

〈논 문〉

공간곡선보요소에서의 감차최소화 이론

문원주* · 김용우** · 민옥기*** · 이강원*

(1996년 2월 15일 접수)

Reduced Minimization Theory in Skew Beam Element

Won-joo Moon, Yong-woo Kim, Oak-key Min and Kang-won Lee

Key Words : Reduced Minimization Theory(감차최소화 이론), Skew Beam Element(공간곡선보요소), Locking Phenomenon(강성과잉현상), Spurious Constraint(가성구속), Constrained Strain Energy(구속에너지)

Abstract

Since the skew beam element has two curvatures which are a curvature and a torsion, spatial behavior of curved beam which cannot be included in one plane can be analyzed by employing the skew beam element. The C^0 -continuous skew beam element shows the stiffness locking phenomenon when full integration is employed. The locking phenomenon is characterized by two typical phenomena ; one is the much smaller displacement than the exact one and the other is the undulation phenomenon in stress distribution. In this paper, we examine how unmatched coefficient in the constrained energy brings about the locking by Reduced Minimization Theory. We perform the numerical test for various skew beam models and compare theoretical results with numerical ones. These comparisons show that uniformly full integration(UFI), which employs full integration for the constrained energy, entails the locking phenomenon. But, the use of uniformly reduced integration(URI) or selectively reduced integration(SRI), which employs reduced integration for constrained energy, does not produce the significant errors of displacements or the undulation phenomenon in stress distribution since they do not entails the locking. Additionally, the error due to the approximated parameters for describing the geometry of skew beam is examined.

1. 서 론

곡선보요소(curved beam element)는 직선보요소, 판요소 및 셸요소 등과 함께 구조물의 중요한 기본 부재로써 뿐만 아니라 보강재로서 공학적으로 다양하게 응용되어 왔다. 이러한 공학적인 중요성

때문에 곡선보요소의 거동에 대한 연구가 지속적으로 이루어져 왔다. 그러나 지금까지의 연구는 주로 중립축이 한 평면상에 포함되어 있는 면내변형곡선보(in-plane-deformable curved beam)^(1~4)나 면외변형 곡선보(out-of-plane-deformable curved beam)^(5~7)에 대해서 이루어져 왔다. 이러한 면내변형 및 면외변형곡선보들은 절점당 3자유도를 갖고 1개의 곡률반경(radius of curvature)을 갖기때문에 면내변형거동과 면외변형거동 사이의 연관(coupling)이나 셸요소가 갖는 2개의 곡률효과를

*회원, 연세대학교 대학원 기계공학과

**회원, 순천대학교 기계공학과

***회원, 연세대학교 기계설계학과

묘사하기에는 어려움이 있었다.

그러나 Martini와 Vitaliani⁽⁸⁾는 Timoshenko 보 이론을 사용하여 보다 일반적인 곡선보요소를 해석할 수 있는 C⁰-연속 공간곡선보요소(C₀-continuous skew beam element)를 개발하였다. 이 요소는 절점당 6개의 자유도를 포함하며 굽힘곡률(curvature)과 비틀림률(torsion)의 2개의 곡률을 도입하여 한 평면상에 놓여있지 않은 보요소의 공간적인 거동의 해석이 가능하다. 그러나 수치해석시 발생하는 강성과잉현상(locking phenomenon)의 영향을 감소시키기 위해서 Martini와 Vitaliani는 고차요소(5-절점요소~11-절점요소)를 사용하였다. 이러한 고차요소의 사용은 적은 수의 요소로 이론해에 접근할 수 있고, 가상 구속(spurious constraint)에 의한 오차를 감소시켜서 강성과잉현상의 영향을 줄여줄 수 있는 장점이 있지만 고차의 형상함수를 사용하게 되므로 프로그램이 복잡하게 되고 계산시간이 많이 걸리는 점 등의 문제점을 안고 있다.

변위를 기초로 하는 유한요소법을 비구속에너지(unconstrained strain energy)를 포함하고 있는 복함수(functional)에 적용하여 수치화하면 강성과잉현상으로 인한 심각한 오차가 발생할 수 있다. 강성과잉현상은 변위함수를 적절하게 가정하지 못함으로써 완전적분(full integration)을 수행할 때에 가상구속이 발생하여 강성이 실제보다 크게 계산되는 현상이다. 강성과잉현상이 발생되면 변위는 실제보다 매우 작게 계산되며 응력분포는 심한 기복현상(undulation phenomenon in stress distribution)을 보인다. 이러한 강성과잉현상을 해결하기 위한 방안에 대한 연구가 지난 20년간의 주된 연구 과제의 한 주류가 되어왔다. 제시된 대표적인 방법 중의 하나는 감차적분법(reduced integration method)이다. Prathap 등⁽¹⁾은 면내변형곡선보의 전단에너지와 인장에너지에 대한 완전적분이 어떻게 강성과잉현상을 발생시키는가를 설명하였다. Kamoulakos⁽²⁾는 강성과잉현상을 일으키는 에너지에 대해서 감차적분을 하는 이유를 간단한 예를 들어 설명하고, 전단변형률에 대해서 감차적분을 그리고 나머지 변형률성분에 완전적분을 적용하는 selectively-very reduced integration을 제안하였다. Min과 Kim⁽⁹⁾은 감차최소화 이론(reduced minimization theory)을 제안하여 감차적분의 역할을 설명하였다. 감차최소화 이론은 가상 구속, 최적 응력점의 위치 및 적분차수의 관계를 통합적인 관

점에서 설명할 수 있는 이론이다. 강성과잉현상을 해결하기 위한 기존의 연구결과들은 대부분 면내변형곡선보에 집중되어 왔다. 그러나 감차최소화 이론은 면내곡선보요소에 적용할 수 있을 뿐만 아니라 공간곡선보 및 판, 셸요소에도 확장 적용할 수 있는 이론이다.^(9~11)

본 논문에서는 Timoshenko 보 이론으로부터 유도한 공간곡선보의 복함수에 감차최소화 이론을 적용하여 각각의 적분방법이 가상구속을 발생시키는지를 이론적으로 판단하고자 한다. 또한 4-절점요소와 5-절점요소를 사용한 수치실험의 결과를 비교 검토하여 감차최소화에 의한 이론적 예측을 검증하고자 한다.

2. 공간곡선보요소의 에너지 복함수

2.1 변위-변형을 관계식

공간곡선보요소의 해석을 위해서 Fig. 1에 도시한 바와 같은 좌표계를 사용하였다. 직교좌표계에 대한 공간곡선보의 중립축 C의 위치벡터 **r**은 다음의 벡터함수로 표현된다.

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

공간곡선보의 중립축 상의 임의의 점에서 국부좌표계(local coordinate)의 단위벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ \mathbf{n} &= \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|^{-1} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2)$$

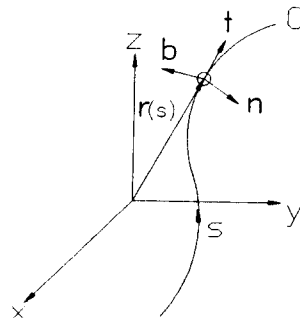


Fig. 1 Coordinate system of the skew beam

공간좌표계에서 Frenet 공식⁽¹²⁾은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= x\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -x\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau\mathbf{n} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 굽힘곡률(x)과 비틀림률(τ)은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} x &= \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| \quad (\geq 0) \\ \tau &= -\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} \end{aligned} \quad (4)$$

공간곡선보의 변위 및 응력들은 Fig. 2에 도시한 바와 같다. 논의의 편의를 위해서 변위에 관련된 벡터 \mathbf{a} 와 회전변수에 관련된 벡터 $\boldsymbol{\theta}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= \{u \ v \ w\} \\ \boldsymbol{\theta}^T &= \{\theta_t \ \theta_n \ \theta_b\} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, u 는 \mathbf{t} 방향의 인장변위이고 v, w 는 각각 \mathbf{n}, \mathbf{b} 방향의 처짐이다. 또한 $\theta_t, \theta_n, \theta_b$ 는 각각 $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ 방향의 회전을 의미한다. Timoshenko 보 이론에 의해 전단변형률 γ_n, γ_b 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{ds} \cdot \mathbf{n} &= \theta_b + \gamma_b \\ \frac{d\mathbf{a}}{ds} \cdot \mathbf{b} &= -\theta_n + \gamma_n \end{aligned} \quad (6)$$

공간곡선보의 변형률벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_t \ \gamma_b \ \gamma_n \ \chi_t \ \chi_n \ \chi_b\} \quad (7)$$

여기서, ε_t 은 \mathbf{t} 방향의 인장변형률(extensional

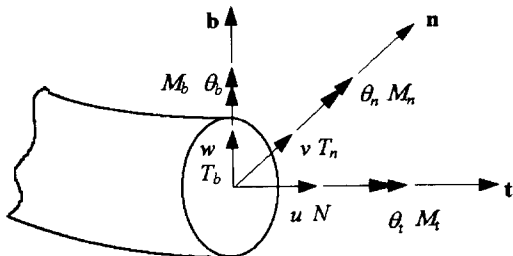


Fig. 2 Generalized displacements and stresses of the skew beam

strain)이며, γ_b 와 γ_n 는 각각 \mathbf{n}, \mathbf{b} 방향에 수직인 평면에서의 \mathbf{b}, \mathbf{n} 방향의 전단변형률(shear strain)이다. 또한 χ_t, χ_n 및 χ_b 는 각각 $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ 방향의 회전변형률(rotational strain)을 의미한다. 이때 각각의 변형률은 Frenet 공식을 적용하면 다음 식과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_t = \frac{d\mathbf{a}}{ds} \cdot \mathbf{t} = \frac{du}{ds} - xv \quad (8)$$

$$\gamma_b = \frac{d\mathbf{a}}{ds} \cdot \mathbf{n} - \theta_b = \frac{dv}{ds} + xu - \tau w - \theta_b \quad (9)$$

$$\gamma_n = \frac{d\mathbf{a}}{ds} \cdot \mathbf{b} + \theta_n = \frac{dw}{ds} + \tau v + \theta_n \quad (10)$$

$$\chi_t = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \cdot \mathbf{t} = \frac{d\theta_t}{ds} - x\theta_n \quad (11)$$

$$\chi_n = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \cdot \mathbf{n} = \frac{d\theta_n}{ds} + x\theta_t - \tau\theta_b \quad (12)$$

$$\chi_b = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \cdot \mathbf{b} = \frac{d\theta_b}{ds} + \tau\theta_n \quad (13)$$

2.2 응력-변형률 관계식

공간곡선보의 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (14)$$

여기서, 응력벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{N \ T_n \ T_b \ M_t \ M_n \ M_b\} \quad (15)$$

여기서, N 은 \mathbf{t} 방향의 인장력(extensional force)이며, T_n 와 T_b 는 각각 \mathbf{n}, \mathbf{b} 방향의 전단력(shear force)이다. 또한 M_t 는 \mathbf{t} 방향의 비틀림모멘트(torsional moment)이며, M_n 와 M_b 는 각각 \mathbf{n}, \mathbf{b} 방향의 굽힘모멘트(bending moment)를 의미한다. 탄성행렬 \mathbf{D} 는 다음 식과 같다.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GK & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_b \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, A 는 보의 단면적이고 A_n 및 A_b 는 보의 단면적에 전단보정계수(shear correction factor)를 곱한 값이다. 또한 GK 는 비틀림강성(torsional rigidity)이며 J_n 과 J_b 는 각각 \mathbf{n}, \mathbf{b} 방향의 단면 2차 모멘트(flexural moment of inertia)이며 E 와 G 는 각각 탄성계수와 전단계수를 의미한다.

2.3 에너지 복합수

공간곡선보의 에너지 복합수⁽⁶⁾는 다음과 같다.

$$I = \frac{1}{2} \int_{\epsilon} \{ EA\epsilon_i^2 + GA_n\gamma_b^2 + GA_b\gamma_n^2 + GK\chi_i^2 + EJ_n\chi_n^2 + EJ_b\chi_b^2 \} ds \quad (17)$$

원형 단면을 갖는 공간곡선보의 경우 식 (17)의 각 계수들은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} EA &= E \frac{\pi d^2}{4} \\ GA_n &= GA_b = \frac{E}{2(1+\nu)} k \frac{\pi d^2}{4} \\ GK &= \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\pi d^4}{32} \\ EJ_n &= EJ_b = E \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)을 이용하여 식 (17)의 복합수를 다시 정리하면 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} I &= \frac{EJ_n}{2} \int_s \left\{ \frac{16}{d^2} \epsilon_i^2 + \frac{8k}{(1+\nu)} \frac{1}{d^2} \gamma_b^2 + \frac{8k}{(1+\nu)} \frac{1}{d^2} \gamma_n^2 + \frac{1}{(1+\nu)} \chi_i^2 + \chi_n^2 + \chi_b^2 \right\} ds \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에서 보는 바와 같이 단면의 지름 d가 감소함에 따라 공간곡선보의 복합수 중에서 인장 강성, 면내 전단강성 및 면외 전단강성이 지배적이게 된다. 식 (19)의 복합수 중에서 인장변형에너지와 **n**-방향 및 **b**-방향 전단변형에너지는 구속에너지 (constrained strain energy) 이고 비틀림변형에너지와 **b**-방향 및 **b**-방향 굽힘변형에너지는 비구속에너지 (unconstrained strain energy) 이다.

2.4 유한요소 수식화

변위를 (n-1)차 형상함수를 사용하여 근사화시키고, 식 (17)의 복합수에 변분원리를 적용하여 다음과 같은 요소강성행렬을 얻는다.

$$K^e = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| d\xi \quad (20)$$

여기서, 자코비안행렬식(|J|)과 행렬 **B**는 다음과 같다.

$$|J| = \frac{ds}{d\xi} \quad (21)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \dots \mathbf{B}_n) \quad (22)$$

식 (22)의 부분행렬 **B_i**는 다음과 같다.

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{ds} - xN_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ xN_i & \frac{dN_i}{ds} - \tau N_i & 0 & 0 & -N_i \\ 0 & \tau N_i & \frac{dN_i}{ds} & 0 & N_i \\ 0 & 0 & 0 & xN_i & \frac{dN_i}{ds} - \tau N_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau N_i & \frac{dN_i}{ds} \end{bmatrix} \quad (23)$$

요소강성행렬을 전체좌표계에서 표시하기 위해서 다음 식과 같은 변환행렬을 사용하였다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서, 부분행렬 **T_i**는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} t_{xi} & t_{yi} & t_{zi} & 0 & 0 & 0 \\ n_{xi} & n_{yi} & n_{zi} & 0 & 0 & 0 \\ b_{xi} & b_{yi} & b_{zi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{xi} & t_{yi} & t_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & n_{xi} & n_{yi} & n_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & b_{xi} & b_{yi} & b_{zi} \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i^T &= (t_{xi} \ t_{yi} \ t_{zi}) \\ \mathbf{n}_i^T &= (n_{xi} \ n_{yi} \ n_{zi}) \\ \mathbf{b}_i^T &= (b_{xi} \ b_{yi} \ b_{zi}) \end{aligned} \quad (26)$$

라 나타내면, **t_i**, **n_i** 및 **b_i**는 각각 절점 *i*에서의 단위 접선벡터 (unit tangent vector), 단위주법선벡터 (unit principal normal vector) 및 단위배법선벡터 (unit binormal vector)이다. 또한 Jacobian 행렬식 (Jacobian determinant), 굽힘곡률 (*x*) 및 비틀림률 (*τ*)은 국부좌표계에서 형상함수를 사용하여 근사화시키면 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{ds}{d\xi} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{d\xi} x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{d\xi} y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{d\xi} z_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (27)$$

$$x = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} \right|}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \right|} \quad (\geq 0) \quad (28)$$

$$\tau = -\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \cdot \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{d\xi^3} \right) \quad (29)$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} \right|$$

위 식에서 알 수 있듯이 비틀림율을 계산하기 위해서는 중립축의 위치벡터 \mathbf{r} 의 3계 미분이 필요하므로 형상함수는 최소 3차 이상이 되어야 한다. 따라서 공간곡선보요소를 해석하기 위해서는 최소 3차 이상의 요소, 즉 4-절점 이상의 요소를 사용해야 한다.

3. 감차최소화 이론

본 논문에서 사용한 공간곡선보와 같이 곡선좌표계에서 수식화된 C^0 -연속곡선보에서 강성과잉현상이 발생하기 위한 필요조건⁽⁹⁾은 다음과 같다.

- (1) 불일치계수(unmatched coefficient)가 존재해야 한다.
- (2) 수치적분시 완전적분이 적용되어야 한다.
- (3) 가성구속을 포함하는 에너지모드가 penalty parameter를 동반해야 한다.
- (4) 내삽함수에 사용되는 다항식의 차수가 높지 않아야 한다.

공간곡선보의 변위함수들을 국부좌표계 ξ ($-1 \leq \xi \leq +1$)에서 3차 근사함수를 사용하여 근사화시키면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \\ v &= b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 \\ w &= c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 \\ \theta_t &= d_0 + d_1\xi + d_2\xi^2 + d_3\xi^3 \\ \theta_n &= e_0 + e_1\xi + e_2\xi^2 + e_3\xi^3 \\ \theta_b &= f_0 + f_1\xi + f_2\xi^2 + f_3\xi^3 \end{aligned} \quad (30)$$

식 (8)부터 식 (13)까지의 변형률을 식 (30)의 근사변형률을 사용하여 표현하면 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \frac{d\xi}{ds} \frac{du}{d\xi} - xv \\ &= \left(\frac{1}{|J|} a_1 - xb_0 \right) + \left(\frac{2}{|J|} a_2 - xb_1 \right) \xi \\ &\quad + \left(\frac{3}{|J|} a_3 - xb_2 \right) \xi^2 - xb_3 \xi^3 \\ \gamma_b &= \frac{d\xi}{ds} \frac{dv}{d\xi} + xu - \tau w - \theta_b \\ &= (xa_0 - \frac{1}{|J|} b_1 - \tau c_0 - f_0) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &+ (xa_1 - \frac{2}{|J|} b_2 - \tau c_1 - f_1) \xi \\ &+ (xa_2 - \frac{3}{|J|} b_3 - \tau c_2 - f_2) \xi^2 \\ &+ (xa_3 - \tau c_3 - f_3) \xi^3 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{d\xi}{ds} \frac{dw}{d\xi} + \tau v + \theta_n \\ &= (\tau b_0 + \frac{1}{|J|} c_1 + e_0) + (\tau b_1 + \frac{2}{|J|} c_2 + e_1) \xi \\ &\quad + (\tau b_2 + \frac{3}{|J|} c_3 + e_2) \xi^2 + (\tau b_3 + e_3) \xi^3 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \chi_t &= \frac{d\xi}{ds} \frac{d\theta_t}{d\xi} - x\theta_n \\ &= \left(\frac{1}{|J|} d_1 - xe_0 \right) + \left(\frac{2}{|J|} d_2 - xe_1 \right) \xi \\ &\quad + \left(\frac{3}{|J|} d_3 - xe_2 \right) \xi^2 - xe_3 \xi^3 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{d\xi}{ds} \frac{d\theta_n}{d\xi} + x\theta_t - \tau\theta_b \\ &= (xd_0 + \frac{1}{|J|} e_1 - \tau f_0) + (xd_1 + \frac{2}{|J|} e_2 - \tau f_1) \xi \\ &\quad + (xd_2 + \frac{3}{|J|} e_3 - \tau f_2) \xi^2 + (xd_3 - \tau f_3) \xi^3 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \chi_b &= \frac{d\xi}{ds} \frac{d\theta_b}{d\xi} + \tau\theta_n \\ &= (\tau e_0 + \frac{1}{|J|} f_1) + (\tau e_1 + \frac{2}{|J|} f_2) \xi \\ &\quad + (\tau e_2 + \frac{3}{|J|} f_3) \xi^2 + \tau e_3 \xi^3 \end{aligned} \quad (36)$$

여기서, 밑줄친 항은 불일치계수⁽⁹⁾를 나타낸다. 공간곡선보의 복합수에서 6개의 에너지모드 모두가 불일치계수를 포함하고 있어서 완전적분을 적용할 경우 가성구속이 발생한다. 그러나 강성과잉현상이 발생하기 위해서는 가성구속을 포함하는 에너지모드가 penalty parameter를 동반해야 하므로 구속 에너지에 완전적분을 적용할 경우에 강성과잉현상을 유발시킨다. 본 절에서는 감차최소화 이론을 적용하여 구속에너지에 내재된 불일치계수가 어떻게 가성구속화 되는지에 대해서 설명하고, 가성구속의 발생을 피하기 위한 적분차수 및 최적응력점의 위치에 대해서 설명하고자 한다.

공간곡선보의 복합수는 각각의 에너지가 제공항으로 구성되어 있으므로 식 (17)의 복합수를 최소화하는 것은 각각의 구속에너지항과 비구속에너지항을 최소화하는 것과 동일하다. 식 (17)에서 단면의 지름 d 가 영으로 접근할 경우, 각 구속에너지는 영으로 접근한다. 즉,

$$\frac{1}{2} \int_s EA \epsilon^2 ds = 0 \tag{37}$$

$$\frac{1}{2} \int_s GA_b \gamma_n^2 ds = 0 \tag{39}$$

$$\frac{1}{2} \int_s GA_n \gamma_n^2 ds = 0 \tag{38}$$

먼저 식 (37)의 최소화과정을 살펴보자: 식 (37)

Table 1 The error-moment equation, constraints, strain field and optimal points of 4-noded and 5-noded skew beam elements; where (T) denotes the true constraint and (S) denotes the spurious constraint

	4-noded element	5-noded element
Assumed strain field	$\epsilon_t = A_3^* \xi^3 + A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0$	$\epsilon_t = A_4^* \xi^4 + A_3 \xi^3 + A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0$
Full minimization	<p>► Error-moment equation</p> $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^2 d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^3 d\xi = 0$ <p>► Constraints</p> $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ (T) $A_3^* = 0$ (S) <p>► Strain field</p> $\epsilon_t = 0$	<p>► Constraints</p> $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^2 d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^3 d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^4 d\xi = 0$ <p>► Constraints</p> $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$ (T) $A_4^* = 0$ (S) <p>► Strain Field</p> $\epsilon_t = 0$
Reduced minimization	<p>► Error-moment equation</p> $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^2 d\xi = 0$ <p>► Constraints</p> $A_0 = A_3 = 0$ (T) $A_1 + \frac{3}{5} A_3^* = 0$ (S) <p>► Strain field</p> $\epsilon_t = A_3^* \xi \left(\xi^2 - \frac{3}{5} \right)$ <p>► Optimal points</p> $\xi = 0, \xi = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	<p>► Error-moment equation</p> $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^2 d\xi = 0$ $\int_{-1}^{+1} \epsilon_t \xi^3 d\xi = 0$ <p>► Constraints</p> $A_1 = A_3 = 0$ (T) $A_0 - \frac{3}{35} A_4^* = 0$ (S) $A_2 + \frac{6}{7} A_4^* = 0$ (S) <p>► Strain field</p> $\epsilon_t = A_4^* \left(\xi^4 - \frac{6}{7} \xi^2 + \frac{3}{35} \right)$ <p>► Optimal points</p> $\xi = \pm \sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}}$

의 좌변에 포함된 인장변형률(ϵ_i)은 식 (8)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon_i = \frac{du}{ds} - xv = \frac{d\xi}{ds} \frac{du}{d\xi} - xv = \frac{1}{|J|} \frac{du}{d\xi} - xv \quad (40)$$

자코비안행렬식의 값이 상수인 n -절점요소를 사용하여 인장변형률에 관련된 변위들을 근사화시키면, 변위 u, v 는 다음의 $(n-1)$ 차 다항식으로 표현된다.

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi^k \quad (41)$$

$$v = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \xi^k \quad (42)$$

위의 변위함수를 사용하면 인장변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= -xb_{n-1}\xi^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \left\{ \frac{(k+1)}{|J|} a_{k+1} - xb_k \right\} \xi^k \\ &= A_{n-1}^* \xi^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} A_k \xi^k \end{aligned} \quad (43)$$

여기서, 불일치계수 A_{n-1}^* 과 일치계수 $A_k (k=0, 1, 2, \dots, n-2)$ 는 다음과 같다.

$$A_{n-1}^* = -xb_{n-1} \quad (44)$$

$$A_k = \frac{(k+1)}{|J|} a_{k+1} - xb_k \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-2) \quad (45)$$

식 (43)의 근사 인장변형률을 식 (37)에 대입하여 얻어지는 근사 인장변형에너지는 다음의 두식을 사용하여 최소화시킬 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} EA \epsilon_i^2 |J| d\xi \right) = 0 \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial b_k} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} EA \epsilon_i^2 |J| d\xi \right) = 0 \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (47)$$

식 (43)을 사용하여 식 (46)과 식 (47)은 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{-1}^{+1} \epsilon_i \xi^k d\xi = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (48)$$

$$\int_{-1}^{+1} \epsilon_i \xi^k d\xi = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-2 \quad (49)$$

식 (48)은 모든 계수가 영이어야 한다는 조건을 요구한다. 따라서 1개의 가성구속이 발생한다. 반면에 식 (49)는 불일치계수가 영으로 되는 조건을

요구하지 않는다. 그러므로 식 (48)에 의해서 불일치계수가 영으로 되는 조건(가성구속조건)을 부과하지 않고서도 구속에너지를 최소화할 수 있다. 이러한 종류의 최소화를 '감차최소화'라하고 구속에너지를 최소화하는 식들을 오차-모멘트식(error-moment equation)⁽⁹⁾이라 한다.

오차-모멘트식에 의해 얻은 구속조건을 사용하여 가정한 구속변형률(constrained strain)을 표현하면, 요소 내에서 변형률이 영이 되는 특정점이 존재하게 된다. 따라서 이러한 점에서 변형률을 채취하면 가성구속을 발생시키지 않고서 정확한 변형률 값을 계산할 수 있게 된다. 이러한 점들을 최적응력점(spurious constraint-free optimal stress point)이라 부르며, 이 점들은 Gauss 수치적분법을 사용할 경우의 감차적분점과 일치한다.⁽⁹⁾ 따라서 감차최소화(즉, 감차적분)를 사용하면 강성과잉현상을 피할 수 있다.

앞에서 보인 동일한 방법을 사용하여 다른 구속에너지(면내 전단변형에너지 및 면외 전단변형에너지)에 대해서도 동일한 결과를 얻을 수 있다. Table 1에 4-절점 및 5-절점 요소를 사용하여 오차-모멘트식, 구속조건, 변위장 및 최적응력점을 나타내었다.

4. 수치해석 및 검토

앞 절에서 감차최소화 이론을 사용하여 가성구속과 강성과잉현상에 대해서 설명하였다. 이 결과를 검증하기 위해서 앞 절에서 수식화한 공간곡선보의 강성행렬을 이용하여 프로그램을 작성하여 수치해석을 실시하였다. 수치해석 모델은 원형 단면을 갖는 면내변형곡선보, 면외변형곡선보 및 나선형 공간곡선보를 선택하였다. 각각의 이론해는 Castigliano의 정리를 이용하여 구하였으며, 각 모델의 재료상수는 다음과 같다.

Young's modulus :	$E=210 \text{ GPa}$
Poisson's ratio :	$\nu=0.3$
Shear modulus :	$G=80.7 \text{ GPa}$
Shear correction factor ⁽¹³⁾ :	$k = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$
	$=8.886364$

단면의 지름 d 와 R 의 비(d/R)에 따른 효과를 검토하기 위해서 각 모델에 대해서 $d/R=0.01$ 부터

Table 2 Integration schemes in n-noded element, $n \geq 4$

Integ. scheme \ Strain	Extensional strain (ϵ_t)	b-directional strain (γ_b)	n-directional shear strain (γ_n)	Torsional strain (χ_t)	n-directional bending strain (χ_n)	b-directional bending strain (χ_b)
UFI	n	n	n	n	n	n
URI	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1
SRI	n-1	n-1	n-1	n	n	n

$d/R=1.0$ 의 값을 갖는 단면의 지름 d 를 택하였다. 또한 적분방법에 따른 강성과잉현상의 효과를 알아보기 위해서 Table 2의 세 가지 적분방법을 사용하여 수치해석을 실시하였다. UFI는 모든 에너지 모드에 대해서 완전적분을 적용한 일괄적 완전적분 방법(uniformly full integration)이고, URI는 모든 에너지모드에 대해서 감차적분을 적용한 일괄적 감차적분(uniformly reduced integration)을 나타내며 또한 SRI는 강성과잉현상을 유발시키는 구속에너지에 대해서만 감차적분을 적용하는 선별적 감차적분법(selective reduced integration)을 의미한다.

공간곡선보의 에너지 복합수는 3절에서 보인 바와 같이 3개의 구속에너지와 3개의 비구속에너지로 구성된다. 따라서 구속에너지에 가성구속조건을 부과하는 UFI는 수치해의 오차가 클 것으로 예측되는 반면에 구속에너지에 가성구속조건을 부과하지 않고서도 복합수를 최소화하는 SRI 및 URI의 경우는 오차가 적게 나타날 것으로 예측된다.

4.1 면내변형곡선보

공간곡선보 요소의 면내변형 모드에서의 수치해의 거동을 조사하기 위해서 Fig. 3과 같은 모델을 선정하여 수치실험을 실시하였다.

여기서, 반경 R 은 5m이고 곡선보의 한 끝은 자유단이며 나머지 한 끝은 고정단이다. 또한 하중

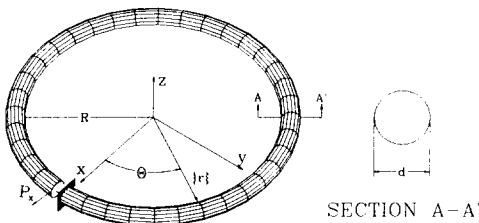


Fig. 3 Geometry of in-plane-deformable curved beam model Section A-A'

P_x 는 자유단에 작용하며 크기는 100 N이다. 사용한 요소는 5-절점요소이며 요소수는 4개이다.

하중이 가해지는 자유단에서 x-방향의 처짐의 이론해에 대한 백분율 오차를 Fig. 4에 도시하였다. Fig. 4의 결과를 보면 구속에너지에 대해서 완전적분을 적용한 UFI의 경우는 심각한 오차가 발생하는 반면에 구속에너지에 대해서 감차적분을 적용한 SRI 및 URI를 적용한 경우는 오차가 적게 발생하였다. 또한 비구속에너지에 포함된 가성구속으로 인한 오차의 영향이 매우 적기 때문에 SRI 및 URI를 적용한 경우는 유사한 결과를 나타내었다. 이는 SRI와 URI는 최적응력점에서 변형률을 계산함으로써 강성과잉현상의 원인이 되는 가성구속을 부과하지 않기 때문이다. UFI의 경우에는 d/R 이 감소할수록 강성과잉현상이 심하게 발생하여 오차가 크게 발생하였다. 이는 R 이 일정할 경우, 단면의 반지름 d 가 감소함에 따라서 구속에너지에 포함되어 있는 가성구속이 penalty parameter에 의

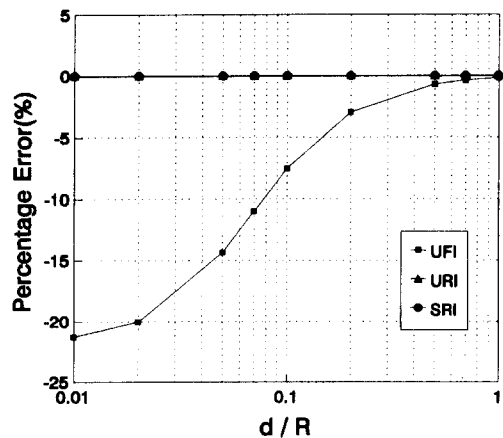


Fig. 4 Percentage error of x-directional deflection at $\theta=2\pi$ of in-plane-deformable curved beam model with respect to d/R

해서 강하게 부과되기 때문이다.⁽⁵⁾

4.2 면외변형곡선보

공간곡선보 요소의 면외변형 모드에서의 수치해의 거동을 조사하기 위해서 Fig. 5와 같은 모델을 선정하여 수치실험을 실시하였다.

여기서, 반경 R은 5m이고 곡선보의 한 끝은 자유단이며 나머지 한 끝은 고정단이다. 또한 하중 P_z는 자유단에 작용하며 크기는 100 N이다. 사용한 요소는 5-절점요소이며, 요소수는 4개이다.

하중이 가해지는 자유단에서 z-방향의 처짐의 이론해에 대한 백분율 오차를 Fig. 6에 도시하였다. Fig. 6의 결과를 보면 전반적으로 면내변형모드에 비해서 오차가 적게 나타났다. 그러나 UFI를 적용한 경우의 오차가 SRI 및 URI를 적용한 경우의 오차보다 크게 발생하였으므로 구속에너지에 내재된 가성구속의 영향으로 인한 오차가 크게 발생함을 알 수 있다. 또한 SRI를 적용한 경우와 URI를

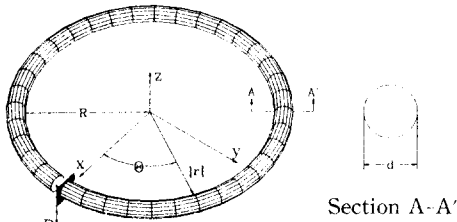


Fig. 5 Geometry of out-of-plane deformable curved beam model

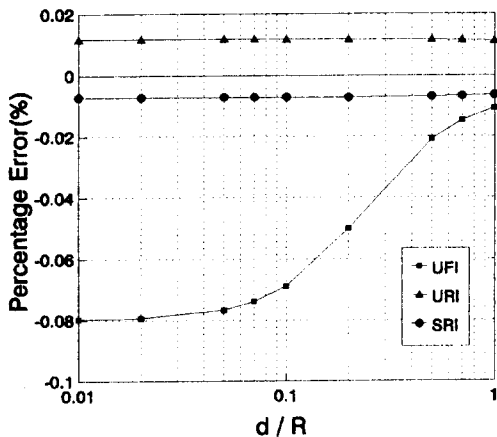


Fig. 6 Percentage error of z-directional deflection at $\theta=2\pi$ of out-of-plane-deformable curved beam model with respect to d/R

적용한 경우의 수치해는 유사한 결과를 나타내므로 비구속에너지에 포함된 가성구속의 영향으로 인한 오차는 매우 적게 나타났음을 알 수 있다. UFI의 경우에는 d/R이 감소할수록 강성과잉현상이 현저하게 나타나며 오차가 커지는 경향은 면내변형모드의 경우와 동일하게 나타났다.

4.3 나선형 공간곡선보

Fig. 7과 같은 곡선을 중립축으로 하는 원형단면의 나선형 공간곡선보 모델을 선정하여 수치실험을 실시하였다.

모델에서 반경 R은 5m이고 a는 나선의 기울기이다. 공간곡선보의 한 끝은 자유단이며 나머지 한 끝은 고정단이다. 또한 하중 P_z는 자유단에 작용하며 크기는 1000 N이다. 사용한 요소는 5-절점요소이며, 요소 수는 4개이다.

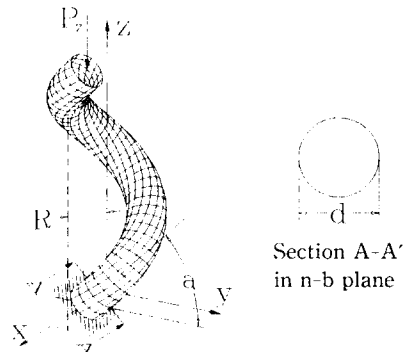


Fig. 7 Geometry of helicoidal beam model

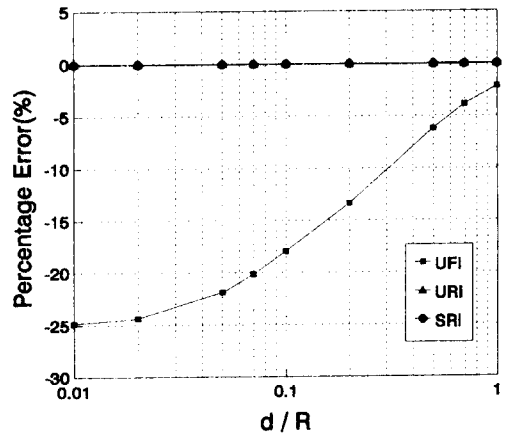
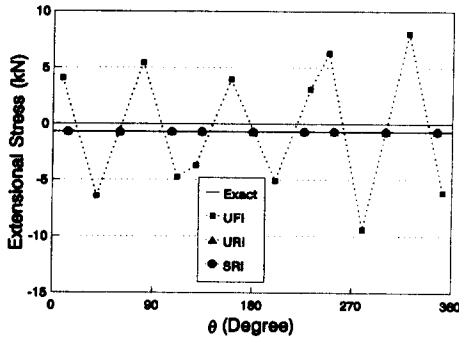


Fig. 8 Percentage error of z-directional deflection at $\theta=2\pi$ of helicoidal beam model with respect to d/R

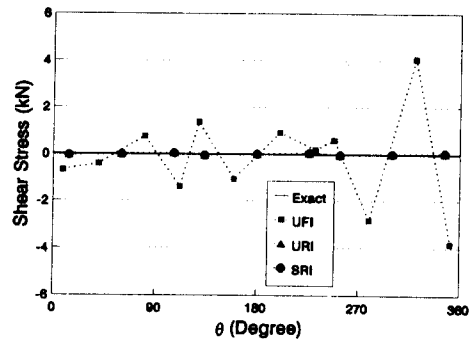
하중이 가해지는 자유단에서 z-방향의 처짐의 이론해에 대한 백분율 오차를 Fig. 8에 도시하였다. 면내변형 곡선보나 면외변형 곡선보의 경우와 마찬가지로 구속에너지에 완전적분을 적용한 UFI의 경우는 오차가 크게 발생하였고 구속에너지에 감차적분을 적용한 SRI 및 URI의 경우는 오차가 적게 발생하였다. UFI의 경우에는 d/R이 감소할수록 강성과잉현상이 심하게 발생하여 오차가 크게 발생

하였으나 구속에너지에 감차적분을 적용한 SRI 및 URI의 경우는 d/R에 관계없이 이론해에 근접한 결과를 보여주었다.

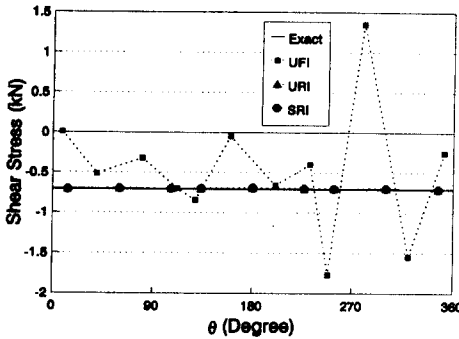
나선형 공간곡선보에서의 적분방법에 따른 응력 분포의 정확성을 조사하기 위해서 수치해석을 실시하였다. 사용한 요소는 4-절점요소이며 요소수는 3개이며 단면의 지름 대 반지름의 비(d/R)는 0.02 인 모델을 사용하였다. Fig. 9에 응력계산의 결과



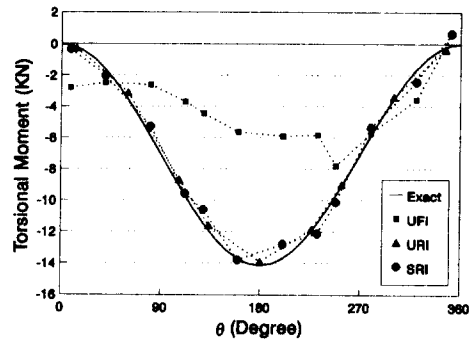
(a) Extentional stress (N)



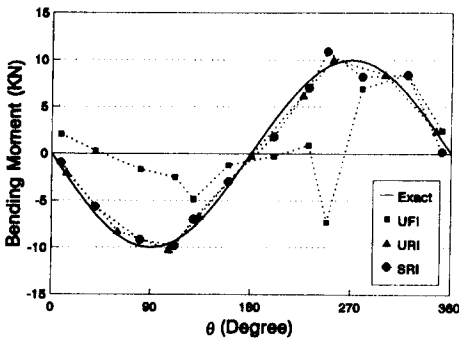
(b) n-direction shear stress (T_n)



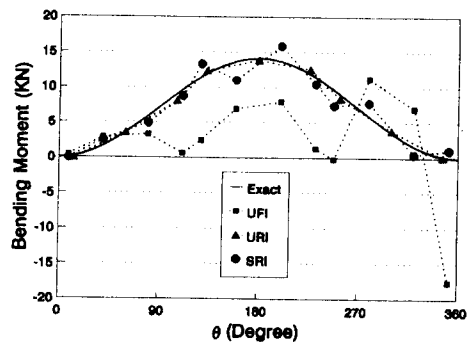
(c) b-direction shear stress (T_b)



(d) Torsional moment (M_t)



(e) n-directimal bending moment (M_n)



(f) b-directional bending moment (M_b)

Fig. 9 Stress distributions in helicoidal beam model of $d/R=0.02$ with three 4-noded elements with respect to θ

를 도시하였다.

Fig. 9의 결과를 살펴보면 UFI를 적용한 경우는 강성과잉현상으로 인하여 응력분포의 기복현상이 심하게 발생하였다. 이는 구속에너지에 가성구속조건을 부과하여 복합수를 최소화하였기 때문이다. 반면에 URI 및 SRI를 적용한 경우는 구속에너지에 대해서 감차최소화를 사용하여 최적응력점에서 변형률 및 응력을 계산하므로 가성구속을 발생시키지 않고서도 비교적 정확한 응력 값을 구할 수 있었다. 그러므로 감차최소화를 적용하면 변위뿐만 아니라 응력의 정확도를 향상시킬 수 있다.

5. 결 론

공간곡선보에 감차최소화 이론을 적용하여 적분 방법에 따른 수치해의 거동을 설명하였다. 본 논문에서 고려한 공간곡선보의 에너지 복합수는 여섯 개의 변형에너지 모드로 구성되어 있으며, 그 중 세 개의 변형모드(인장변형에너지와 n -방향 및 b -방향 전단변형에너지)의 강성은 보의 단면의 두께가 감소함에 따라서 다른 세 개의 변형모드(비틀림 변형 에너지와 n -방향 및 b -방향 굽힘변형 에너지)의 강성보다 훨씬 크게 되어 보의 변형에 지배적 영향을 끼치므로 전자의 변형모드의 에너지는 구속에너지로, 후자의 변형모드의 에너지는 비구속 에너지로 분류된다. 공간곡선보의 변위를 등매개 변위함수를 사용하여 근사화 시켜서 유한요소 수식을 할 때, 구속에너지를 완전적분하면 구속에너지에 포함된 불일치계수는 penalty parameter에 의해 가성구속화되어 강성과잉현상을 일으키게 된다. 그러나 구속에너지를 감차적분하면 가성구속이 발생하지 않게 되어 강성과잉현상도 발생하지 않게 된다. 따라서, 일괄적 감차적분 또는 선별적 감차적분을 사용하면 변위의 오차가 적게 발생하며 응력분포의 심한 기복현상이 나타나지 않게 된다. 일괄적 완전적분을 사용할 경우 d/R 이 감소함에 따라서 변위의 오차가 현저하게 증가하는 것은 가성구속이 penalty parameter에 의해서 더욱 더 강하게 부과되기 때문이다.

후 기

본 연구는 1994년도 연세대학교 학술연구비 및 현대자동차(주)의 연구비 지원에 의하여 이루어진

것입니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Prathap, G. and Ramesh Babu, C., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Element," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600
- (2) Kamoulakos, A., 1988, "Understanding and Improving the Reduced Integration of Mindlin Shell Element," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 2009~2029
- (3) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성과잉현상과 고유치에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제14권, 제2호, pp. 310-323
- (4) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1990, "Consideration of Energy Modes in Isoparametric Beam Elements," 연세대학교 연세논총, 제26집, pp. 315~331
- (5) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1991, "The Error Due to Spurious Coefficients in Isoparametric Quadratic Finite Element Analysis of Curved Beam Subjected to Out-of-Plane Loads," 연세대학교 연세논총, 제27집, pp. 231~253
- (6) 김용우, 문원주, 권해성, 민옥기, 1992, "면외 변형이 가능한 평면곡선보의 선형 유한요소," 대한기계학회논문집, 제16권, 제3호, pp. 419~429
- (7) 문원주, 김용우, 민옥기, 1993, "면외변형 링 요소를 이용한 고유해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제7호, pp. 1719~1730
- (8) Martini, L. and Vitaliani, R., 1988, "On the Polynomial Convergent Formulation of a C0 Isoparametric Skew Beam Element," *Computers & Structures*, Vol. 29, No. 3, pp. 437~449
- (9) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1994, "Reduced Minimization Theory in Beam Elements," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 2125~2145
- (10) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1994, "Reduced Minimization of Mindlin Plate," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 4263~4284
- (11) Kim Yong-woo and Min Oak-key, 1995, "Reduced Minimization in Lagrangian Mindlin Plate Element with Arbitrary Orientation under Uniform Isoparametric Mapping," *Int. J. Numer.*

- Meth. Engng.*, Vol. 38, pp. 2101~2114
- (12) Erwin Kreyszig, 1983, *Advanced Engineering Mathematics*, 5th ed., John Wiley & Sons, New York
- (13) Cowper, G. R., 1966, "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory," *Journal of Applied Mechanics*, pp. 335~339