

< 논 문 >

## 강소성 유한요소해석에서 Hourglass Control

강정진\* · 오수익\*\*

(1995년 9월 29일 접수)

### Hourglass Control in Rigid-Plastic Finite Element Analysis

J. J. Kang and S. I. Oh

**Key Words :** Rigid-Plastic FEM(강소성 유한요소법), One-Point Integration(1점 적분법), Hourglass Modes(아워글래스 모드)

#### Abstract

The finite element method, based on rigid-plastic formulation, is widely used to simulate metal forming processes. In order to improve the computational efficiency of the rigid-plastic FEM, one-point integration is used to evaluate the stiffness matrix with four-node rectangular elements and eight-node brick elements. In order to control the hourglass modes, hourglass strain rate components were introduced and included in the effective strain rate definition. Numerical tests have shown that the proposed one-point integration scheme reduces the stiffness matrix evaluation time without deteriorating the convergence behavior of Newton-Raphson method. Simulations of a ring compression, a plane-strain closed-die forging and the three-dimensional spike forging processes were carried out by using the proposed integration method. The simulation results are compared to those obtained by applying the conventional integration method in terms of the solution accuracy and computational efficiency.

#### 1. 서 론

금속성형공정을 설계하는데 있어 유한요소해석 프로그램을 이용하는 것이 현재 보편적인 추세다. 그 주된 이유는 유한요소해석 프로그램을 이용한 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 공정의 최적화, 시간 및 비용절감 등의 효과를 가져올 수 있기 때문이다.

현재 금속성형공정을 해석할 수 있는 유한요소해석 프로그램으로는 DEFORM, DYNA3D, NIKE3D 등이 있다. 유한요소해석 프로그램이 널리 사용되

어지기 위해서는 기본적으로 정확한 해를 제공할 수 있어야 하며, 프로그램 사용이 용이해야 하고, 작업시간, 해석시간 등이 되도록 짧아야 한다. 이에 근거하여 위의 유한요소해석 프로그램을 개발하는 과정에서 해석시간, 즉 계산시간을 단축시킬 수 있는 많은 방법들이 강구되어왔으며, 그중 한 방법으로 체적적분에 1점 적분법을 도입하게 되었다.

하지만, 체적적분시 1점 적분법을 사용하게 되면, 2차원에서 4점 적분법을 사용할 때는 문제가 되지않는 특정변형모드(이후, hourglass mode<sup>(1)</sup>)라고 지칭할 것이다.)에 대하여 요소(element)가 영 에너지(zero-energy) 상태가 되어 계산 도중에 해의 정확도가 떨어지게 된다. 다시 말하면, 변형모드중 하나인 hourglass modes를 고려하지 않은 해

\* 서울대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, 서울대학교 기계설계학과

석결과가 도출될 수 있음을 의미한다. 특히, implicit code에서는 각 요소에 대하여 적절치 못한 적분값에 의한 계산이 반복법(iteration method)의 수렴성을 저해하는 요인으로까지 작용할 수 있으며, 이는 계산시간 단축을 위한 1점 적분법의 사용 목적에 상반된다.

Belytschko<sup>(1,5,8)</sup> 등은 이와 같은 문제점을 효과적으로 해결할 수 있는 hourglass control이라는 방법을 탄성, 탄소성 재료에 대하여 제시하였다. Belytschko 등이 제안한 방법은 현재까지도 1점 적분법 또는 감차적분법과 관련된 연구들에서 많이 인용되어 사용되어지고 있다.

반면에 강소성 유한요소해석에서는 지금껏 보통은 체적적분시 2차원 문제에서 4점 적분법을 사용하여 왔다. 계산시간면에서 분명히 이득이 됨에도 불구하고 1점 적분법을 사용하지 않은 것은 기존의 hourglass control의 기법을 강소성 유한요소법에 그대로 적용하였을 때 수렴성 등의 문제가 발생하였기 때문으로 짐작된다. 그리고, Belytschko 등의 연구결과는 탄성, 탄소성 재료를 대상으로 하였기 때문에 강소성 재료를 대상으로 하는 경우에는 그 연구 내용을 바로 적용하기에 수식상의 무리가 있다. 그 예로 탄소성 재료의 경우 hourglass control을 위한 수식에 Lamé 상수가 필요한데 반하여 강소성 재료에 대하여는 Lamé 상수가 무의미함을 들 수 있다.

따라서, 본 연구에서는 Belytschko 등에 의한 연구를 토대로 강소성 유한요소해석에서의 hourglass control 기법을 제시하고자 한다. 이 방법을 Oh 등<sup>(7)</sup>에 의하여 개발된 강소성 유한요소해석 프로그램인 DEFORM에 적용, 여러 금속성형공정을 해석하여 기존의 체적적분법인 4점 적분법- 2차원에서-에 의한 해석결과와 비교, 검토함으로써 본 연구의 타당성을 검증하고, 본 연구에서 제시한 방법에 의한 계산시간과 기존의 적분법에 의한 계산

시간을 비교함으로써 본 연구의 효용성을 확인하고자 한다.

## 2. 이 론

### 2.1 Kinematics

4절점 요소 내부의 임의의 위치의 좌표값은 형상 함수(isoparametric shape functions)  $\phi_I$ 와 각 절점의 좌표값으로 결정할 수 있다.

$$x_i(\xi, \eta) = x_{iI}\phi_I(\xi, \eta) \tag{1}$$

표기법 관례(indicial notation convention)에 따라서 소문자 아래첨자(lowercase subscript)는 x, y 좌표계를 의미하고, 대문자 아래첨자(uppercase subscript)는 사변형요소(quadrilateral element)의 네 개의 절점을 의미한다. 그리고, 반복된 첨자는 그 첨자가 가질 수 있는 값의 범위에서 총합을 의미한다.

또한, 형상함수는 요소 내에서 변위장과 속도장을 정의한다.

$$u_i = u_{iI}\phi_I \tag{2}$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{iI}\phi_I \tag{3}$$

그리고, 속도구배(velocity gradient)는 다음과 같다.

$$\dot{u}_{i,j} = \dot{u}_{iI}\phi_{I,j} \tag{4}$$

여기서, 쉼표( , )와 그 뒤의 첨자는 그 첨자가 나타내는 좌표방향으로의 미분을 의미한다. 즉  $\dot{u}_{i,j}$ 는  $\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}$ 를 나타낸다.

2차원에서 형상함수  $\phi_I$ 는  $\xi, \eta$  좌표평면의 단위 정사각형(unit square)을 x, y 좌표평면의 임의의 사변형으로 사상(mapping)시킨다.

$$\phi_I = \frac{1}{4}(1 + \xi_I\xi) \quad (\text{no sum on } I) \tag{5}$$

Table 1 Orthogonal set of base vectors

Node number	$\Sigma_I$	$\Lambda_{1I}$	$\Lambda_{2I}$	$\Gamma_I$
1	1	-1	-1	1
2	1	1	-1	-1
3	1	1	1	1
4	1	-1	1	-1

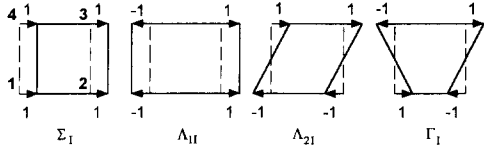


Fig. 1 Quadrilateral and its displacement modes

또는

$$\phi_I = \frac{1}{4} (\Sigma_I + \xi \Lambda_{1I} + \eta \Lambda_{2I} + \xi \eta \Gamma_I) \quad (6)$$

$\Sigma_I$ ,  $\Lambda_{1I}$ ,  $\Lambda_{2I}$ ,  $\Gamma_I$ 는 사변형의 기저벡터(quadrilateral base vectors)로서 그 값은 Table 1에 정리하였다. 따라서, 형상함수의 각 계수는 식(6)에서 보는 바와 같이 기저벡터(base vector)의 직교집합(orthogonal set)으로 나타내어질 수 있다.  $\Sigma_I$ ,  $\Lambda_{1I}$ ,  $\Lambda_{2I}$ ,  $\Gamma_I$ 는 단위 사변형의 변위양식(displacement modes)을 나타낸다.  $\Sigma_I$ 는 강체 병진운동(rigid body translation)을 나타내며,  $\Lambda_{1I}$ 는 균일 수직변형양식(uniform normal strain mode)을,  $\Lambda_{2I}$ 는 균일 전단변형양식(uniform shear strain mode)을,  $\Gamma_I$ 는 hourglass mode를 나타내며, 이들을 Fig. 1에 도시하였다.<sup>(1)</sup> 그림에서 굵은 숫자는 절점 번호를 의미하며 나머지 숫자들은 절점에서 x방향으로의 변형양식(또는 변위, 속도 등)을 의미한다.

## 2.2 Hourglass modes의 분리

수식 유도 of 편이를 위하여  $2 \times 4$  행렬  $B_{JI}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$B_{JI} = \int_A \phi_{JI} dA \quad (7)$$

한편, 선형 속도장을 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$\dot{u}_I^{LIN} = \dot{\bar{u}}_I + \dot{\bar{u}}_{i,j} (x_j - \bar{x}_j) \quad (8a)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= \frac{1}{4} x_{jI} \Sigma_I \\ \dot{\bar{u}}_I &= \frac{1}{4} \dot{u}_{iI} \Sigma_I \\ \dot{\bar{u}}_{i,j} &= \frac{1}{A} \dot{u}_{iI} B_{JI} \end{aligned} \quad (8b)$$

이다.

요소의 각 절점에 대하여 위의 선형 속도장의 개념을 도입하면 다음과 같다.

$$\dot{u}_{iI}^{LIN} = \dot{\bar{u}}_I \Sigma_I + \dot{\bar{u}}_{i,j} (x_j - \bar{x}_j \Sigma_I) \quad (9)$$

이제 hourglass velocity  $\dot{u}_{iI}^{HG}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{u}_{iI}^{HG} = \dot{u}_{iI} - \dot{u}_{iI}^{LIN} \quad (10)$$

체적적분으로 1점 적분법(one-point integration scheme)을 사용하는 경우 적분점에서 각 변형률 속도의 성분은 본래의 속도장  $\dot{u}_{iI}$ 에 의한 것과 선형 속도장  $\dot{u}_{iI}^{LIN}$ 에 의한 것이 동일하다.<sup>(1)</sup> 즉, 다음과 같다.

$$\dot{u}_{iI} B_{JI} = \dot{u}_{iI}^{LIN} B_{JI} = A \dot{\bar{u}}_{i,j}$$

따라서, 1점 적분법으로는 본래의 속도장에서 선형 속도장을 제거한 속도장, 즉 hourglass 속도장  $\dot{u}_{iI}^{HG}$ 은 변형률속도에 대하여 기여를 하지 못한다.

## 2.3 Anti-Hourglassing

$\dot{u}_{iI}^{HG}$ 는 식(8), (9), (10)에 의하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\dot{u}_{iI}^{HG} = \frac{1}{4} \dot{u}_{iI} (\Gamma_I - \frac{1}{A} B_{JI} x_{jK} \Gamma_K) \Gamma_I \quad (11)$$

윗식에서  $\Gamma_I$ 은  $\{1, -1, 1, -1\}^T$ 이므로 다음의  $\dot{u}_{iI}^{HG}$ 로서  $i$ 방향의 hourglass 속도장을 대표할 수 있다.

$$\dot{u}_i^{HG} = \frac{1}{4} \dot{u}_{iI} (\Gamma_I - \frac{1}{A} B_{JI} x_{jK} \Gamma_K) \quad (12)$$

4절점 요소의 변형양식중 hourglass modes에 의한 변형률속도를 hourglass 변형률속도  $\dot{\epsilon}_i^{HG}$ 라고 하고,  $\dot{u}_i^{HG}$ 를  $i$ 방향의 특성길이(characteristic length in  $i$ -direction)  $l_i^{char}$ 로 나눈 것으로 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{\epsilon}_i^{HG} = \frac{\dot{u}_i^{HG}}{l_i^{char}} \quad (\text{no sum on } i) \quad (13)$$

여기서,  $i$ 방향의 특성길이는 다음과 같이 가정한다.

$$l_i^{char} = \sqrt{\frac{A^2}{B_{JI} B_{JI}}} \quad (i=x, y) \quad (14)$$

경계치 문제의 해를 구하기 위한 변분식<sup>(2)</sup>에서 변분을 취하기 이전에 1점 적분법 사용으로 발생하는 단점과 관련있는 적분항은 다음과 같다.

$$\int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon} dV = \int_V \bar{\sigma} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}_{i,j} \dot{\epsilon}_{i,j} dV$$

$$= \int_V \bar{\sigma} \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{ij}^{LN} \dot{\epsilon}_{ij}^{LN} + 2\dot{\epsilon}_{ij}^{LN} \dot{\epsilon}_{ij}^{HG} + \dot{\epsilon}_{ij}^{HG} \dot{\epsilon}_{ij}^{HG})} dV$$

여기서,  $\dot{\epsilon}_{ij}^{LN}$  은 선형 속도장에 의한 변형률속도 성분이며,  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$  는 hourglass 속도장에 의한 변형률속도성분이다. 식 (13)에서 정의된  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$  와 식 (15)에서의  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$  의 차이점은  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$  는 한 요소를 대표하는 hourglass 변형률속도인데 반하여,  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$  는  $\dot{\epsilon}_{ij}^{LN}$ 와 마찬가지로 임의의 점에서 정의될 수 있는 변형률 속도 성분이다.

식(15)의 체적적분을 1점 적분법으로 근사시키면 앞서 언급한 바와 같이 hourglass modes에 대하여 고려를 하지 못한다. 따라서, hourglass modes에 대한 보정을 위하여 위의 체적적분을 식(13)에서 정의한 hourglass 변형률속도를 사용하여 다음과 같이 근사시킨다.

$$\int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon} dV \approx \left[ \bar{\sigma} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{LN} \dot{\epsilon}_{ij}^{LN} + \alpha \dot{\epsilon}_{ij}^{HG} \dot{\epsilon}_{ij}^{HG}} \right]_{(\xi, \eta) = (0,0)} \cdot V \quad (16)$$

여기서,  $V$ 은 요소의 체적이며,  $\alpha$ 값을 임의로 결정할 수 있도록 가중치로 놓은 것은  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$ 가, 식 (13)에 나타나있듯이  $\dot{\epsilon}_{ij}^{LN}$  또는  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$ 처럼 1점 적분 시 적분점에서 분석적으로 정의될 수 없고, 기타 무시된 항에 대한 보정을  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG} \dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$ 이 곱하고 있기 때문이다. 이제 유효 변형률속도(effective strain rate)를 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{LN} \dot{\epsilon}_{ij}^{LN} + \alpha \dot{\epsilon}_{ij}^{HG} \dot{\epsilon}_{ij}^{HG}} \quad (17)$$

따라서, 가중치  $\alpha$ 는 hourglass 변형률속도  $\dot{\epsilon}_{ij}^{HG}$ 가 유효 변형률속도에서 차지하는 비중을 나타내는 값이라고 볼 수 있다. 위와 같이 정의된 유효 변형률속도는 1점 적분법에 의하여 계산이 안된 체적적분 값에 대한 보정을 목적으로 하기 때문에 한 요소를 대표하는 유효 변형률속도를 의미하며, 요소 내의 임의의 점에서의 유효 변형률속도를 의미하지는 않는다. 식 (16)으로 정의된 체적적분은 여러 잇점이 있다. 첫째, 식 (17)과 같이 새로 정의된 유효 변형률속도에 의하여 식 (15)의 체적적분의 의미를 그대로 유지시키면서 식을 전개할 수 있으

며, 둘째, hourglass modes 제어의 독립성을 어느 정도 보장할 수 있으며, 셋째, 변분식에서 Newton-Raphson법을 이용하여 속도장의 해를 구할 때 강성행렬(stiffness matrix)의 대칭성을 그대로 유지할 수 있다.

본 해석에서 경계치문제(boundary-value problem)의 해는 다음의 변분식의 해를 구함으로써 얻는다.<sup>(2)</sup>

$$\delta\pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \dot{\epsilon} dV + K \int_V \dot{\epsilon}_{,v} \delta \dot{\epsilon}_{,v} dV - \int_{S_f} F_i \delta u_i dS = 0 \quad (18)$$

또는

$$\frac{\delta\pi}{\delta v_i} = \int_V \bar{\sigma} \frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial v_i} dV + K \int_V \dot{\epsilon}_{,v} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{,v}}{\partial v_i} dV - \int_{S_f} F_i \frac{\partial u_i}{\partial v_i} dS = 0 \quad (19)$$

(단,  $v_i$ 는  $u_{,i}$ 와 동등하다. 서로의 관계에 대하여 Table 2에 나타내었다.)

$\frac{\delta\pi}{\delta v_i}$ 를 만족하는 속도장을 구하기 위하여, 본 해석에서는 Newton-Raphson 반복법과 부분적으로 직접 반복법(direct iteration method)을 사용하였다.

### 2.4 3차원 문제에서 hourglass control

3차원 문제에서 hourglass 속도  $u_{ij}^{HG}$ 는 다음과 같다.

$$u_{ij}^{HG} = \frac{1}{8} u_{iK} (\Gamma_{\beta K} - \frac{1}{V} B_{jK} x_{jJ} \Gamma_{\beta J}) \Gamma_{\beta I} \quad (20)$$

여기서,  $u_{iI}$ 는 각 절점에서의 속도벡터,  $x_{iI}$ 는 각 절점의 좌표값,  $V$ 는 요소의 체적이며,  $\Gamma_{\beta I}$ <sup>(1)</sup>는 3차원 육면체요소의 각 방향으로 4가지의 hourglass mode를 나타내는 기저벡터이다.  $i$ 는  $x, y, z$  각 방향을 의미하며,  $I$ 는 각 절점번호를 의미한다. 그리고,  $\beta$ 는 3차원 육면체요소의 4가지 hourglass modes를 나타내며, Fig. 2에 도시하였다.

2차원에서의 식 (11)과 마찬가지로  $i$ 방향의 hourglass 속도장을 대표할 수 있는  $u_{i\beta}^{HG}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$u_{i\beta}^{HG} = \frac{1}{8} u_{iK} (\Gamma_{\beta K} - \frac{1}{V} B_{jK} x_{jJ} \Gamma_{\beta J}) \quad (21)$$

Table 2 Relationship between  $u_{ii}$  and  $v_i$

$u_{ii}$	$u_{x1}$	$u_{y1}$	$u_{x2}$	...	$u_{y4}$
$v_i$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	...	$v_8$

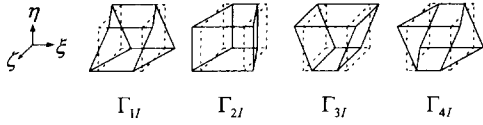


Fig. 2 Hourglass modes in hexahedron

$\dot{u}_{iI}^{HG}$ 가  $i$ 방향의  $I$ 절점에서의 hourglass modes를 나타내는 속도인데 반하여,  $\dot{u}_{i\beta}^{HG}$ 는  $i$ 방향의  $\beta$ 번째 hourglass modes를 대표하는 속도이다. 2차원 문제에서와 같이  $\dot{u}_{i\beta}^{HG}$ 를  $i$ 방향의 특성길이  $l_i^{char}$ 로 나눈 것을 hourglass 변형률속도  $\dot{\epsilon}_{i\beta}^{HG}$ 로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{i\beta}^{HG} = \frac{\dot{u}_{i\beta}^{HG}}{l_i^{char}} \quad (\text{no sum on } i) \quad (22)$$

여기서,  $i$ 방향의 특성길이는 다음과 같이 가정한다.

$$l_i^{char} = \sqrt{\frac{V^z}{B_{ji}B_{ii}}} \quad (i=x, y, z) \quad (23)$$

$$B_{ii} = \int_V \phi_{i,i} dV \quad (24)$$

$$\phi_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi_i)(1 + \eta_i \eta_i)(1 + \zeta_i \zeta_i) \quad (\text{no sum on } I) \quad (25)$$

2차원 문제에서와 마찬가지로 3차원 문제에서의 유효 변형률속도  $\dot{\epsilon}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{LIN} \dot{\epsilon}_{ij}^{LIN} + \alpha \dot{\epsilon}_{i\beta}^{HG} \dot{\epsilon}_{i\beta}^{HG}} \quad (26)$$

여기서, 가중치  $\alpha$ 는 hourglass 변형률속도  $\dot{\epsilon}_{i\beta}^{HG}$ 이 유효 변형률속도에서 차지하는 비중을 나타내는 값이다. 이후 3차원 문제에서의 hourglass control의 방법은, hourglass modes가 각 방향으로 4가지씩 존재함에 따른 수식의 양이 많아지는 것 이외에는 2차원 문제의 경우와 동일하다.

### 3. 유한요소해석 결과

#### 3.1 링 압축시험 해석에서 hourglass control

축대칭조건하의 등온변형과정이라 보았다. 소재인 링(ring)의 높이는 20 mm, 내경은 20 mm, 외경은 40 mm이며, 상하 대칭이므로 상부 2분의 1만을 해석하였다. 유동응력(flow stress)은 변형률속도의 함수로 가정하였다. Fig. 3(a)부터 Fig. 3(f)까지는, 마찰계수  $m$ 은 0.9, 높이 감소율은 40%일 때 hourglass control을 위한 가중치  $\alpha$ 값의 변화에

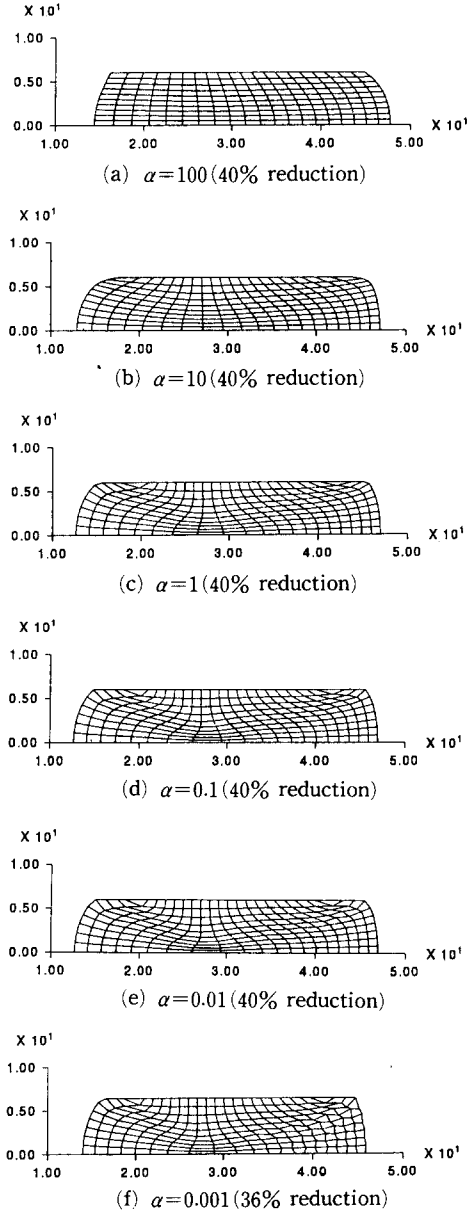


Fig. 3 Grid distortions in ring compression with HGC

따른 재료의 변형양상을 보여주고 있다. 물론 1점 적분을 이용하여 체적적분을 수행하고 hourglass control을 하였을 때의 결과다.  $\alpha$ 가 1보다 큰 경우에는 변형에 대한 저항이 두드러지게 커짐을 볼 수 있으며, 1보다 작은 경우에는 hourglass modes의 발생이 뚜렷해짐을 확인할 수 있다.

본 연구는 2차원 문제해석에서 적분법을 4점 적

**Table 3** The proportion of C. P. U. time to the total simulation time in the simulation of two-dimensional ring compression test with 4-point integration scheme

		Number of elements		
		200	800	1800
C. P. U time ratio	Plastic stiffness matrix evaluation	66.3 %	61.0 %	53.4 %
	Matrix solver	12.6 %	24.0 %	33.4 %

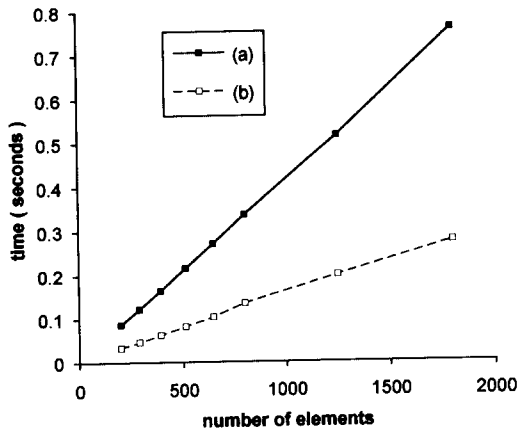
분에서 1점 적분으로 대체하고, 1점 적분의 단점에 의해 발생하는 hourglass modes를 효과적으로 제어하여 전체 계산시간의 50%에서 70%의 비중을 차지하고 있는 강성행렬의 계산시간을 줄이는 것을 목적으로 한다.

Table 3은 본 링 압축시험 해석에서 요소의 개수를 달리하였을 때의, 4점 적분법에 의한 강성행렬 구성에 소요되는 시간과 행렬 방정식을 푸는데 소요되는 시간의 전체 계산시간에 대한 비율을 나타내고 있다.

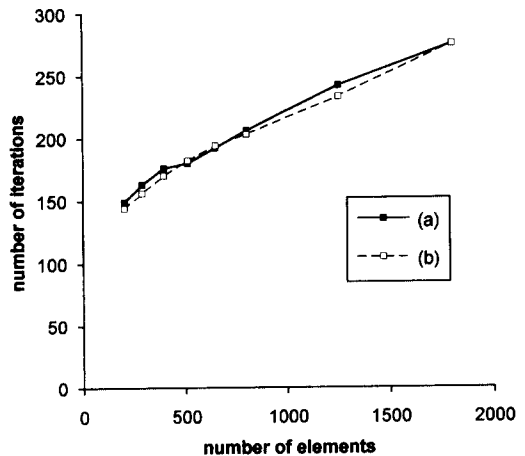
Fig. 4에서는 적분법을 4점 적분으로 한 경우와 hourglass control이 사용된 1점 적분으로 한 경우에 대하여, 전체 요소수에 대한 강성행렬의 1회 계산시간을 도시하고 있다. 이는 위의 두 적분법에 의한 시뮬레이션에서 총 반복계산 회수(total number of iterations)가 같다고 가정하면 4점 적분법을 바탕으로 한 시뮬레이션에서 이론적으로 강성행렬 계산시간의 61.9%를, 1점 적분법을 도입함으로써 단축할 수 있다는 것을 의미한다. 한편, 요소의 수가 증가할수록 4점 적분시 전체 계산시간에

대한, 1점 적분 사용에 의한 전체 계산시간의 단축의 정도가 줄어들는데, 이는 Table 3에서 알 수 있는 바와 같이 요소의 수가 증가함에 따라 강성행렬 구성에 소요되는 계산시간의 비중이 속도장의 해를 구하기 위하여 행렬방정식을 푸는데 소요되는 계산시간의 비중에 대하여 상대적으로 줄어들기 때문이다. 정성적으로 기술하여 강성행렬 구성에 소요되는 시간은 요소의 수가 증가함에 따라 비례적으로 증가하는 반면, 행렬 방정식을 푸는데 소요되는 시간은 절점의 수와 강성 행렬의 폭(bandwidth)의 제곱에 비례하여 증가한다. 따라서, 요소 수의 증가에 따른 후자의 계산시간의 증가정도는 전자의 계산시간의 증가정도보다 대체적으로 강성행렬 폭의 제곱의 증가정도만큼 더 크다할 수 있다. 참고로 계산에 사용한 워크스테이션은 HP9000/730이다.

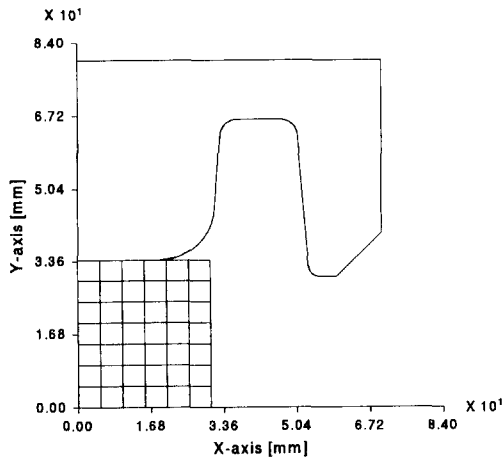
Fig. 5에서는 각각의 적분법에 의한 시뮬레이션에서 반복계산 회수에 대하여 도시하고 있으며, 본 연구의 방법을 적용함으로써 수렴성이 기존의 방법에 비하여 전혀 뒤떨어지지 않음을 알 수 있다.



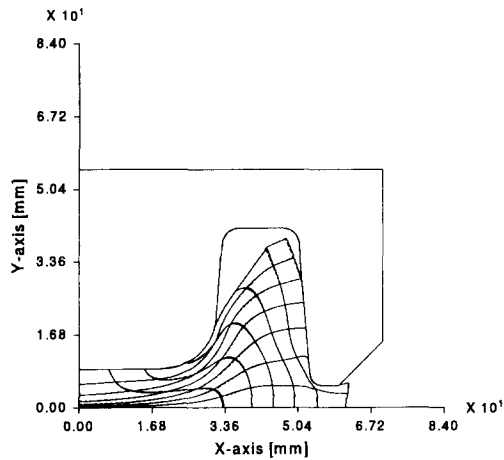
**Fig. 4** The plastic stiffness matrix evaluation time in (a) 4-point integration and in (b) 1-point integration scheme with HGC



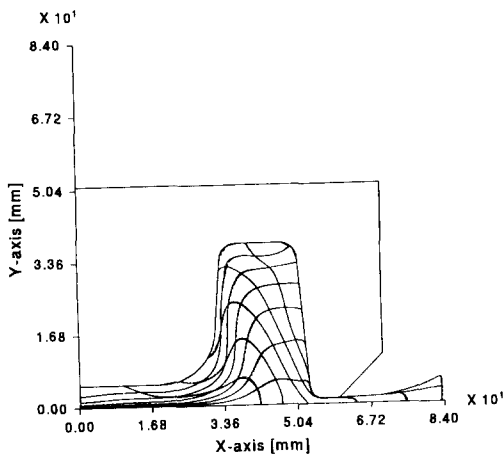
**Fig. 5** The number of iterations by (a) the 4-point integration scheme and by (b) the 1-point integration scheme with HGC



(a) Initial state



(b) 25.0 mm stroke



(c) 28.8 mm stroke

Fig. 6 Comparison of flow patterns:solid line, 4-point integration;dash line, 1-point integration with HGC  $\alpha=1.0$

### 3.2 형 단조문제 해석에서 hourglass control

다이의 형상이 임의로 주어진 경우, 적분법으로 hourglass control을 이용한 1점 적분을 채택했을 때 해의 정확성과 적절한 수렴성이 보장되는지 확인하기 위하여 다이의 형상이 다소 복잡한 형 단조 문제를 해석, 비교하였다. 평면 변형률조건(plane-strain condition)으로서 비등온 변형과정으로 보았다. 다이는 강체로 가정하며, 소재의 재료는 aluminum이고, 유동응력은 온도, 변형률, 변형률 속도의 함수로 보았다. 마찰계수  $m$ 은 0.3으로, hourglass control을 위한 가중치  $\alpha$ 는 1.0으로 하였다.

Fig. 6(a)는 초기 상태를 도시하고 있다. 그리고, Fig. 6(b)와 Fig. 6(c)는 stroke가 25.0 mm일 때와 28.8 mm일 때의 유동형태를, 체적적분법을 4점 적분(실선)으로 한 경우와 1점 적분에 hourglass control(점선)한 경우를 비교하여 도시하고 있다. 그림에서 보듯이 실선과 점선이 구분이 안될 정도로 두 적분법에 의한 유동형태가 잘 일치함을 볼 수 있다. Fig. 7은 두 적분법의 적용에 대한 결과의 비교 자료로서 하중곡선을 나타내고 있다.

계산시간 측면에서는 4점 적분에 의한 시뮬레이션 시간과 요소망 재구성 시간 등을 모두 포함한 총 계산시간을 100%로 보았을 때, hourglass control을 이용한 1점 적분에 의한 총 계산시간은 67.0%로서 33%정도의 계산시간 단축의 효과를 거

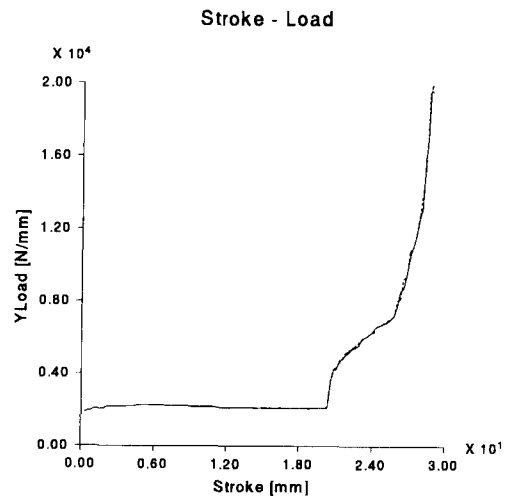
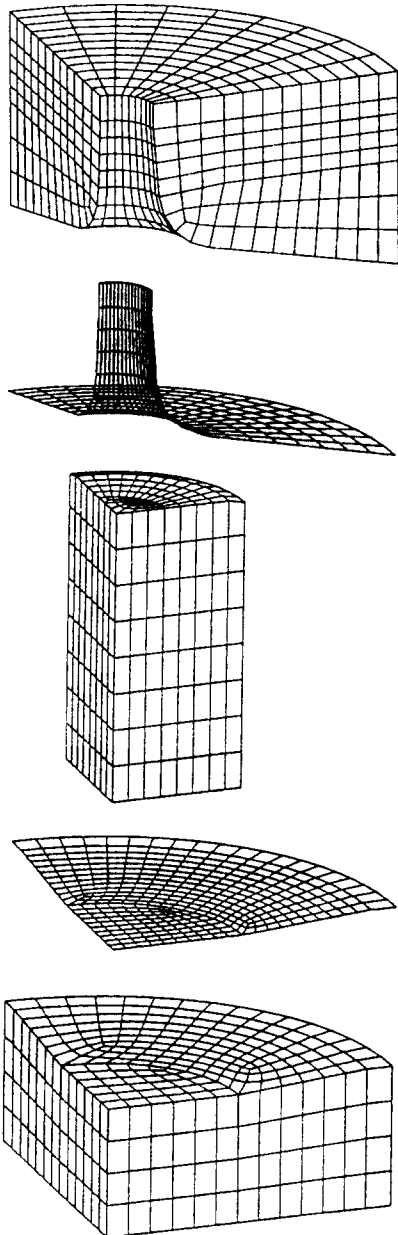


Fig. 7 Comparison of load curves:solid line, 4-point integration;dash line, 1-point integration with HGC  $\alpha=1.0$

**Table 4** The proportion of C. P. U. time to the total simulation time in the simulation of two-dimensional closed-die forging with 4-point integration scheme

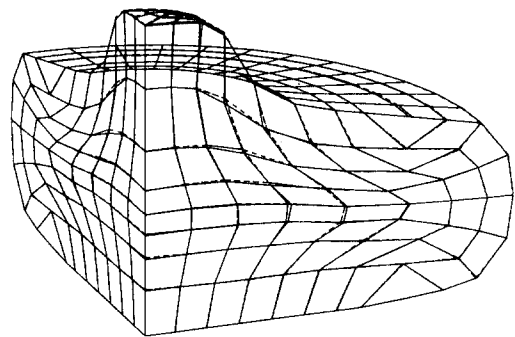
Number of elements		399	800
C. P. U time ratio	Plastic stiffness matrix evaluation	49.4 %	52.4 %
	Matrix solver	17.5 %	14.4 %



**Fig. 8** Initial grid

둘 수 있었다. 이는 링 압축시험해석시 단축 시간의 비율—대략 35%~40%—에 비하여 약간 떨어지는데, 본 문제에서는 요소망 재구성 시간과 열전달 계산시간이 추가됨으로써, 강성행렬 계산시 1점 적분을 도입함으로써 얻은 단축 시간의 비율이 상대적으로 줄어들었기 때문이다. Table 4는 4점 적분시 remeshing 전후의 강성행렬 구성시간과 행렬 방정식을 푸는데 소요되는 시간의 전체 계산 시간에 대한 비율을 나타낸다.

**3.3 3차원 spike forging 해석에서 hourglass control**  
 전체 형상 중에서 4분의 1만을 해석한다. 유동응력은 온도, 변형률, 변형률속도의 함수로 보았으며, 마찰계수  $m$ 은 0.3으로, 체적적분으로 1점 적분법을 사용하였을 때의 hourglass control을 위한 가중치  $\alpha$ 는 1.0으로 하였다. Fig. 8은 초기 상태의 소재와 상부 다이와 하부 다이의 요소망 구성을, 그리고 Fig. 9는 최종 상태(stroke가 1.35inches)에서 소재의 변형양상을 나타내고 있다. 두 적분법의 사용시 그 결과로서 변형양상이 서로 잘 일치함을 볼 수 있으며, 하중곡선 또한 서로 잘 일치함을 확인하였다.



**Fig. 9** The deformed grids:solid line, 8-point integration;dashed line, 1-point integration with HGC  $\alpha = 1.0$



Table 5는 체적적분법을 8점 적분법으로 한 경우와 1점 적분에 hourglass control한 경우의 강성행렬 계산시간을 상대적인 수치로 보여주고 있다. 이는 반복계산 회수가 두 체적적분법의 경우 서로 같다고 가정하면, 1점 적분법을 적용하여 강성행렬 계산시간을 약 65%정도 단축시킬 수 있음을 의미한다.

Table 6은 상부 다이는 요소 855개, 절점 1150개, 하부 다이는 요소 708개, 절점 995개, 공작물은 요소 744개, 절점 972개인 본 해석에서 체적적분법을 8점 적분법을 사용하였을 때의 전체 시뮬레이션 시간에 대한 강성행렬 구성에 소요되는 시간과 행렬방정식을 푸는데 소요되는 시간의 비율을 나타내고 있다. 표에서 보는 바와 같이 2차원 문제와는 달리 강성행렬 구성에 소요되는 계산시간의 비중이 현저히 낮음을 알 수 있다. 2차원 문제에서는 강성행렬 구성에 소요되는 계산시간의 비중이 행렬 방정식을 푸는데 소요되는 계산시간의 비중과 비교하여 오히려 더 크다. 2차원 문제에서는 체적적분법으로 1점 적분법을 사용함으로써 강성행렬 구성에 소요되는 시간을 줄이는 것이 전체 시뮬레이션 시간 단축에 큰 영향을 미칠 수 있었지만, 3차원 문제에서는 강성행렬 구성에 소요되는 계산시간의 비중이 11.1% 정도에 그치는 관계로 체적

적분법으로 1점 적분법을 사용하여도 전체 계산시간의 단축 정도가 극히 미미하다. 그리고, 체적적분법으로 1점 적분법을 사용하였을 때 계산 반복회수가 기존의 방법과 비교하여 일정하게 유지되리라는 보장이 없으므로, 강성행렬 구성에서 단축시킨 계산시간의 효과가 계산반복 회수의 증가로 상쇄될 수도 있다. 다음에 기술된 내용은 본 3차원 spike forging 해석에서 1점 적분법 사용의 불이익을 단적으로 보여주고 있다.

Table 7는 전체 시뮬레이션 시간을 상대적인 수치로 나타내고 있는데, 이 문제의 경우에는 오히려 1점 적분에 hourglass control을 적용했을 때의 계산 시간이, 1회 강성행렬 계산 시간을 줄였음에도 불구하고 더 증가하였음을 보여준다. 그 이유는 다음과 같이 설명할 수 있다. Implicit code의 특성상 다이에 새로 접촉하는 절점이 있으면, 변형 형상을 절점이 접촉할 때까지의 시간증분만큼 갱신한 후 새로운 속도장의 해를 구하기 위하여 계산을 재실행하게 된다. 그런데 이 문제의 경우는 해석 대상의 공작물이 축대칭의 형상이기 때문에 같은 높이의 원주상의 절점들은 동시에 다이에 접촉하게 된다. 하지만, 수치해석상의 오차로 인해 같은 높이의 원주상의 절점들이 동시에 다이에 접촉하지 않는 것처럼 거동한다. 이러한 문제점은 8점 적분

Table 5 Plastic stiffness matrix evaluation time in 3-D analysis

Volumetric integration scheme	Average C. P. U. time (relative)
8-point integration	100 %
1-point integration with hourglass control	35.0 %

Table 6 The proportion of C. P. U. time to the total simulation time in the simulation of three-dimensional spike forging with 8-point integration scheme

	C. P. U. time ratio
Plastic stiffness matrix evaluation	11.1 %
Matrix solver	61.3 %

Table 7 Total C. P. U. time in 3-D spike forging problem analysis

Volumetric integration scheme	Total C. P. U. time (relative)
8-point integration	100 %
1-point integration with hourglass control	121 %

때보다 1점 적분에 hourglass control을 적용했을 때 더욱 두드러지게 부각된다. 이는 1점 적분을 보정하기 위하여 hourglass control을 적용할 때 특성길이(식 (14) 참조)의 결정이 다소 정확도가 떨어지기 때문이다. 그리고, 이러한 접촉거동은 축대칭 형상을 삼차원으로 해석하는 경우에 나타나는 특수한 경우라고 생각된다.

#### 4. 결 론

본 연구의 강소성 유한요소해석에서 체적적분법으로 2차원에서 4점 적분법, 3차원에서 8점 적분법을 사용하여 해석한 결과와 hourglass modes를 제어하는 1점 적분법을 사용하여 해석한 결과를 비교하여 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 1점 적분법에서 hourglass modes의 제어를 위한 가중치  $\alpha$ 를 변화시키며 재료의 변형양상을 관찰한 결과, 1 정도로  $\alpha$ 값을 정하는 것이 2차원의 4점 적분법, 3차원의 8점 적분법에 의한 결과와 가장 근사함을 알 수 있다. 이 적정값은 변형의 복잡성에 따라 변하는 값은 아닌 것으로 생각된다. 가중치  $\alpha$ 값을 1로 하였을 때 3차원 해석시 변형이 다소 경직되는 경향이 있는데 이 경우에는  $\alpha$ 값을 0.5에서 0.9 정도로 약간 작게 주면 해결할 수 있다.

(2) 체적적분법으로 1점 적분법을 사용하고 hourglass modes를 제어하도록 하면 그 결과가 2차원의 4점 적분법 또는 3차원의 8점 적분법에 의한 결과와 근사하게 일치함을 확인할 수 있다. 따라서 변형해석시 사용되는 체적적분법을 1점 적분법으로 대체할 때 해의 정확도와 수렴성을 보장할 수 있음을 알 수 있다.

(3) 체적적분법으로 1점 적분법을 사용하여, 2차원 해석에서 4점 적분법을 사용할 때의 강성행렬 계산시간 중 61.9%를 줄일 수 있으며, 3차원 해석에서 8점 적분법을 사용할 때의 강성행렬계산시간 중 65.0%를 줄일 수 있다.

(4) 체적적분법으로 1점 적분법을 사용할 때 hourglass modes를 제어하는 것은 일종의 오차 보정이기 때문에, 3차원 문제해석에서 8점 적분법을 사용할 때보다 1점 적분법을 사용할 때가 축대칭 공작물의 원주상의 접촉점들의 접촉시각이 균일하지 않다. 따라서 체적적분법으로 1점 적분법을 사용하면, implicit code의 특성상 접촉점 발생에 따

른 계산반복 회수가 상대적으로 증가하게 되며, 1점 적분의 장점인 계산시간 절감의 효과가 상쇄된다.

(5) 강성행렬 계산시간이 전체 계산시간에 비하여 그 비율이 큰 2차원 문제해석의 경우에는 1점 적분법 도입이 전체 계산시간 단축에 큰 영향을 주나, 강성행렬 계산시간의 비율이 비교적 작은 3차원 문제해석의 경우에는 1점 적분법 도입에 의한 계산시간 절감효과가 미미하다. 그러나 3차원 문제해석에서 큰 비중을 차지하고 있는 solver에서의 계산시간이 절감되는 경우에는 1점 적분법 도입에 따른 전체 계산시간 절감의 효과가 더 클 것으로 사료된다.

#### 후 기

본 연구는 1993년도 한국학술진흥재단 자유공모 과제의 일환으로 수행되었으며, 이에 한국학술진흥재단 및 관계자 여러분께 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Flanagan, D. P. and Belytschko, T., 1981, "A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control," *Int. J. Num. Meths. Engrg.*, Vol. 17, pp. 678~706.
- (2) Kobayashi, S., Oh, S. I. and Altan, T., 1989, *Metal Forming and the Finite-Element Method*, Oxford University Press.
- (3) Flanagan, D. P. and Belytschko, T., 1984, "Eigenvalues and Stable Time Steps for the Uniform Hexahedron and Quadrilateral," *J. Appl. Mechs.*, Vol. 51, pp. 35~40.
- (4) Schulz, J. C., 1985, "Finite Element Hourglassing Control," *Int. J. Num. Meths. Engrg.*, Vol. 21, pp. 1039~1048.
- (5) Belytschko, T., Ong, J. S., Liu W. K. and Kennedy, J. M., 1984, "Hourglass Control in Linear and Nonlinear Problems," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 43, pp. 251~276.
- (6) Matejovic, P. and Adamik, V., 1988, "A One-Point Integration Quadrilateral with Hourglass Control in Axisymmetric Geometry," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 70, pp. 301~320.

- (7) Oh, S. I., Wu, W. T., Tang, J. P. and Vedhanayagam, A., 1991, "Capabilities and Applications of FEM Code DEFORM: The Perspective of the Developer," *J. Mat. Proc. Tech.*, Vol. 27, pp. 25~.
- (8) Belytschko, T., Lin, J. I. and Tsay, C. S., 1984, "Explicit Algorithm for the Nonlinear Dynamics of Shells," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 42, pp. 225~251.
- (9) 추만석, 김영석, Tomita, Y., 1989, "강소성 유한요소해석의 안정화와 고능률화에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제13권, 제3호, pp. 317~322.
- (10) Liu, W. K., J.Ong, J. S. and Uras, R. A., 1985, "Finite Element Stabilization Matrices-a Unification Approach," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 53, pp. 13~46.