hat{w}_{,x}^2 + \frac{EA \hat{w}_{,x}^4}{4} + \frac{R^2}{EA} + EI \hat{w}_{,xx}^2 + 2R \hat{u}_{,x} + R \hat{w}_{,x}^2 \right) dx \quad (5)$$

폴리의 지지 강성에 저장되는 위치 에너지를 계산하면, 식 (6)으로 표현된다.

$$U_3 = \frac{1}{2} k_{Lx} \left(\eta_{Lx} + \frac{2R}{k_{Lx}} \right)^2 + \frac{1}{2} k_{Rx} \left(\eta_{Lx} - \frac{2R}{k_{Rx}} \right)^2 + \frac{1}{2} k_{Lz} \eta_{Lz}^2 + \frac{1}{2} k_{Rz} \eta_{Rz}^2 \quad (6)$$

그러므로, 벨트 구동계의 총 위치에너지는 (7)식과 같다.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (7)$$

평면운동으로 가정한 벨트 구동계의 운동에너지는 식 (8)과 같이 유도된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left[\left(c + \frac{d\hat{u}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{w}}{dt} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L m \left[\left(-c + \frac{d\hat{u}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{w}}{dt} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \hat{J}_L \left(\frac{d\theta_L}{dt} + \frac{c}{r_L} \right)^2 + \frac{1}{2} \hat{J}_R \left(\frac{d\theta_R}{dt} + \frac{c}{r_R} \right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \hat{M}_L \left(\frac{d\eta_{Lx}^2}{dt} + \frac{d\eta_{Lz}^2}{dt} \right) + \frac{1}{2} \hat{M}_R \left(\frac{d\eta_{Lx}^2}{dt} + \frac{d\eta_{Lz}^2}{dt} \right) \quad (8)$$

식 (8)에서, 첫번째, 두번째 항은 벨트의 운동 에너지를 나타내고, 나머지 항들은 폴리의 회전, 병진에너지를 나타낸다. 벨트 구동계에 저장되는 일은, 모터부의 동적 하중에 의해 발생하는 일과 벨트의 양단에 작용하는 일정 모멘트 $\hat{M}\hat{M}_R$, $\hat{M}\hat{M}_L$ 에 의해 발생하는 일의 합으로 표현되며, 식 (9)와 같다.

$$W = f_x \cdot \eta_{Lx} + f_z \cdot \eta_{Lz} + \hat{M}\hat{M}_R \cdot \hat{w}_{,x}(L, t) - \hat{M}\hat{M}_L \cdot \hat{w}_{,x}(0, t) - \hat{M}\hat{M}_R \cdot \hat{w}_{,x}(L, t) + \hat{M}\hat{M}_L \cdot \hat{w}_{,x}(0, t) \quad (9)$$

폴리와 폴리의 지지강성에 의한 위치에너지를 계산하기 위해서는, 폴리의 회전과 병진운동에 대한 벨트 양단에서의 기구학적 적합성 (compatibility) 조건을 구성해야 한다. 식 (10)은 폴리의 회전과 병진운동에 대한 기구학적 적합성을 나타낸다.

$$\begin{aligned} \theta_L(t) &= \frac{\hat{u}(0, t) - \hat{u}(0, t)}{2r_L} \\ \theta_R(t) &= \frac{\hat{u}(L, t) - \hat{u}(L, t)}{2r_R} \\ \eta_{Lx}(t) &= \frac{\hat{u}(0, t) - \hat{u}(0, t)}{2} \\ \eta_{Rx} &= \frac{\hat{u}(L, t) + \hat{u}(L, t)}{2} \\ \eta_{Lz}(t) &= \frac{\hat{w}(0, t) + \hat{w}(0, t)}{2} \\ \eta_{Rz} &= \frac{\hat{w}(L, t) + \hat{w}(L, t)}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

해밀톤 원리로부터 지금까지 유도한 식들을 조합하여 기술하면 식 (11)를 유도할 수 있다.

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt \quad (11)$$

식 (11) 중, 처음 네개의 항은 오일러 방정식을 나타내고, 나머지 항들은 $x=0$, $x=L$ 에서의 경계조건 식을 나타낸다. 다음 과정으로는 식 (11)에서 제시된 지배방정식과 경계조건 식을 무차원화한다. 모든 변수들을 무차원 변수로 바꾸고, 무차원 지배방정식과 경계조건 식을 유도하면, 4개의 지배방정식 (12)~(15)과 12개의 경계조건 식 (16)~(25)가 된다.

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau > 0$$

$$\ddot{u} + 2s\dot{u}' - \Phi u'' - \gamma w'' w' = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{\bar{u}} - 2s\dot{\bar{u}}' - \Phi \bar{u}'' - \gamma \bar{w}'' \bar{w}' = 0 \tag{13}$$

$$\ddot{w} + 2s\dot{w}' - \Psi w'' + w'''' - \gamma (u'' w' + u' w'') - 1.5\alpha w'^2 w'' = 0 \tag{14}$$

$$\ddot{\bar{w}} - 2s\dot{\bar{w}}' - \Psi \bar{w}'' + \bar{w}'''' - \gamma (\bar{u}'' \bar{w}' + \bar{u}' \bar{w}'') - 1.5\alpha \bar{w}'^2 \bar{w}'' = 0 \tag{15}$$

$$\frac{J_L}{2\rho_L} (\ddot{\bar{u}}(0, \tau) - \ddot{\bar{u}}(0, \tau)) - \beta(u'(0, \tau) - \bar{u}'(0, \tau)) - \frac{\gamma}{2} (w'^2(0, \tau) - \bar{w}'^2(0, \tau)) = 0 \tag{16}$$

$$\frac{M_L}{2} (\ddot{u}(0, \tau) + \ddot{\bar{u}}(0, \tau)) + \frac{k_{Lx}}{2} (u(0, \tau) + \bar{u}(0, \tau)) - \beta(u'(0, \tau) - \bar{u}'(0, \tau)) - \frac{\gamma}{2} (w'^2(0, \tau) - \bar{w}'^2(0, \tau)) = \bar{f}_x \tag{17}$$

$$\frac{J_R}{2\rho_R} (\ddot{\bar{u}}(1, \tau) - \ddot{\bar{u}}(1, \tau)) + \beta(u'(1, \tau) - \bar{u}'(0, \tau)) + \frac{\gamma}{2} (w'^2(1, \tau) - \bar{w}'^2(1, \tau)) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{M_R}{2} (\ddot{u}(1, \tau) + \ddot{\bar{u}}(1, \tau)) + \frac{k_{Rx}}{2} (u(1, \tau) + \bar{u}(1, \tau)) + \beta(u'(1, \tau) + \bar{u}'(1, \tau)) + \frac{\gamma}{2} (w'^2(1, \tau) + \bar{w}'^2(1, \tau)) = 0 \tag{19}$$

$$(w'''(0, \tau) - \bar{w}'''(0, \tau)) - \gamma(u'(0, \tau) w'(0, \tau) - \bar{u}'(0, \tau) \bar{w}'(0, \tau)) - \frac{\alpha}{2} (w'^3(0, \tau) - \bar{w}'^3(0, \tau)) - R_n(w'(0, \tau) - \bar{w}'(0, \tau)) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{M_L}{2} (\dot{w}(0, \tau) + \dot{\bar{w}}(0, \tau)) + \frac{k_{Lz}}{2} (w(0, \tau) + \bar{w}(0, \tau)) - \gamma(u'(0, \tau) w'(0, \tau) - \bar{u}'(0, \tau) \bar{w}'(0, \tau)) - \frac{\alpha}{2} (w'^3(0, \tau) + \bar{w}'^3(0, \tau)) (w'''(0, \tau) + \bar{w}'''(0, \tau)) - R_n(w'(0, \tau) + \bar{w}'(0, \tau)) = \bar{f}_z \tag{21}$$

$$(w'''(1, \tau) - \bar{w}'''(1, \tau)) - \gamma(u'(1, \tau) w'(1, \tau) - \bar{u}'(1, \tau) \bar{w}'(1, \tau)) - \frac{\alpha}{2} (w'^3(1, \tau) - \bar{w}'^3(1, \tau)) - R_n(w'(1, \tau) - \bar{w}'(1, \tau)) = 0 \tag{22}$$

$$\left(\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\frac{M_R}{2} (\dot{w}(1, \tau) + \dot{\bar{w}}(1, \tau)) + \frac{k_{Rz}}{2} (w(1, \tau) + \bar{w}(1, \tau)) - w'''(1, \tau) + \bar{w}'''(1, \tau) + \gamma(u'(1, \tau) w'(1, \tau) + \bar{u}'(1, \tau) \bar{w}'(1, \tau)) + \frac{\alpha}{2} (w'^3(1, \tau) + \bar{w}'^3(1, \tau)) + R_n(w'(1, \tau) + \bar{w}'(1, \tau)) = 0$$

$$+ \bar{w}'(1, \tau)) = 0 \tag{23}$$

$$w''(0, \tau) = \bar{w}''(0, \tau) = 0 \tag{24}$$

$$w''(1, \tau) = \bar{w}''(1, \tau) = 0 \tag{25}$$

2.3 선형화(linearization)

벨트 구동계의 수학적 해석을 위해 유도된 지배방정식과 경계조건 식 (12)~(25)을 보면, 비선형 항들이 존재한다. 이들 비선형 지배방정식과 경계조건 식을 선형화하기 위해 본 논문에서는 섭동법⁽¹¹⁾ (perturbation method)을 도입하여, 비선형 변수 u, \bar{u}, w, \bar{w} 등을 식 (26)과 같이 2개의 선형 변수의 합으로 나타내었다.

$$u(\xi, \tau) = u^*(\xi) + u(\xi, \tau)$$

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \bar{u}^*(\xi) + \bar{u}(\xi, \tau)$$

$$w(\xi, \tau) = w^*(\xi) + w(\xi, \tau)$$

$$\bar{w}(\xi, \tau) = \bar{w}^*(\xi) + \bar{w}(\xi, \tau) \tag{26}$$

식 (26)을 식 (12)~(25)에 대입하여 비선형 항들을 제거하고, 선형 지배방정식과 경계조건 식을 유도한다. (부록 참조)

2.4 이산화(discretization)

선형 지배방정식과 경계조건 식의 엄밀해(exact solution)는 일반적으로 계산할 수 없으므로, Galerkin의 위크 폼⁽¹⁰⁾(weak form)으로써 이산화시킨다. 지배방정식과 경계조건식을 작용자(operator)로써 표현하면 식 (27)이 되며, 지배방정식과 경계조건 식의 잔류항(residual)을 구하면 식 (28)이 된다.

$$L_m[u, w, \bar{u}, \bar{w}] = 0, \quad m = 1 \sim 4$$

$$B_n[u, w, \bar{u}, \bar{w}] = 0, \quad n = 1 \sim 8 \tag{27}$$

$$e_{am} = L_m[u, w, \bar{u}, \bar{w}] = 0, \quad m = 1 \sim 4$$

$$e_{bn} = B_n[u, w, \bar{u}, \bar{w}] = 0, \quad n = 1 \sim 8 \tag{28}$$

변수 u, \bar{u}, w, \bar{w} 를 식 (29)와 같이 변수분리해한다.

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N U_i(\xi) p_i(\tau)$$

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N \bar{U}_i(\xi) \bar{p}_i(\tau)$$

$$w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N W_i(\xi) q_i(\tau)$$

$$\bar{w}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N \bar{W}_i(\xi) \bar{q}_i(\tau) \tag{29}$$

여기서, $p_i(\tau), q_i(\tau), \bar{p}_i(\tau), \bar{q}_i(\tau)$ 는 일반화

좌표계를 나타낸다. $U_i(\xi)$, $W_i(\xi)$, $\bar{U}_i(\xi)$, $\bar{W}_i(\xi)$ 함수에 대한 가정은 식 (30)과 같다.

$$\begin{aligned} U_i(\xi), \bar{U}_i(\xi) &: \text{admissible function} \\ W_i(\xi), \bar{W}_i(\xi) &: \text{comparison function} \\ U_i(\xi) &= \bar{U}_i(\xi) = \cos(i\pi\xi) \\ W_i(\xi) &= \bar{W}_i(\xi) = \sin(i\pi\xi) - 2\xi + 1 \end{aligned} \quad (30)$$

특히, $U_i(\xi)$ 함수의 가정은, 벨트의 양단이 x 방향으로 자유롭게 거동하므로, 양단 자유 보의 고유 함수를 나타내고 있으며, $W_i(\xi)$ 함수의 가정은, 벨트의 양단이 중력방향으로 자유롭게 거동하고, 모멘트가 벨트 양단에서 0이 된다는 사실에 근거해서 결정하였다. Galerkin 방법에 의한 벨트 구동계의 이산화 워크 폼(discretized weak form)은 식 (31)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \langle e_{a1}, u_i(\xi) \rangle + \sum_{n=1}^4 (e_{bn} U_{bn}) &= 0 \\ \langle e_{a2}, \bar{U}_j(\xi) \rangle + \sum_{n=1}^4 (e_{bn} \bar{U}_{bn}) &= 0 \\ \langle e_{a3}, w_j(\xi) \rangle + \sum_{n=5}^8 (e_{bn} W_{bn}) &= 0 \\ \langle e_{a4}, \bar{w}_j(\xi) \rangle + \sum_{n=5}^8 (e_{bn} \bar{W}_{bn}) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

식 (31)에서, \langle, \rangle 는 영역 $0 < \xi < 1$ 에서의 가중치 없는 내적을 나타내고 있으며, U_b 와 \bar{U}_b 는 $\xi=0$ 과 $\xi=1$ 에서 계산된 $U_j(\xi)$, $\bar{U}_j(\xi)$ 값이다. 가정된 함수폼을 식 (31)에 대입하여 정리하면 최종적인 벨트 구동계의 운동방정식 식 (32)가 구성된다.

$$[M]\{\dot{y}(\tau)\} + [G]\{\dot{y}(\tau)\} + [K]\{y(\tau)\} = \{F\} \quad (32)$$

여기서, 각 행렬의 형태와 요소는 식 (33)~(37)과 같다.

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{34} & M_{33} \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{44} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} \\ K_{31} & 0 & K_{33} & M_{34} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} p \\ \bar{p} \\ a \\ \bar{q} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} (\bar{f}_x/2) U_j(0) \\ (\bar{f}_x/2) \bar{U}_j(0) \\ (\bar{f}_z/2) W_j(0) \\ (\bar{f}_z/2) \bar{W}_j(0) \end{Bmatrix} \quad (37)$$

3. 벨트 구동계의 수치해석

앞절에서 유도된 벨트 구동계의 운동방정식에 대해, 수치해석 프로그램을 작성하였다. 첫째, 벨트 구동계의 자유진동해석을 수행하여 계의 고유 진동수와 모드 형상을 도출하였다. 둘째, 외부 하중에 의한 강제진동해석을 실시하여 계의 특성을 나타내는 주요 파라미터들에 대한 응답의 변화를 고찰하였다. 본 해석을 위해 사용된 벨트의 형상과 물성치, 폴리의 형상과 지지강성 등의 데이터는 서울대학교 정밀기계설계연구소가 보유한 정밀 동력전달 시스템을 모델⁽¹²⁾로 작성하였으며, Table 1와 Table 2에 데이터 값을 제시하였다. 일반적으로 축은 베어링으로 하우징에 지지되고 있으므로, 폴리의 지지강성을 계산하기 위해서 베어링의 강성을 식 (38)⁽¹³⁾과 같은 비선형실험 식으로 사용하였다.

$$\text{Stiff} = \frac{dF_r}{d\delta_r} = n \left(\frac{1}{\xi} \right) ZK\delta_r^{n-1} \cos\alpha \quad (38)$$

Z : No. of balls

n : Constant (1.5 in case of ball bearing)

K : Load-deflection constant (130, 000 in case of ball bearing)

ξ : Constant (4.37 in case of ball bearing)

δ_r : Radial displacement

α : Contact angle (used bearing : 30°)

F_r : Radial load

식 (38)의 실험에서 알 수 있듯이 베어링의 강성은 베어링이 갖는 물성치 외에도 변위, 즉 가해진 힘에 관계된다. 따라서, 각각의 베어링에 걸리는 힘을 계산하여 강성을 예측하였다.

3.1 자유진동해석

비대칭 고유치 해석 프로그램을 이용하여 벨트 구동계의 자유진동해석을 수행하였으며, Table 3

Table 1 Characteristics of the belts

Items \ Belt type	Poly-flex	Timing belt	V-belt
Young's modulus(N/m ²)	1.54E9	1.35E9	7.45E8
Width(mm)	4.3	13.0	9.3
Thickness(mm)	5.0	4.0	8.5
Length(mm)	400.0	400.0	400.0
Initial tension(N)	300.0	300.0	300.0

Table 2 Characteristics of the pulleys

Iterms of pully (steel)	Values
Width(mm)	13.5
Radius of left pulley (mm)	25.0
Radius of right pully (mm)	50.0
Mass density (kg/m ³)	7.8E3
x-dir support stiffness of left pulley (N/m)	7.91E8
x-dir support stiffness of right pulley (N/m)	9.59E8
z-dir support stiffness of left pulley (N/m)	1.21E7
z-dir support stiffness of right pulley (N/m)	5.96E7

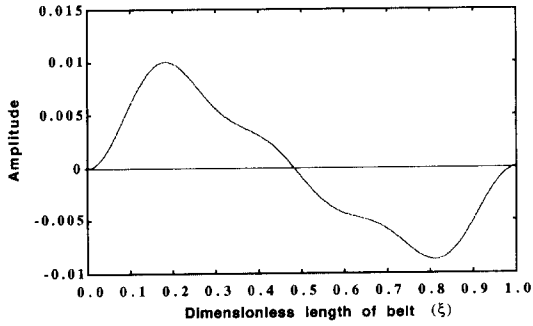
은 각 벨트에 대해 해석한 고유진동수를 나타내고 있다. 해석결과로부터 1차 모드를 제외하고, 고유진동수가 2개씩 쌍으로 도출되고 있으며, 각 쌍의 고유진동수는 근사한 값으로 계산되었다. 이것은 이미 Mote⁽⁸⁾의 논문에서 밝혀진 결과와 일치하고 있다. 움직이는 현을 진동해석할 때, 기존의 방법에서 무시되는 경계조건에 영향을 고려함으로써 발생하는 현상이다. 이것은 실제로 경계조건에 포함되는 폴리질량, 지지강성과 벨트 사이에서 커플링이 발생되고 있는 것을 의미하며, 쌍을 이루는 2개의 고유진동수 차가 작아질수록 커플링 효과는 줄어든다. Fig. 2, Fig. 3는 폴리 플렉스(poly-flex) 벨트를 사용하여 계산한 제1차, 2차의 모드 형상을 도시한다.

다양한 벨트 구동계의 파라미터 변화에 따른 계

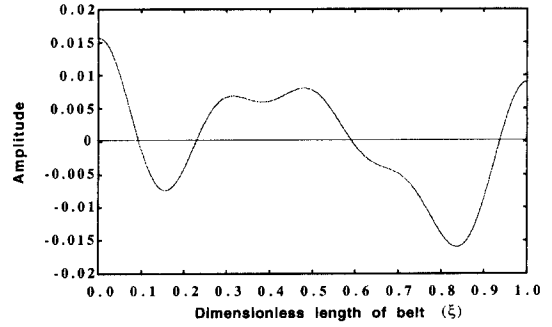
Table 3 Results of modal analysis

Belt type \ No. of modes	Natural freuencies (Hz)		
	Poly-flex	Timing belt	V-belt
1	13.66	11.05	14.26
2	20.44	13.76	25.26
3	20.57	13.93	26.13
4	35.43	25.88	43.32
5	40.36	29.47	47.47
6	51.43	40.55	61.54
7	51.93	40.98	62.14
8	69.98	59.72	81.52
9	76.33	64.22	95.24
10	89.31	79.47	117.21
11	90.31	80.14	117.43

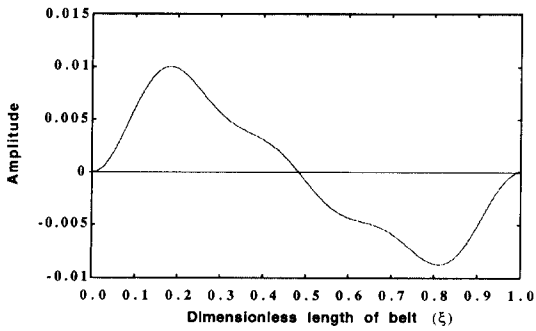
의 자유진동해석을 수행하여 다음과 같은 결과를 도출하였다. 첫째, 벨트의 속도변화에 따른 계의 자유진동해석을 수행하여, 벨트의 속도가 증가할수록 미소하게 고유진동수들이 감소함을 알 수 있었다. 둘째, 벨트의 길이 변화에 따른 계의 자유진동해석을 수행하여, 벨트의 길이가 길수록 고유진동수들이 크게 감소함을 알 수 있었다. 셋째, 폴리의 무게변화에 따른 계의 자유진동해석을 수행하여, 폴리 무게가 증가할수록 미소하게 고유진동수들이 감소하였으나, 큰 변화는 발생되지 않음을 알 수 있었다. 넷째, 벨트의 장력변화에 따른 계의 자유진동해석에서는, 벨트의 장력이 증가할수록 계



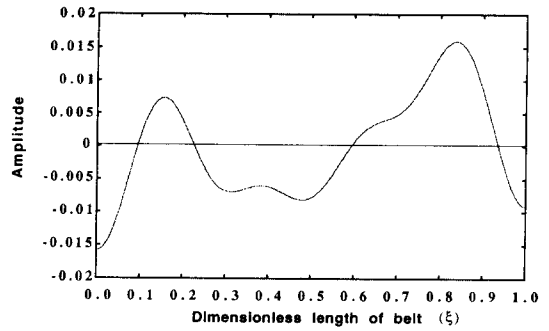
(a) x-dir. mode shape of the primary belt



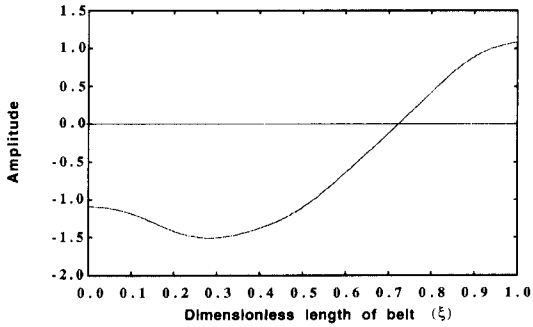
(a) x-dir. mode shape of the primary belt



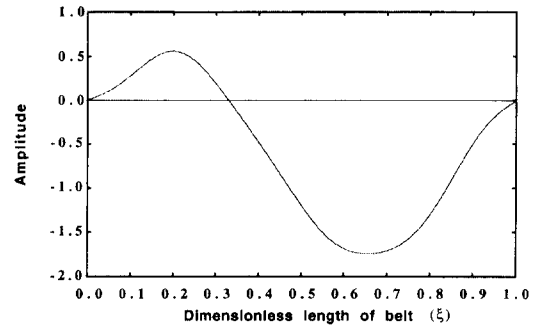
(b) x-dir. mode shape of the secondary belt



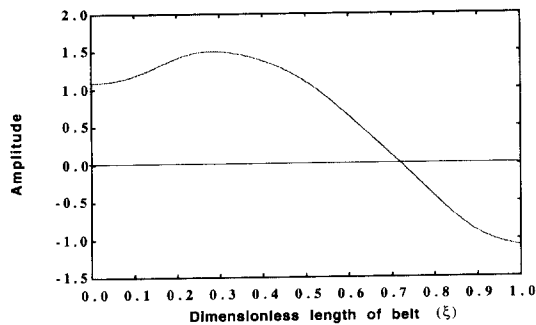
(b) x-dir. mode shape of the secondary belt



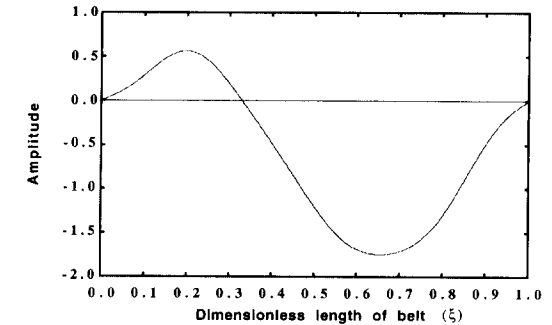
(c) z-dir. mode shape of the primary belt



(c) z-dir. mode shape of the primary belt



(d) z-dir. mode shape of the secondary belt



(d) z-dir. mode shape of the secondary belt

Fig. 2 1st mode shape of the belts

Fig. 3 2nd mode shape of the belts

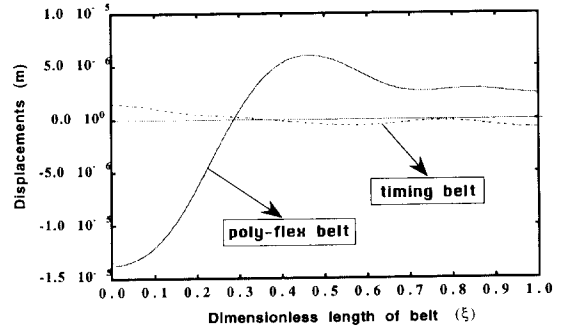
의 고유진동수들이 비교적 크게 증가함을 나타내었다. 다섯째, 벨트의 탄성계수 변화에 따른 계의 자유진동해석에서는, 벨트의 탄성계수가 증가할수록

Table 4 Analysis of free vibrations in systems for different belt tensions

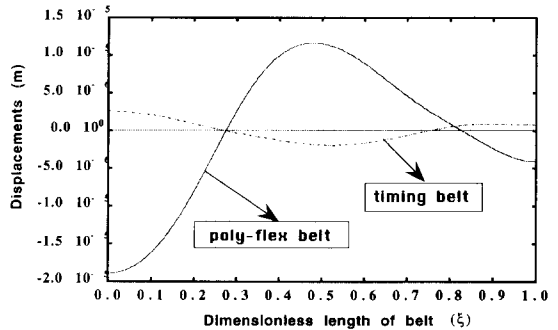
No. of modes	T(N)			
	200.0	300.0	600.0	1000.0
1	10.79	13.66	19.24	24.50
2	14.41	20.44	29.44	36.73
3	14.59	20.57	29.58	36.89
4	26.59	35.43	49.94	62.67
5	30.29	40.36	58.42	74.20
6	40.99	51.43	70.72	88.74
7	41.45	51.93	71.46	89.52
8	59.36	69.98	91.99	114.69
9	64.21	76.33	101.52	125.01
10	78.35	89.31	114.78	126.19
11	79.12	90.31	115.63	138.57

Table 5 Analysis of free vibrations in systems for different elastic moduli of belt

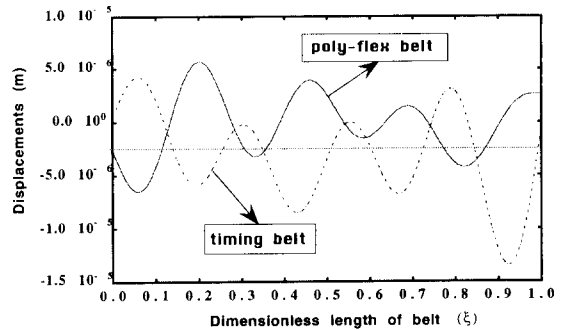
No. of Modes	E(N/m ²)			
	1.54E9	5.40E9	7.72E9	1.54E10
1	13.66	25.08	29.80	41.97
2	20.44	37.53	44.18	61.73
3	20.57	37.70	44.36	61.98
4	35.43	64.09	75.76	106.17
5	40.36	75.92	89.99	126.31
6	51.43	90.73	107.27	138.56
7	51.93	91.54	108.13	150.23
8	69.98	117.58	138.53	151.33
9	76.33	128.87	138.99	194.37
10	89.31	138.57	151.80	211.82
11	90.31	145.49	171.49	239.12



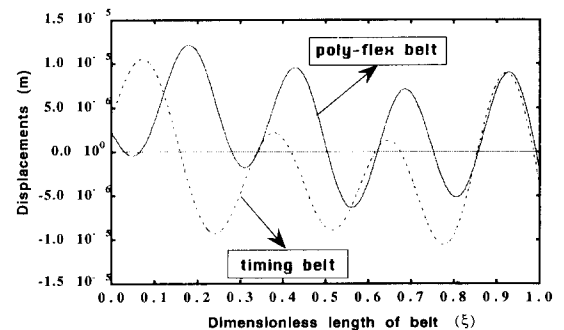
(a) u of the primary belt



(b) u of the secondary belt



(c) w of the primary belt



(d) w of the secondary belt

Fig. 4 Dynamic displacements of the poly-flex belt and the timing belt

Table 6 Data for dynamic analysis

Items	Data values
$f_x=f_z=mew^2(N)$	4.1
Tension R(N)	300.0
Time step	5000
$\Delta t(sec)$	6.28E-7

Table 7 Results of dynamic analysis I (μm)

Belt type	Timing belt		Poly-flex belt	
	x	z	x	z
Direction Caculated position				
Left pulley	2.013	2.16	-16.36	-0.1575
Right pulley	-0.03535	-2.16	0.8805	0.1575

Table 8 Results of dynamic analysis II (μm)

$F_{eq}(N)$	1.0		5.0		10.0	
	x	z	x	z	x	z
Direction Caculated postion						
Left pulley	-7.965	-0.195	-39.83	-0.975	-79.65	-1.95
Right pully	-0.68	0.195	-3.406	0.975	-6.811	1.95

계의 고유진동수들이 증가함을 알 수 있었다. 위의 벨트 구동계의 다양한 파라미터 변화에 따른 자유진동해석의 결과를 종합하면, 베어링에 의한 지지강성이 크므로, 풀리 무게의 증가는 계의 고유진동수에 영향을 거의 미치지 못했고, 벨트의 장력, 탄성계수, 길이 등이 계의 고유진동수 변화에 영향이 크음을 알 수 있었다. Table 4, Table 5는 벨트 구동계의 다양한 파라미터 변화에 따른 자유진동해석 결과를 나타낸다.

3.2 강제진동해석

전체 방정식에서 우변항, 즉 외부하중 항을 모터 축의 기하학적 편심량에 의한 동적하중으로 정의하여 강제진동해석을 수행하였으며, 모터의 불평형 동적하중은 모터의 속도함수인 정현파함수로 가정하였다. 강제진동해석을 수행하기 위해 식 (32)의 외력항에 모터의 불평형 동적하중을 x , z 방향으로 작용시켰으며, x 방향의 동적하중은 sine 함수로, z 방향의 동적하중은 cosine 함수로 가정한 것이다. 동적하중에 대한 동적변위해석을 위해 임피던스법(impedance method)을 적용한 프로그램을 작성하였으며, Table 6에 강제진동해석을 위해 사용된 데이터를 제시하였다. 본 해석에서는, 주어진 모터의 각속도에 대해 주기 T를 계산한 다음, $(1/2)T$ 주기에 해당되는 시간에 대하여 강제진동해석을 수행하였다.

Table 7는 폴리 플렉스 벨트와 타이밍 벨트를 사용한 벨트 구동계의 동적해석결과이며, 식 (32)를 사용하여 가진 위치(좌측 풀리)에서의 x , z 방향 변위와 우측 풀리에서의 x , z 방향 변위를 계산하였다. 본 해석으로부터 다음의 결과를 도출하였다. 첫째, 가진 위치에서의 x 방향 동적변위는, 타이밍 벨트가 폴리 플렉스 벨트보다 작게 계산이 되었는데, 이는 동일한 지지강성에서 타이밍 벨트를 갖는 계의 전체 강성이 폴리 플렉스 벨트를 갖는 계의 전체 강성보다 큰 결과이다. 둘째, 우측 풀리의 x 방향 동적 변위는 타이밍 벨트가 폴리 플렉스 벨트에 비해 작게 계산되었지만, z 방향 동적 변위는 그 반대로 계산되었다.

두번째 해석은 다양한 가진력 변화에 따른 강제진동해석을 폴리 플렉스 벨트를 갖는 벨트 구동계에 대하여 수행하였다. 해석방법은 다음과 같다. 첫째, 장력은 300 N이고, 둘째, 가진주파수는 378.0 rad/sec(3600 rpm)으로 해석을 수행하였다. Table 8에서 제시된 결과에서 알 수 있듯이 외부 가진력이 증가할수록 풀리의 x , z 방향 변위 모두가 증가하였다.

4. 결 론

본 논문에서는 벨트 구동식 동력전달 시스템을 정확하게 모델링하기 위하여, Mote의 해석을 확장

한 2차원 해석모델을 제시하였고, 실제 벨트 구동계에 대한 수학적 모델에서 고려되어야 할 2차원 풀리의 지지강성의 계산 및 벨트에 의한 진동절연 효과를 알 수 있는 강제진동해석에 대한 연구를 수행하였다. 본 논문에서 제시된 벨트 구동계의 수학적 모델에 대한 해석결과는 다음과 같다. 첫째, 벨트 구동계의 수학적 2차원 모델을 제시하고, 4개의 비선형 운동방정식과 12개의 비선형 경계조건 식을 유도하였다. 또한, 섭동법(perturbation)을 적용하여 선형화하였으며, Galerkin의 위크 폼(weak form) 방법을 사용한 이산화과정을 수행하여, 벨트 구동계의 운동방정식을 완성하였다. 둘째, 풀리 지지강성에서, 구동부 측은 모터 축 지지베어링의 등가강성을 사용하였으며, 종동부 측은 주축 지지베어링의 등가 강성을 사용하였다. 베어링에 작용하는 하중과 등가 강성과의 비선형 관계를 유도하고, 이 관계식을 이용하여 베어링에 작용하는 하중에 따라 등가강성을 계산하는 프로그램을 사용하였다. 셋째, 유도된 운동방정식과 경계조건 식을 사용하여 제작된 벨트 구동계의 자유진동해석을 수행하였으며, 그 결과로 계의 고유진동수와 고유모드를 계산하였고, Mote의 논문에서 제시된 것과 같이 벨트와 경계조건들 간에 커플링이 발생함을 확인하였다. 넷째, 벨트의 길이변화, 장력의 변화, 재질의 변화, 속도의 변화 및 풀리의 질량변화에 따른 자유진동해석을 수행하여, 벨트의 길이, 장력, 재질 등이 벨트 구동계의 고유진동수를 크게 변화시키는 파라미터임을 확인할 수 있었다. 다섯째, 2가지 종류의 벨트에 대한 강제진동해석을 수행하여 풀리 플렉스 벨트가 타이밍 벨트에 비해 진동절연효과가 큼을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) Archibald, F. R. and Emslie, A. G., 1956, "The Vibration of a String Having a Uniform Motion Along Its Length," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 347~348.
- (2) Mote, Jr. C. D., 1966, "On the Nonlinear Oscillation of an Axially Moving Strings," *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 463~464.
- (3) Moustafa, M. A. and Salman, F. K., 1976, "Dynamic Properties of a Moving Thread Line," *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 98, pp. 869~875.
- (4) Naguleswaran, S. and Williams, J. H., 1968, "Lateral Vibration of Band-Saw Blades, Pulley Belts and the Like," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 10, pp. 239~250.
- (5) Simpson, A., 1973, "Transverse Modes and Frequencies of Beams Translating Between Fixed End Supports," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 15, pp. 159~164.
- (6) 김현수, 이재신, 1991, "금속 V-벨트 CVT의 벨트거동 해석," 대한기계학회논문집, 제15권 제1호, pp. 557~566.
- (7) 鄭寅聖, 堤正臣, 伊東諠, 1982, "V-Belt 구동계의 진동 특성에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제6권, 제1호, pp. 93~99.
- (8) Wang, K. W. and Mote, Jr., C. D., 1986, "Vibration Coupling analysis of Band/Wheel Mechanical Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 109, No. 2, pp. 237~258.
- (9) Mote, Jr., C. D. and Wu, W. Z., 1985, "Vibration Coupling in Continuous Belt and Band Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, No. 1, pp. 1~9.
- (10) Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New York.
- (11) Nahfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Non-linear Oscillations*, John Wiley & Sons, New York.
- (12) 김성걸, 1994, "벨트 및 마그네틱커플링을 갖는 구동계의 진동특성연구," 박사학위논문, 서울대학교.
- (13) 김성걸, 1988, "베어링의 비선형 특성을 고려한 주축계 동특성 해석 연구," 석사학위논문, 서울대학교.

부 록

(1) 식 (11) 전개

$$\begin{aligned}
\delta H &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt & (11) \\
\delta H &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \{ -m\bar{u}_{,tt} + (EA - mc^2)\bar{u}_{,xx} - 2mc\bar{u}_{,xt} + EA\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,xx} \} \delta\bar{u} \right. \\
&\quad + \{ -m\bar{v}_{,tt} + (EA - mc^2)\bar{v}_{,xx} + 2mc\bar{v}_{,xt} + EA\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,xx} \} \delta\bar{v} \\
&\quad + \{ -m\bar{w}_{,tt} + EA(\bar{u}_{,xx}\bar{w}_{,x} + \bar{u}_{,x}\bar{w}_{,xx}) + 1.5EA\bar{w}_{,x}^2\bar{w}_{,xx} - EI\bar{w}_{,xxxx} \\
&\quad + (R - mc^2)\bar{w}_{,xx} - 2mc\bar{w}_{,xt} \} \delta\bar{w} + \{ -m\bar{w}_{,tt} + EA(\bar{u}_{,xx}\bar{w}_{,x} + \bar{u}_{,x}\bar{w}_{,xx}) \\
&\quad + 1.5EA\bar{w}_{,x}^2\bar{w}_{,xx} - EI\bar{w}_{,xxxx} + (R - mc^2)\bar{w}_{,xx} + 2mc\bar{w}_{,xt} \} \delta\bar{w} \} dx \\
&\quad + \left\{ -EA\bar{u}_{,x}(L, t) - \frac{EA}{2}\bar{w}_{,x}^2(L, t) - \left(\frac{\bar{J}_R}{4r_R^2} \right) (\bar{u}_{,tt}(L, t) - \bar{u}_{,tt}(L, t)) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\bar{M}_R}{4} \right) (\bar{u}_{,tt}(L, t) + \bar{u}_{,tt}(L, t)) - \left(\frac{\bar{k}_{Rx}}{4} \right) (\bar{u}_{,tt}(L, t) + \bar{u}_{,tt}(L, t)) \right\} \delta\bar{u}_{,tt}(L, t) \\
&\quad - \left\{ -EA\bar{u}_{,x}(0, t) - \frac{EA}{2}\bar{w}_{,x}^2(0, t) + \left(\frac{\bar{J}_R}{4r_R^2} \right) (\bar{u}_{,tt}(0, t) - \bar{u}_{,tt}(0, t)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\bar{M}_L}{4} \right) (\bar{u}_{,tt}(0, t) + \bar{u}_{,tt}(0, t)) + \left(\frac{\bar{k}_{Lx}}{4} \right) (\bar{u}_{,tt}(0, t) + \bar{u}_{,tt}(0, t)) - \frac{f_x}{2} \right\} \delta\bar{u}(0, t) \\
&\quad + \left\{ -EA\bar{u}_{,x}(L, t) - \frac{EA}{2}\bar{w}_{,x}^2(L, t) - \left(\frac{\bar{J}_R}{4r_R^2} \right) (\bar{u}_{,tt}(L, t) - \bar{u}_{,tt}(L, t)) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\bar{M}_R}{4} \right) (\bar{u}_{,tt}(L, t) + \bar{u}_{,tt}(L, t)) - \left(\frac{\bar{k}_{Rx}}{4} \right) (\bar{u}_{,tt}(L, t) + \bar{u}_{,tt}(L, t)) \right\} \delta\bar{u}_{,tt}(L, t) \\
&\quad - \left\{ -EA\bar{u}_{,x}(0, t) - \frac{EA}{2}\bar{w}_{,x}^2(0, t) - \left(\frac{\bar{J}_L}{4r_L^2} \right) (\bar{u}_{,tt}(0, t) - \bar{u}_{,tt}(0, t)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\bar{M}_L}{4} \right) (\bar{u}_{,tt}(0, t) + \bar{u}_{,tt}(0, t)) + \left(\frac{\bar{k}_{Lx}}{4} \right) (\bar{u}_{,tt}(0, t) + \bar{u}_{,tt}(0, t)) - \frac{f_x}{2} \right\} \delta\bar{u}(0, t) \\
&\quad + \left\{ -EA\bar{u}_{,x}(L, t)\bar{w}_{,x} - \frac{EA}{2}\bar{w}_{,x}^3(L, t) + EI\bar{w}_{,xxx}(L, t) - R\bar{w}_{,x}(L, t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{M}_R}{4} (\bar{w}_{,xx}(L, t) + \bar{w}_{,xx}(L, t)) - \frac{\bar{k}_{Rz}}{4} (\bar{w}_{,xx}(L, t) + \bar{w}_{,xx}(L, t)) \right\} \delta\bar{w}(L, t) \\
&\quad - \left\{ -EA\bar{u}_{,x}(0, t)\bar{w}_{,x}(0, t) - \frac{EA}{2}\bar{w}_{,x}^3(0, t) + EI\bar{w}_{,xxx}(0, t) - R\bar{w}_{,x}(0, t) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\bar{M}_L}{4} \right) (\bar{w}_{,xx}(0, t) + \bar{w}_{,xx}(0, t)) + \frac{\bar{k}_{Lz}}{4} (\bar{w}_{,xx}(0, t) + \bar{w}_{,xx}(0, t)) \right\} \delta\bar{w}(0, t) \\
&\quad + \left\{ -EA\bar{u}_{,x}(L, t)\bar{w}_{,x}(L, t) - \frac{EA}{2}\bar{w}_{,x}^3(L, t) + EI\bar{w}_{,xxx}(L, t) - R\bar{w}_{,x}(L, t) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\bar{M}_L}{4} \right) (\bar{w}_{,xx}(L, t) + \bar{w}_{,xx}(L, t)) - \frac{\bar{k}_{Lz}}{4} (\bar{w}_{,xx}(L, t) + \bar{w}_{,xx}(L, t)) \right\} \delta\bar{w}(L, t) \\
&\quad - \left\{ -EA\bar{u}_{,x}(0, t)\bar{w}_{,x}(0, t) - \frac{EA}{2}\bar{w}_{,x}^3(0, t) + EI\bar{w}_{,xxx}(0, t) - R\bar{w}_{,x}(0, t) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\bar{M}_L}{4} \right) (\bar{w}_{,xx}(0, t) + \bar{w}_{,xx}(0, t)) + \frac{\bar{k}_{Lz}}{4} (\bar{w}_{,xx}(0, t) + \bar{w}_{,xx}(0, t)) - \frac{f_y}{2} \right\} \delta\bar{w}(0, t) \\
&\quad - \{ \bar{M}\bar{M}_L - EI\bar{w}_{,xx}(0, t) \} \delta\bar{w}_{,xx}(0, t) + \{ \bar{M}\bar{M}_R - EI\bar{w}_{,xx}(L, t) \} \delta\bar{w}_{,xx}(L, t) \\
&\quad + \{ \bar{M}\bar{M}_L + EI\bar{w}_{,xx}(0, t) \} \delta\bar{w}_{,xx}(0, t) + \{ \bar{M}\bar{M}_R - EI\bar{w}_{,xx}(L, t) \} \delta\bar{w}_{,xx}(L, t) \Big] = 0
\end{aligned}$$

(2) 식 (26)을 식 (12)~(25)에 대입하여 비선형 항들을 제거하고, 선형 지배방정식 4개와 12개의 경계 조건식을 유도

$$\begin{aligned}
u(\xi, \tau) &= u^*(\xi) + u(\xi, \tau) \\
\bar{u}(\xi, \tau) &= \bar{u}^*(\xi) + \bar{u}(\xi, \tau) \\
w(\xi, \tau) &= w^*(\xi) + w(\xi, \tau) \\
\bar{w}(\xi, \tau) &= \bar{w}^*(\xi) + \bar{w}(\xi, \tau) \\
\dot{u} + 2s\dot{u}' - \Phi u'' - \gamma(w^* w')' &= 0 \\
\ddot{u} + 2s\ddot{u}' - \Phi \bar{u}'' - \gamma(\bar{w}^* \bar{w}')' &= 0 \\
\dot{w} + 2s\dot{w}' - \Psi w'' + w''' - \gamma(w^* u' + u^* \bar{w}') - 1.5\alpha(w^{*2} w'' + 2w^* w'' w') &= 0 \\
\ddot{w} + 2s\ddot{w}' - \Psi \bar{w}'' + \bar{w}''' - \gamma(\bar{w}^* \bar{u}' + \bar{u}^* \bar{w}') - 1.5\alpha(\bar{w}^{*2} \bar{w}'' + 2\bar{w}^* \bar{w}'' \bar{w}') &= 0 \\
\frac{J_L}{2\rho_L^2} (\dot{u}(0, t) - \ddot{u}(0, \tau)) - \beta(u'(0, \tau) - \bar{u}'(0, \tau) - \gamma(w^*(0) w'(0, \tau) - \bar{w}^*(0) \bar{w}'(0, \tau))) &= 0 \\
\frac{M_L}{2} (\dot{u}(0, t) - \ddot{u}(0, \tau)) + \frac{k_{Lx}}{2} (u(0, \tau) + \bar{u}(0, \tau)) - \beta(u'(0, \tau) + \bar{u}'(0, \tau)) \\
- \gamma(w^*(0) w'(0, \tau) + \bar{w}^*(0) \bar{w}'(0, \tau)) &= \bar{f}_x \\
\frac{J_R}{2\rho_R^2} (\dot{u}(1, \tau) - \ddot{u}(1, \tau)) + \beta(u'(1, \tau) - \bar{u}'(1, \tau)) + \gamma(w^*(1) w'(1, \tau) + \bar{w}^*(1) \bar{w}'(1, \tau)) &= 0 \\
\frac{M_R}{2} (\dot{u}(1, t) + \ddot{u}(1, \tau)) + \frac{k_{Rx}}{2} (u(1, \tau) + \bar{u}(1, \tau)) + \beta(u'(1, \tau) + \bar{u}'(1, \tau)) + \gamma(w^*(1) w'(1, \tau) \\
+ \bar{w}^*(1) \bar{w}'(1, \tau)) &= 0 \\
(w'''(0, \tau) - \bar{w}'''(0, \tau)) - R_n(w'(0, \tau) - \bar{w}'(0, \tau)) - \frac{3}{2}\alpha(w^{*2}(0) w'(0, \tau) + \bar{w}^{*2}(0) \bar{w}'(0, \tau)) \\
- \gamma(u^*(0) w'(0, \tau) + w^*(0) u'(0, \tau) - \bar{u}^*(0) \bar{w}'(0, \tau) - \bar{w}^*(0) \bar{u}'(0, \tau)) &= 0 \\
\frac{M_L}{2} (\dot{w}(0, \tau) + \ddot{w}(0, \tau)) + \frac{k_{Lz}}{2} (w(0, \tau) + \bar{w}(0, \tau)) + (w'''(0, \tau) + \bar{w}'''(0, \tau)) - R_n(w'(0, \tau) \\
+ \bar{w}'(0, \tau)) - \frac{3}{2}\alpha(w^{*2}(0) w'(0, \tau) + \bar{w}^{*2}(0) \bar{w}'(0, \tau)) - \gamma(u^*(0) w'(0, \tau) \\
+ w^*(0) u'(0, \tau) + \bar{u}^*(0) \bar{w}'(0, \tau) + \bar{w}^*(0) \bar{u}'(0, \tau)) &= \bar{f}_z \\
(w'''(1, \tau) - \bar{w}'''(1, \tau)) - R_n(w'(1, \tau) - \bar{w}'(1, \tau)) - \frac{3}{2}\alpha(w^{*2}(1) w'(1, \tau) + \bar{w}^{*2}(1) \bar{w}'(1, \tau)) \\
- \gamma(u^*(1) w'(1, \tau) + w^*(1) u'(1, \tau) - \bar{u}^*(1) \bar{w}'(1, \tau) - \bar{w}^*(1) \bar{u}'(1, \tau)) &= 0 \\
\frac{M_R}{2} (\dot{w}(1, \tau) - \ddot{w}(1, \tau)) + \frac{k_{Rz}}{2} (w(1, \tau) + \bar{w}(1, \tau)) - (w'''(1, \tau) + \bar{w}'''(1, \tau)) + R_n(w'(1, \tau) \\
+ \bar{w}'(1, \tau)) + \frac{3}{2}\alpha(w^{*2}(1) w'(1, \tau) + \bar{w}^{*2}(1) \bar{w}'(1, \tau)) + \gamma(u^*(1) w'(1, \tau) \\
+ w^*(1) u'(1, \tau) + \bar{u}^*(1) \bar{w}'(1, \tau) + \bar{w}^*(1) \bar{u}'(1, \tau)) &= 0 \\
w''(0, \tau) = \bar{w}''(0, \tau) &= 0 \\
w''(1, \tau) = \bar{w}''(1, \tau) &= 0
\end{aligned}$$